

University of East Sarajevo  
Mathematical Society of the Republic of Srpska

---

**4th MATHEMATICAL CONFERENCE  
OF THE REPUBLIC OF SRPSKA**

**BOOK OF ABSTRACTS  
Trebinje, 06-07 June 2014**

Trebinje, 2014

ISBN 978-99976-600-2-2

# ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE

## KNJIGA REZIMEA

### **Izdavač:**

Fakultet za proizvodnju i menaždment Trebinje  
Univerzitet u Istočnom Sarajevu  
Stepe Stepanovića bb, 89 101 Trebinje, BiH  
Telefon: -387 (0)59 490 654  
e-mail: fpmtrebinje@gmail.com

### **Za izdavača:**

Prof. dr Dušan Jokanović

### **Glavni urednik:**

Prof. dr Milenko Pikula

### **Tehnički i kompjuterski slog:**

Marina Zirojević

## PROGRAM RADA KONFERENCIJE

*Petak, 6. juni 2014. godine*

11:00-14:00 - Registracija učesnika u holu Fakulteta za proizvodnju i menadžment Trebinje

14:00 - Otvaranje konferencije i promocija Zbornika sa Treće matematičke konferencije Republike Srpske

### PLENARNA SJEDNICA

Radno predsjedništvo

prof. dr Miodrag Mateljević, prof. dr Radoje Šćepanović, doc. dr Dejan Bokonjić, doc. dr Dušan Jokanović

### PLENARNO PREDAVANJE

15:00 - **PROFESOR LOTHAR REICHEL, UNIVERZITET U KENTU - NETWORK ANALYSIS VIA PARTIAL SPECTRAL FACTORIZATION AND GAUSS QUADRATURE**

16:00 - Koktel u holu Fakulteta za proizvodnju i menadžment Trebinje

17:00-20:00 - Rad po sekcijama

21:00 - Svečana večera (hotel Leotar)

*Subota, 7. juni 2014. godine*

08:30-12:00 - Rad po sekcijama

12:30 - Završna plenarna sjednica

### ZAVRŠNA RIJEČ

13:00 - Posjeta Hercegovačkoj Gračanici



## CONFERENCE PROGRAMME

### *THE 1<sup>st</sup> CONFERENCE DAY, 06 June 2014*

11:00-14:00 - Registration for the conference in the foyer of the  
Production and Management Faculty Trebinje

14:00 - Opening ceremony and promotion of the Proceedings of the Third  
Mathematical Conference  
of the Republic of Srpska

### **PLENARY SESSION**

Presiding Panel Members

Full Professor Miodrag Mateljević, Full Professor Radoje Šćepanović,  
Assistant Professor Dejan Bokonjić, Assistant Professor Dušan Jokanović

### **PLENARY LECTURE**

15:00 - **PROFESSOR LOTHAR REICHEL, KENT STATE  
UNIVERSITY - NETWORK ANALYSIS VIA PARTIAL SPECTRAL  
FACTORIZATION AND GAUSS QUADRATURE**

16:00 - Cocktail (Foyer of the Production and Management Faculty  
Trebinje)

17:00-20:00 - Work in sections

21:00 - Conference Dinner (Hotel Leotar)

### *THE 2<sup>nd</sup> CONFERENCE DAY, 07 June 2014*

08:30-12:00 - Work in sections

12:30 - Final plenary session

### **CLOSING REMARKS**

13:00 - Excursion - A Visit to Hercegovska Gračanica Orthodox Church

**SECTION FOR ALGEBRA AND GEOMETRY***Friday, 6 June 2014*

17:00 - Production and Management Faculty

Chair: dr Đorđe Baralić

Secretary: Darko Drakulić

*Žarko Mijajlović* - Projection Calculus*Zoran Rakić* - Duality Principle and Osserman Condition*Duško Jojić* - Some Complexes of Non-Crossing Diagonals of a Polygon*Zoran Petrić* - Segalovi simplicijalni prostori*Ioana-Claudia Lazar* - The Combinatorial Structure of Finite Simplicial Complexes of Nonpositive Curvature*Đorđe Baralić, Vladimir Grujić* - Osobine kvazitorusnih mnogostrukosti nad poligonima*Biljana Vujošević* - Sistemi inkluzija Hilbertovih modula*Predrag Tanović* - O invarijantama u strukturama prvog reda*Slavko Moconja* - On Quasiminimal Groups*Dejan Ilić* - O razlaganju linearno uređenih struktura*Vladimir Dragović, Katarina Kukić* - Diskriminantno separabilni polinomi i kvad-jednačine

**SECTION FOR ALGEBRA AND GEOMETRY***Saturday, 7 June 2014*

08:30 - Production and Management Faculty

Chair: dr Zoran Petrić

Secretary: Jelena Radović

*Zoran Ognjanović, Miodrag Rašković, Zoran Marković* - Verovatnosne logike

*Nenad Stojanović, Vidan Govedarica* - Parketiranje ravni polupravilnim poligonima

*Nedžad Dukić, Ilija Lalović* - Fuzzy višeznačne zavisnosti i fuzzy formule u fuzzy modelu

*Emil Ilić-Georgijević* - A note on the Jacobson radical of a graded ring

*Nela Milošević, Zoran Petrović* - Homology of Ideal Zero-Divisor Complex of Laurent type

*Dušan Jokanović* - Some Properties of Semicommutative Rings

*Jelena Čolić-Oravec, Jovanka Pantović* - On Some Classes of Maximal Clones of Incompletely Specified Operationsa

*Milovan Vinčić* - Minimalni varijeteti involutivnih prstena

*Jelena Radović* - Fourier transforms on finite inverse semigroups

**SECTION FOR ANALYSIS***Friday, 6 June 2014*

17:00 - Production and Management Faculty

Chair: dr Milenko Pikula

Secretary: Nataša Pavlović

*Miodrag Mateljević* - Distortion of Quasiregular Mappings and Equivalent Norms on Lipschitz-type Space

*Milenko Pikula, Ismet Kalčo* - Osobine karakteristične funkcije graničnog zadatka operatora  $L$  sa linearnim kašnjenjem

*Zoran Mitrović* - The Remarks on Best and Coupled Best Approximations

*Milenko Pikula, Dragana Nedić, Vladimir Vladičić, Olivera Marković* - Odnos asimtotike karakteristične funkcije i asimptotike njenih nula za klasični operator tipa Šturm-Liuvila

*Vesna Mišić, Ivan Arandjelović* - On a Fixed Point Theorem of Rezapour and Hamlbarani

*Vladimir Vladičić, Nebojša Elez* - Inequalities and Rapidly Varying Functions

*M. Pikula, E. Čatrnja, E. Jakupović, A. Šarić* - Konstrukcija vektorske funkcije  $\vec{w} = (q, \alpha)$  pomoću dva data niza sopstvenih vrijednosti

*Jelena Vujaković* - Weakly Compatible Mappings in Menger Spaces and Fixed Point Results



## SECTION FOR ANALYSIS

*Saturday, 7 June 2014*

08:30 - Production and Management Faculty

Chair: dr Hranislav Milošević

Secretary: Nataša Pavlović

*Miljan Knežević* - Bi-Lipschitz Properties of Harmonic Quasiconformal Mappings

*Fikret Vajzović, Amina Šahović, Sead Peco* - Ergodičke teoreme za kosinusne operatorske funkcije

*Elmir Čatrnja, Milenko Pikula* - Rješavanje Šturm-Liouvilovog problema sa konstantnim kašnjenjem metodom upucavanja

*Ivan Arandžević, Hranislav Milošević, Dojčin Petković* - Konvergencija racionalnih funkcija sa primenom na neke od klasa funkcija

*Jelena Katić, Jovana Đuretić, Darko Milinković* - Hofer's geometry for Lagrangian submanifolds and Hamiltonian diffeomorphisms

*Jovana Đuretić* - Piunikhin-Salamon-Schwarz isomorphisms and symplectic invariants obtained using cobordisms of moduli spaces

*Milenko Pikula, Biljana Vojvodić, Nataša Pavlović* - Prvi regularizovani trag graničnog zadatka tipa Šturm-Liuvila sa dva konstantna kašnjenja

*Branko Sarić, Esad Jakupović* - Totalization of the Riemann Integral

*Šefket Arslanagić* - Značaj metode pomoćne nejednakosti za dokazivanje raznih nejednakosti

## SECTION FOR APPLIED MATHEMATICS

*Friday, 6 June 2014*

17:00 - Production and Management Faculty

Chair: dr Miodrag Spalević

Secretary: Goran Popivoda

*Bernardo de la Calle Ysern* - Modified Gauss-Kronrod Quadratures

*Milan Tuba* - Swarm Intelligence Algorithms for JPEG Quantization Table Selection

*Aleksandar Pejčev, Miodrag Spalević* - Quadrature Formulas for the Fourier-Chebyshev Coefficients

*Miodrag Spalević* - Ocene grešaka Gaus-Turanovih kvadratura

*Miroslav Pranić* - Rational Gauss Quadrature

*Gradimir V. Milovanović* - Nonstandard Quadratures of Gaussian Type

*Žana Kovijanić-Vukićević, Goran Popivoda, Vladimir Božović* - Extremal values of certain topological indices over some special classes of graphs

*Stevan Šćepanović, Marko Grebović* - Matematička analiza poboljšanja energetske efikasnosti automatizacijom sistema potrošnje energije i optimizovanjem troškova gradnje

*Hranislav Milošević, Sonia A. Beisel and Alexandar D. Rychkov* - Modeling of Tsunami Run up Using of Large Particles of Shallow Water Theory on the Shore Area

*Bogdana Stanojević, Milan Stanojević* - Generation of the non-dominated set for bi-objective linear fractional programs - Conjectural conclusions

*Ivana Kuzmanović, Zoran Tomljanović, Ninoslav Truhar* - Lyapunov and T-Lyapunov Equations with some Applications in Mechanics

*Silvia Gilezan, Jelena Ivetić, Pierre Lescanne, Silvia Likavec* - Some Advantages of the Lambda Calculi with Resource Control

*Huse Fatkić, Mehmed Brkić, Berina Fatkić* - On Measurability-preserving Weakly Mixing Transformation

*Nebojša Ralević, Sanja Dukić, Danijela Karaklić* - Rastojanja između faza objekata

*Sandra Buhmiller* - Jedan algoritam za formiranje i rešavanje graničnog sistema za singularne probleme”

*Željko Pržulj, Zoran Ljuboje, Zoran Ivić* - Solitonski model energije i naelektrisanja u molekulskim lancima

**SECTION FOR APPLIED MATHEMATICS***Saturday, 7 June 2014*

08:30 - Production and Management Faculty

Chair: dr Vidan Govedarica

Secretary: Tamara Bojičić

*Marija Stanić* - An Optimal set of Quadrature Rules for Trigonometric Polynomials

*Dragan Vidaković, Duško Parezanović* - Point Multiplication on Elliptic Curves Over  $F_p$

*Vidan Govedarica, Tatjana Mirković* - Neke jednakosti i nejednakosti sopstvenih vrednosti grafova

*Aleksandar Takači, Miroslav Marić, Darko Drakulić* - Primena različitih konormi u modelovanju fazi lokacijskih problema

*Nebojša Ralević, Marko Janev, Danilo Rapaić* - Fazi regresija

*Dalibor Čevizović, Željko Pržulj, Zoran Ivić* - Primena varijacionog metoda na određivanje statistički najpovoljnijih kvantnih stanja eksitacija kod proteinskih makromolekularnih lanaca

*Zoran Ljuboje, Željko Pržulj, Ognjen Bjelica* - Primjena numeričkih metoda pri rješavanju nekih problema u fotorefraktivnoj optici

*Tamara Bojičić, Vesna Popović-Bugarin* - Uticaj perioda aktivacije uređaja na upravljanje opterećenjem elektrodistributivne mreže primjenom različitih kriterijuma minimizacije

*Nebojša Nikolić, Dragana Makajić-Nikolić* - Connection Between Metric Dimension of Hypercube and Coin Weighing Problem

*Dragan Matić, Vladimir Filipović, Jozef Kratica* - Pregled metoda za rješavanje problema maksimalno balansirane povezane particije u grafu

*Milan Dotlić, Mladen Ignjatović, Mladen Ignjatović* - Numerical Solutions to Love's Integral Equation

*Radoslav Milošević* - Kvantifikatori ograničenog dometa

*Dušan Jokanović, Mirsada Đežić, Marina Zirojević* - A note to Cantor-Zassenhaus Algorithm

*Petar Mandić, Mihailo Lazarević, Tomislav Šekara* - An Algorithm for Stabilization of Linear Control Systems Using Fractional Ordered PID Controllers

*Vladan Mastilović, Milorad Banjanin* - WEB servisi u MD reinženjeringu informacionih sistema

**SECTION FOR HISTORY, PHILOSOPHY AND  
MATHEMATICS TEACHING**

*Friday, 6 June 2014*

17:00 - Production and Management Faculty, Room 2

Chair: dr Vesna Jevremović

Secretary: Marina Zirojević

*Mirko Radić* - Geogebra and Patterns of Variation

*Radoje Šćepanović* - Primjeri linearnih preslikavanja i jednačina u nastavi srednje škole

*Vesna Jevremović* - Kombinatorika - život i matematika

*Milenko Pikula, Jelena Bozalo* - Slobode i ograničenja učitelja u realizaciji nastavi matematike

*Dragana Matić, Milisav Knežević, Dragan Matić* - Modernizacija nastavnih planova i programa iz matematike za srednje stručne škole u Republici Srpskoj

*Aleksandar M. Nikolić* - Institucionalni razvoj matematike u Srbiji do Velikog rata

*Spasoje Mučibabić, Dragan Vukmirović, Milan Martić* - Matematičko-statističkim metodama i vojnostrategijskom analizom do istine o sarajevskom atentatu i početku Prvog svetskog rata

*Vladimir Drekalović* - Historical Development of the Ontological Argument – Philosophical and Mathematical Aspects

*Jasmina Milinković* - O teoriji i praksi postavljanja problema u nastavi matematike

*Gordana Laštovička-Medin* - Assessing of Children's Thinking

*Sanja Maričić, Krstivoje Špijunović* - Metodika početne nastave matematike-izazovi i perspektive

*Milorad Šuković, Zoran Lovren* - Rešenje nije samo rezultat

*Dejić Mirko, Ivana Jovanović* - Teorijske osnove rešavanja problemskih zadataka u početnoj nastavi matematike

*Aleksandra Stanković* - Internet i društvene mreže između zloupotrebe i slobode

*Karmelita Pjanić, Sanela Nesimović* - Identifikacija i klasifikacija geometrijskih oblika uočenih na fotografijama realnih objekata - slučaj studenata razredne nastave

*Alma Šehanović, Dragana Kovačević* - Pravila djeljivosti

*Jasmina Milinković* - Funkcije igre u nastavi matematike

*Aleksandra Mihajlović* - Postavljanje problema u početnoj nastavi matematike

*Miće Miletić* - Tipične greške učenika (Jedan pogled na znanje matematike kod učenika osnovnih i srednjih škola)

*Gordana Maksimović* - Primjena slobodnog softvera u nastavi web dizajna i programiranja

## SECTION FOR HISTORY, PHILOSOPHY AND MATHEMATICS TEACHING

*Saturday, 7 June 2014*

08:30 - Production and Management Faculty

Chair: dr Radoje Šćepanović

Secretary: Marina Zirojević

*Slobodan Vujošević* - Noncomputability, Mind and Physics

*Gordana Laštovička-Medin* - Experiential education: Multi-sensory approach and Linking the Abstract to the Concrete

*Ivan Budimir* - Zenonov paradoks o Ahileju i kornjači i beskonačnost

*Dragica Milinković* - Modelovanje jednačina u mlađim razredima osnovne škole

*Darko Drakulić, Milorad Banjanin, Milenko Pikula, Vladimir Vladičić* - Interaktivni udžbenici iz matematike u Republici Srpskoj

*Ljubica Diković* - Jačanje intuitivnog usvajanja pojmova-limes i neprekidnost

*Branislav Popović, Radojko Damjanović* - Konkretno i apstraktno - matematičke reprezentacije i razvoj kognicije kod učenika

*Radoslav Milošević* - Neki noviji filozofski pravci u matematici

*Mirko Dejić* - Koreni i svedočanstva slovenske (srpske) numeracije

*Savo Ćebić* - Šta to beše ugao?

*Marina Zubac* - Grupni oblik rada u nastavi matematike

*Šefket Arslanagić* - Doprinos matematike razvoju ličnosti

*Milan Živanović, Jelena Stojkanović* - Nastava statistike u srednjoj školi i mjerenje frekvencije saobraćaja

*Dragica Milinković* - Kompetencije studenata učiteljskog studija za matematičko modelovanje

*Ivica Boljat* - Usporedba ALICE, NXT-G LEGOMINDSTORMS-a i pseudo-koda u poučavanju programiranja početnika



*Ivica Luketin* - Incorporating the Structure and Materials from Inovative Mooc into Traditional Physics Didactics Seminar Based on Scientific Argumentation

*Tatjana Bajić* - Informatika i računarstvo za strukovne vaspitače planiranje i interpretacija nastavnih sadržaja

*Vladimir Šašo* - Slobodan pristup Internetu i nastava Informacionih tehnologija

*Gordana Đorđević* - Unapređenje nastavnih procesa primenom informacionih tehnologija

*Bernandin F. Ibrahimović* - Pitagorine trojke

*Petar Vuca* - Nastava fizike u kontekstu promena u obrazovanju

*Milorad Banjanin* - Globalne računarske mreže i tehnologije pretraživanja

**SECTION FOR PROBABILITY AND STATISTICS**

*Friday, 6 June 2014*

17:00-18:30 - Production and Management Faculty

Chair: dr Huse Fatkić

Secretary: Hana Fatkić

*Halima Elfaghihe, Kristina Veljković, Vesna Jevremović* - Optimal Process Calibration for Some Examples of Non-symmetric Loss Functions

*Slavica Medić, Tatjana Grbić* - Chebyshev type Inequalities based on g-integrals

*Huse Fatkić, Slobodan Sekulović, Hana Fatkić* - On Harmonic Mean Values and Weakly Mixing Transformations

*Kristina Veljković* - The X Bar Control Chart for Non-Normal Symmetric Distribution of Quality Characteristic

*Tijana Levajković* - Propagator Method for Malliavin-Type Equations

*Jelena Stanojević* - Intervalno ocenjivanje varijanse

*Tatjana Bajić* - An orthogonal stochastic measure and the normed Hermite polynomials

**STUDENT'S SECTION***Friday, 6 June 2014*

18:30 - Production and Management Faculty

Secretary: Marko Rajković

*Marko Rajković, Ivan Bartulović, Mentor dr Štefko Miklavič* - Polynomial Time Primality Testing

*Đorđe Žikelić, Mentor dr Đorđe Baralić* - Mnogouglovi upisani u celobrojnu rešetku

*Mina Šekularac, Mentor dr Aleksandar Pejčev* - Teselacije

*Vesna Miletić, Mentor dr Milenko Pikula* - O jednom sistemu nelinearnih jednačina u prostoru  $E^4$

*Branko Grbić, Mentor dr Miloš Đorić* - Krive u ravni



**PLENARNO PREDAVANJE  
PLENARY LECTURE**

Lothar Reichel

Department of Mathematics, Kent State University, Kent, Ohio, USA

**NETWORK ANALYSIS VIA PARTIAL SPECTRAL  
FACTORIZATION AND GAUSS QUADRATURE**

**Abstract**

Large-scale networks arise in many applications. It is often of interest to be able to identify the most important nodes of a network or to ascertain the ease of traveling between nodes. These and related quantities can be determined by evaluating expressions of the form  $u^T f(A)w$ , where  $A$  is the adjacency matrix that represents the graph of the network,  $f$  is a nonlinear function, such as the exponential function,  $u$  and  $w$  are vectors, for instance, axis vectors. We first describe a novel technique for determining upper and lower bounds for expressions  $u^T f(A)w$  when  $A$  represents an undirected graph and bounds for many vectors  $u$  and  $w$  are desired. Then  $A$  is symmetric and the bounds are computed by first evaluating a low-rank approximation of  $A$ , which is used to determine rough bounds for the desired quantities for all nodes. These rough bounds indicate for which vectors  $u$  and  $w$  more accurate bounds should be computed with the aid of Gauss-type quadrature rules. This hybrid approach is cheaper than only using Gauss-type rules to determine accurate upper and lower bounds in the common situation when it is not known a priori for which vectors  $u$  and  $w$  accurate bounds for  $u^T f(A)w$  should be computed. Several computed examples, including an application to software engineering, illustrate the performance of the hybrid method. Extensions to undirected networks that correspond to a nonsymmetric adjacency matrix also will be discussed.



**SEKCIJA ZA ALGEBRU I GEOMETRIJU**  
**SECTION FOR ALGEBRA AND GEOMETRY**





Žarko Mijajlović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia

## PROJECTION CALCULUS

### Abstract

Let  $C$  be the set of complex numbers,  $Z$  the set of integers and  $N$  the set of nonnegative integers. We remind that a function  $\pi_n: C^Z \rightarrow C$ ,  $n \in Z$ , is a projection if  $\pi_n(f) = f(n)$ ,  $f \in C^Z$ . Let  $\mathcal{P}$  be the subspace of the vector space of linear functionals of the complex vector space  $C^Z$  where  $\mathcal{P}$  is generated by projections. We introduce an associative and commutative algebra  $\mathcal{A}$  over  $\mathcal{P}$  defining multiplication of projections by  $\pi_m \cdot \pi_n = \pi_{m+n}$ . It appears that the algebra  $\mathcal{A}$  is very appropriate for computing various inversion formulas from discrete mathematics. For example, if  $\theta_n$ ,  $n \in N$ , is the sequence of linear functionals defined by  $\theta_n = \sum_k \binom{n}{k} \pi_{n-2k}$ ,  $n \in N$ , then  $\pi_n = c_n(\theta) - \pi_{-n}$ , where  $\theta = \theta_1 = \pi_1 + \pi_{-1}$  and  $c_n$  is the Tchebychev polynomial of the first kind. This immediately leads to the following inversion formula for the sequences of complex numbers

$$g_n = \sum_k \binom{n}{k} f_{n-2k} \Leftrightarrow f_n = \sum_k (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} g_{n-2k}.$$

Calculation in the algebra  $\mathcal{A}$ , we call the projection calculus. We also show that the algebra  $\mathcal{A}$  naturally bears the structure of Hopf algebra.

Zoran Petrić

Matematički institut SANU

## SEGALOVİ SIMPLICIJALNI PROSTORI

### Apstrakt

Simplicijalni prostor  $[n] \mapsto A_n$  je redukovani Segalov prostor kada za svako  $n$  važi da je preslikavanje iz  $A_n$  u  $(A_1)^n$ , indukovano morfizmima simplicijalne kategorije koji odgovaraju projekcijama, homotopska ekvivalencija. Uz određene uslove, za redukovani Segalov prostor važi da je  $A_1$

homotopski ekvivalentan prostoru petlji geometrijske realizacije simplicijalnog prostora  $A$ . Na predavanju će biti reči o jednom uopštenju ovog rezultata na multisimplicijalne prostore.

---

Predrag Tanović

Matematički institut SANU i Matematički fakultet Beograd, Srbija

## O INVARIJANTAMA U STRUKTURAMA PRVOG REDA

### Apstrakt

Neka je  $\mathcal{K}$  neka klasa struktura prvog reda u fiksiranom jeziku. Kardinalna invarijanta klase je funkcija koja svakoj strukturi klase dodeljuje kardinalni broj koji ne zavisi od tipa izomorfizma strukture i koji ne raste prilikom utapanja u drugu strukturu klase. Najpoznatiji primeri kardinalnih invarijanata su dimenzija u klasi vektorskih prostora nad fiksiranim poljem, kao i stepen transcendentnosti u slučaju klase polja fiksirane karakteristike.

Pojam dimenzije u teoriji modela prvi je uveo William Marsh 1964. godine u [1], ustanoviši da dimenzija postoji i u klasi modela jako minimalnih teorija (kakve su teorija vektorskog prostora nad fiksiranim poljem i teorija algebarski zatvorenih polja fiksirane karakteristike). Saharon Shelah je razvio opštu teoriju klasifikacije struktura prvog reda u [2], u kojoj osim kardinalnih invarijanti figuriraju i invarijante čije vrednosti mogu biti i nizovi kardinala, nizovi nizova kardinala, ....

Na predavanju će najviše biti reči o nedavno uvedenim invarijantama ([3] i [4]) čije vrednosti su linearna uređenja. Takve postoje u klasi diskretnih linearnih uređenja, kao i nekih uređenih grupa (valued groups).

### Bibliography

[1] W. E. Marsh, *On  $\omega_1$ -categorical and not  $\omega$ -categorical theories*, PhD Thesis, Dartmouth College, 1966.

[2] S. Shelah, *Classification Theory*, North Holland 1990.

[3] A. Pillay, P. Tanović, *Generic stability, regularity, and quasiminimality*, In: *Models, Logics and Higher-Dimensional Categories, A Tribute to the Work of Mihály Makkai*, CRM Proceedings and Lecture Notes, 2011, pp.189-211.

[4] S. Moconja, P. Tanović, *Asymmetric regular types*, arXiv:1312.0222, 2013.

---

Zoran Ognjanović, Miodrag Rašković, Zoran Marković

Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts  
Beograd, Serbia

## PROBABILITY LOGICS

### Abstract

The paper summarizes the results of the authors in formalization of uncertain reasoning. A number of probability logics is considered. Their axiomatizations, completeness, compactness and decidability are addressed. Some possible applications of probability logics are analyzed.

**Keywords:** probability logic, conditional probability, approximate probability, non-standard analysis, strong completeness, decidability, default reasoning

---

Ioana-Claudia Lazăr

'Politehnica' University of Timișoara, Romania

Đorđe Baralić

Mathematical Institute SANU

## THE COMBINATORIAL STRUCTURE OF FINITE SIMPLICIAL COMPLEXES OF NONPOSITIVE CURVATURE

### Abstract

We investigate the collapsibility of systolic finite simplicial complexes of arbitrary dimension. The main tool we use in the proof is discrete Morse theory. We shall consider a convex subcomplex of the complex and project any simplex of the complex onto a ball around this convex subcomplex. These projections will induce a convenient gradient matching on the complex. Along the way we make use of certain well known results regarding systolic geometry.

---

Nela Milošević, Zoran Petrović  
Mathematical Faculty Belgrade

## HOMOLOGY OF IDEAL ZERO-DIVISOR COMPLEX

### Abstract

We look at higher dimensional complexes associated to commutative rings and investigate various properties of the homology groups of the associated complex. In particular, we look at the ideal zero-divisor complex and present some new results for the ring  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

---

Zoran Rakić

Faculty of Mathematics, Studentski trg 16, p.o. box 550, 11 001 Belgrade,  
Serbia

## DUALITY PRINCIPLE AND OSSERMAN CONDITION

### Abstract

Let  $(M, g)$  be a pseudo-Riemannian manifold, with curvature tensor  $R$ . The Jacobi operator  $R_X$  is the symmetric endomorphism of  $T_pM$  defined by  $R_X(Y) = R(Y, X)X$ . In Riemannian settings, if  $M$  is locally a rank-one symmetric space or if  $M$  is flat, then the local isometry group acts transitively on the unit sphere bundle  $SM$  and hence the eigenvalues of  $R_X$  are constant on  $SM$ . Osserman wondered if the converse held; this question is usually known as the *Osserman conjecture*.

Recently, many authors have been studied problems which arising from the Osserman conjecture and its generalizations. In the first part of the lecture we will give an overview of Osserman type problems in the pseudo-Riemannian geometry. The second part is devoted to the equivalence of the Osserman pointwise condition and the duality principle. This part of the lecture consists the new results, which are obtained in collaboration with Yury Nikolayevsky and Vladica Andrejić.

---

Duško Jojić

Prirodno-matematički fakultet Banja Luka

## SOME COMPLEXES OF NON-CROSSING DIAGONALS OF A POLYGON

### Abstract

For a given polygon  $P$  in the Euclidean plane let  $\Gamma_P$  denote the simplicial complex whose vertices are diagonals of  $P$ . Faces of  $\Gamma_P$  are the subsets of non-crossing diagonals of  $P$ . If  $P$  is a convex  $n$ -gon, then  $\Gamma_P$  is the boundary complex of an  $(n - 3)$ -dimensional simplicial convex polytope (dual of the associahedron). We prove that  $\Gamma_P$  is vertex decomposable. Also, we obtain some relations for  $h$ -vector of these complexes.

Let  $\Delta_{A_{n-1}}^m$  denote simplicial complex whose vertices are diagonals of a convex  $(mn + 2)$ -gon  $P$  which dissect  $P$  into an  $(jm + 2)$ -gon and an  $((n - j)m + 2)$ -gon. The facets of  $\Delta_{A_{n-1}}^m$  are sets of non-crossing diagonals that dissect  $P$  into  $(m + 2)$ -gons. We describe an explicit shelling for  $\Delta_{A_{n-1}}^m$ , obtain a combinatorial interpretation for its  $h$ -vector, and describe a bijection between generating facets of  $\Delta_{A_{n-1}}^m$  and facets of  $\Delta_{A_{n-1}}^{m-1}$ .

---

Katarina Kukić

Saobraćajni fakultet, Univerzitet u Beogradu

Vladimir Dragović

Matematički institut SANU

## DISKRIMINANTNO SEPARABILNI POLINOMI I KVAD-JEDNAČINE

### Apstrakt

U radu je prikazana veza između diskriminantno separabilnih polinoma i kvad-jednačina koje u svojim radovima razmatraju Adler, Bobenko i Suris. Po definiciji diskriminantno separabilni polinomi su polinomi čije se diskriminante mogu predstaviti kao proizvod polinoma jedne promenljive.

Klasifikovali smo diskriminantno separabilne polinome koji zavise od tri promenljive i stepena su dva po svakoj od tih promenljivih. Prikazana je i geometrijska interpretacija takvih polinoma u nekim slučajevima. Takođe za predstavnike svake klase ekvivalencije polinoma uočili smo odgovarajuću integrabilnu kvad-jednačinu.

Predstavljeni rezultati su zajednički rad sa Vladimirom Dragovićem.

---

Nenad Stojanović

Visoka medicinska škola Prijedor

Vidan Govedarica

Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Istočnom Sarajevu

## **PARKETIRANJE RAVNI POLUPRAVILNIM POLIGONIMA**

### **Apstrakt**

U ovom radu je dat pristup analizi parketiranja ravni polupravilnim jednakostraničnim poligonima. Prvo je dat osvrt na parketiranje ravni jednom vrstom polupravilnih poligona, a zatim parketiranje ravni jednakostraničnim polupravilnim poligonima različitih vrsta. Rješavanjem odgovarajuće Diofantove jednačine pokazano je da se od svih polupravilnih jednakostraničnih konveksnih poligona  $P_{2m}$ ,  $m > 2$ ,  $m \in \mathbb{N}$  parketiranje ravni može obaviti jedino sa polupravilnim četvorouglovima. Kao primjer parketiranja ravni sa dvije vrste polupravilnih jednakostraničnih poligona razmatran je slučaj parketiranja četvorouglovima i šestouglovima, kao i odgovarajuća Diofantova jednačina tog slučaja.

---

Emil Ilić-Georgijević

University of Sarajevo, Faculty of Civil Engineering

## A NOTE ON THE JACOBSON RADICAL OF A GRADED RING

### Abstract

If  $G$  is a partial groupoid, then  $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$  is called  $G$ -graded and we say that  $R$  induces  $G$  if and only if: *i*)  $R_g R_h \subseteq R_{gh}$  whenever  $gh$  is defined, *ii*)  $R_g R_h \neq \{0\}$  implies that the product  $gh$  is defined. In that case,  $G$  is called the *partial groupoid induced by  $R$* . Also, a partial groupoid  $G$  is called *right cancellative* if  $xz = yz$  implies  $x = y$ . The notion of a *cancellative partial groupoid* is clear enough. A. Kelarev provided us with the following open problem:

Is it true that, if  $S$  is a finite cancellative partial groupoid with idempotent  $e$  and  $R = \bigoplus_{s \in S} R_s$  is an  $S$ -graded ring inducing  $S$ , then  $J(R_e) = R_e \cap J(R)$ ? Here we will answer this question affirmatively in case  $R$  is Artinian regardless the cardinality of  $S$ . More precisely, we prove the following theorem.

**Theorem 1.** *If  $S$  is a cancellative partial groupoid with idempotent  $e$  and  $R = \bigoplus_{s \in S} R_s$  an Artinian  $S$ -graded ring inducing  $S$ , then  $J(R_e) = R_e \cap J(R)$ .*

In order to prove Theorem 1, we will use the notion of a graduation introduced by M. Krasner and the results on the Jacobson radical of regular graded rings obtained by E. Halberstadt.

---

Dorđe Baralić

Matematički institut SANU

Vladimir Grujić

Matematički fakultet Beograd

## **OSOBINE KVAZITORUSNIH MNOGOSTRUKOSTI NAD POLIGONIMA**

### **Apstrakt**

Kvazitorusne 4 mnogostrukosti su mnogostrukosti na kojima djeluje torus  $T^2$  i orbita ovog djelovanja je poligon. Koristeći karakteristične klase i kombinatoriku poligona pokazujemo da topološke osobine, kao što su dimenzija minimalnog prostora u koje se one ulažu ili imerziju, klase bordizama i druge, zavise isključivo od parnosti broja strana poligona. Ovo je specifično za dimenziju 4 koja obuhvata široku klasu mnogostrukosti, kao npr. Hircebruchove površi, jer u višim dimenzijama ne možemo dobiti tako opšti rezultat.

---

Nežad Dukić

PMF, Odsjek za matematiku, Sarajevo

Ilija Lalović

PMF, SP Matematika i informatika, Banja Luka

## **FUZZY VIŠEZNAČNE ZAVISNOSTI I FUZZY FORMULE U FUZZY MODELU**

### **Apstrakt**

U ovom radu probleme izvođenja posljedica iz fuzzy višeznačnih zavisnosti svodimo na odgovarajuće probleme sa fuzzy formulama koje se rješavaju korištenjem principa rezolucije. Definisaćemo istinitosnu vrijednost atributa za datu šemu fuzzy relacione baze podataka, a zatim ćemo fuzzy zavisnostima pridružiti odgovarajuće fuzzy formule. Dokazujemo da ako vrijedi fuzzy višeznačna zavisnost, onda je njoj pridružena fuzzy



formula zadovoljiva i obrnuto. Takođe pokazujemo, ako iz skupa fuzzy zavisnosti slijede druge zavisnosti, onda iz skupa fuzzy formula koje im odgovaraju slijedi i zadovoljivost fuzzy formula koje odgovaraju tim drugim zavisnostima.

---

Jelena Čolić Oravec, Jovanka Pantović

Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Hajime Machida

Graduate School of Arts and Sciences, International Christian University,  
Tokyo, Japan

## ON SOME CLASSES OF MAXIMAL CLONES OF INCOMPLETELY SPECIFIED OPERATIONS

### Abstract

Incompletely specified operations (IS operations) are functions whose output values are specified for only some of the input values. Therefore we may say that an  $n$ -ary IS operation on  $E_k$ , just like  $n$ -ary partial operation, is a mapping from  $E_k^{(n)}$  to  $E_{k+1}$ . The distinction between these two concepts comes from the interpretation of the output value  $k$ . Namely, in the case of partial operations  $k$  is considered to be *undefined* value, whereas for IS operations  $k$  means that the value is *not specified*. Because of this difference, it is necessary to construct a composition which is more suitable for IS operations than the usual composition of partial operations, in a way that the value of the composition of IS operations  $f$  and  $g$  may be specified even if the values of  $f$  or  $g$  are not specified. This new composition yields a corresponding clone of incompletely specified operations (IS clone). In this paper we focus on maximal IS clones. It is known that on a two-element set there are eight maximal partial clones (Freivald) and nine maximal IS clones (Tarasov). On at least three-element set, the lattice of IS clones is neither isomorphic to the lattice of partial clones nor to the lattice of hyperclones. Nevertheless, there are certain properties that can be transferred, and in our paper we use this kind of reasoning to describe some classes of maximal clones of incompletely specified operations.

---

Dejan Ilić

Saobraćajni fakultet, Univerzitet u Beogradu, Srbija

**O RAZLAGANJU LINEARNO UREĐENIH STRUKTURA****Apstrakt**

Modelsko teoretska analiza linearnih uređenja razvijena je u knjizi Rozenštajna [1]. Na primer složenost prebrojivih linearnih uređenja meri se ordinalnim funkcijama, koje se nazivaju kondenzacioni rangovi. Definisaćemo novi kondenzacioni rang i pokazati njegove prednosti u odnosu na postojeće u analiziranju rasutih linearnih uređenja sa dodatnim predikatima. Podsetimo da je linearno uređenje rasuto ako ne sadrži kopiju uređenja racionalnih brojeva i da je diskretno ako svi elementi, osim možda prvog i poslednjeg, imaju neposrednog prethodnika i neposrednog sledbenika.

Neka je  $\mathbf{A} = (A, <)$  linearno uređenje. Definišimo:

$a \sim b$  ako i samo ako je interval  $[a, b]$  diskretno linearno uređen.

Relacija  $\sim$  je definabilna relacija ekvivalencije, a njene klase su konveksni skupovi. Količnički skup  $\delta(A)$  je linearno uređen, označimo to linearno uređenje sa  $\delta(\mathbf{A})$ . Ako je  $\mathbf{A}$  rasuto uređenje, onda je i  $\delta(\mathbf{A})$  rasuto. Kondenzacioni rang rasutih uređenja uvodimo indukcijom na sledeći način:

$d(\mathbf{A}) \geq 1$  ako  $|A| \geq 2$ ;

$d(\mathbf{A}) \geq \alpha + 1$  ako  $d(\delta(A)) \geq \alpha$ ;

$d(\mathbf{A}) \geq \alpha$  ( $\alpha$  granični) ako  $d(\mathbf{A}) \geq \beta$  za sve  $\beta < \alpha$ .

$d(\mathbf{A}) = \alpha$  ako je  $\alpha$  najveći ordinal takav da  $d(\mathbf{A}) \geq \alpha$ .

Ideja kondenzacije je da se problem složenosti strukture  $A$  razloži na dve komponente: složenost (pune indukovane) strukture na  $\delta(A)$  i složenost svake od klasa ponaosob. Situacija se komplikuje kada dozvolimo da  $A$  ima dodatnu strukturu. Tada uvodimo dodatnu pretpostavku, da je  $\text{Th}(\mathbf{A})$  mala teorija (ima prebrojivo mnogo tipova). Složenost klasa u tom slučaju je predmet rada [2]. Takođe važi:

**Theorem 2.** *Ako je  $(A, <, \dots)$  linearno uređena struktura sa malom teorijom tada je  $d(\mathbf{A}) < \omega$ .*

U [1] je dokazano da je u svakom linearnom uređenju  $\text{Th}(A, <)$  binarna teorija (svaka formula je ekvivalentna bulovskoj kombinaciji formula sa najviše dve slobodne promenljive). Prirodno je postaviti pitanje:

Problem: Da li će svaka linearno uređena struktura  $(A, <, \dots)$  sa malom teorijom imati binarnu teoriju?

[1] J. Rosenstein, *Linear orderings*, Academic Press, 1982.

[2] D. Ilić, *Simple types in discretely ordered structures*, Archive for Mathematical Logic (prihvaćen za štampu), 2014.

Slavko Moconja

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia

## ON QUASIMINIMAL GROUPS

### Abstract

An uncountable first order structure  $M$  is said to be quasiminimal if every definable (with parameters) subset of  $M$  is either countable or co-countable (its complement is countable). We are particularly interested in quasiminimal groups. It is known that quasiminimal group either is endowed (in a natural way) with pregeometry operation or it has a definable (with parameters) partial order with uncountable chains.

It is an open problem if there is a non-abelian quasiminimal group. If it exists, it is known that it is the union of its center and a single conjugacy class.

**Theorem 3.** *Every quasiminimal group having a 0-definable partial order with uncountable chains is abelian.*

Dušan Jokanović

University of East Sarajevo, Production and Management Faculty  
Trebinje

## SOME PROPERTIES OF SEMICOMMUTATIVE RINGS

### Abstract

Throughout this paper  $R$  denotes an associative ring with identity and  $\sigma$  denotes a nonzero non identity endomorphism of a given ring, unless

specified otherwise. Recall that a ring is reduced if it has no nonzero nilpotent elements. We used the term reversible to denote zero commutative ring. A generalization of a reversible ring is a semicommutative ring. A ring  $R$  is semicommutative if  $ab = 0$  implies  $aRb = 0$  for  $a, b \in R$ . We investigate relation between Armendariz and semicommutative rings. We also approach possibility of transferring semicommutativity property from the ring to some of his extensions.

Biljana Vujošević

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Srbija

## SISTEMI INKLUZIJA HILBERTOVIH MODULA

### Apstrakt

U ovom radu razmatra se uopštenje pojma sistema inkluzija Hilbertovih prostora. Poznato je da sistem inkluzija Hilbertovih prostora generiše sistem proizvoda Hilbertovih prostora i da postoji izomorfizam između jedinica sistema inkluzija i jedinica indukovanog sistema proizvoda.

Ovde se posmatra sistem inkluzija dvostranih Hilbertovih modula nad  $C^*$ -algebrom ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru. Dokazuje se da, ukoliko je Hilbertov prostor konačne dimenzije, postoji izomorfizam između jedinica sistema inkluzija dvostranih Hilbertovih  $C^*$ -modula i jedinica sistema proizvoda dvostranih Hilbertovih  $C^*$ -modula koji je generisan datim sistemom inkluzija.

Milovan Vinčić

Ekonomski fakultet, Univerzitet u Banja Luci

## MINIMALNI VARIJETETI INVOLUTIVNIH PRSTENA

### Apstrakt

Involutivni prsten je algebra  $\mathbf{A} = (A, +, -, \cdot, *)$  takva da je  $(A, +, -, \cdot)$  prsten, a  $*$  je unarna operacija koja zadovoljava identitete

$$(x + y)^* = x^* + y^*$$

$$(xy)^* = y^*x^*$$

$$(x^*)^* = x.$$

Klasa  $\nu$  istotipnih algebri signature  $\Omega$  naziva se varijetet (mногоstrukost) ako postoji skup  $\Sigma$  tako da se  $\nu$  sastoji samo od onih algebri na kojima su istiniti svi identiteti iz  $\Sigma$ . Varijetet se naziva minimalnim ako on sadrži nejediničnu algebru i nema pravih podvarijeteta.

U ovom radu se posmatraju minimalni identiteti involutivnih prstena.

Jelena Radović

University of East Sarajevo, Faculty of Philosophy

## FOURIER TRANSFORMS ON FINITE INVERSE SEMIGROUPS

### Abstract

Fourier transforms on groups have been thoroughly studied ([1], [2], [3]). However, an analogue theory of Fourier transforms on semigroups has not been developed until the recent works by M. Malandro ([4] and [5]). This paper presents some of the key results of this research. We introduce the definition of a Fourier transform on an arbitrary inverse semigroup, and extend some of the know theorems from the theory of Fourier transforms on symmetric groups. The paper also addresses the future problems which may arise in this area, namely the definition of Fourier transforms on a wider class of semigroups.

This is a joint paper with doc. dr Vladimir Vladičić.



**SEKCIJA ZA ANALIZU**

**SECTION FOR ANALYSIS**





---

Miodrag Mateljević

Dopisni član SANU, Matematički fakultet Beograd

**DISTORTION OF QUASIREGULAR MAPPINGS AND  
EQUIVALENT NORMS ON LIPSCHITZ-TYPE SPACE**

**Abstract**

As an application, we establish that Lipschitz-type properties are inherited by a quasiregular function from its modulu. We also prove some results of Hardy- Littlewood type for Lipschitz-type spaces in several dimensions, give the characterization of Lipschitz-type spaces for quasiquasiregular mappings by the average Jacobian and give a short review of the subject. In particular, we solve so called Dyakonov's problem.

---

Milenko Pikula

Filozofski fakultet Pale

Biljana Vojvodić

Ministarstvo nauke i tehnologije Republike Srpske

Nataša Pavlović

Elektrotehnički fakultet Istočno Sarajevo

**PRVI REGULARIZOVANI TRAG GRANIČNOG ZADATKA  
TIPA ŠTURM-LIUVILA SA DVA KONSTANTNA  
KAŠNJENJA**

**Apstrakt**

Neka je  $L(\tau, q_1, q_2)$  operator definisan sa

$$l(y) : -y''(x) + q_1(x)y(x - \tau_1) + q_2(x)y(x - \tau_2), \quad q_1, q_2 \in L_1[0, \pi]$$

$$y(x - \tau_1) \equiv 0, \quad x \in [0, \tau_1]$$

$$0 < \tau_2 < \dots < (x_0 - 1)\tau_2 < k_0\tau_2 = \tau_1 < \dots < (l_0k_0 - 1)\tau_2 < l_0\tau_1 =$$

$$= l_0 k_0 \tau_2 < \pi \leq (l_0 k_0 + 1) \tau_2, k_0, l_0 \in \mathbb{N}$$

$$y(\pi) = 0$$

i neka je  $Ly = \lambda y$ , ( $\lambda = z^2$ ) spektralni zadatak. Rad je posvećen konstrukciji rješenja  $y(x, z)$  na segmentu  $[0, \pi]$  i nalaženju asimptotskog razlaganja sopstvenih vrijednosti operatora  $L$ . Na kraju se nalazi prvi regularizovani trag operatora  $L$ , koji se koristi za rješavanje inverznog zadatka za ovaj operator.

Branko Sarić, Esad Jakupović  
Pan-European University Apeiron

## TOTALIZATION OF THE RIEMANN INTEGRAL

### Abstract

The aim of this note is to define the total value of the Riemann integral that can be used to generalize the well-known NewtonLeibniz formula.

Milenko Pikula  
Filozofski fakultet Pale

Ismet Kalčo  
Politehnički fakultet Univerziteta u Zenici

## OSOBINE KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE GRANIČNOG ZADATKA ZA OPERATOR $L$ SA LINEARNIM KAŠNJENJEM

### Apstrakt

U ovom radu bavimo se konstrukcijom karakteristične funkcije operatora  $L$  sa razdjeljenim uslovima:

$$-y''(x) + q(x)y(x - \tau(x)) = \lambda y(x)$$

$$y(x - \tau(x)) \equiv 0, x - \tau(x) < 0$$

$$y'(x - \tau(0)) - hy(0) = 0$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad h, H \in \mathbb{R}; \quad \tau(x) = \alpha(x) + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$$

Karakteristična funkcija determinisana je kašnjenjem  $\tau(x) = \alpha x + \beta$  koje je promjenjivo i zavisi od pozitivnih realnih brojeva  $\alpha$  i  $\beta$ .

Milenko Pikula

Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Filozofski fakultet Pale

Dragana Nedić

Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Saobraćajni fakultet Doboj

Vladimir Vladičić

Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Filozofski fakultet Pale

Olivera Marković

Univerzitet u Kragujevcu, Učiteljski fakultet Užice

## ODNOS ASIMPTOTIKE KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE I ASIMPTOTIKE NJENIH NULA ZA KLASIČNI OPERATOR TIPA ŠTURM-LIUVIDA

### Apstrakt

U radu se dokazuje stav o potrebnim i dovoljnim uslovima koje zadovoljava cijela funkcija eksponencijalnog tipa da bi bila karakteristična funkcija graničnog zadatka datog sa

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad z^2 = \lambda \in \mathbb{C}, \quad q \in L_2[0, \pi]$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad h \in \mathbb{C}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad H \in \mathbb{C}.$$

Ovaj operator je izučen u radovima Geljfanda, Levitana, Borga, Krejna, Marčenka drugim metodama.

---

Zoran Mitrović

Faculty of Electrical Engineering, University of Banja Luka

**THE REMARKS ON BEST AND COUPLED BEST  
APPROXIMATIONS**

**Abstract**

In this paper we obtain a best approximations theorem for set-valued maps in complete metric spaces. We are using the generalization of the Theorem of Ky Fan and the results of Horvath who used Kuratowski's measure of non-compactness. Also we derive the results on coupled coincidence points and coupled fixed points, which were introduced by Lakshmikantham, Ćirić and Amini-Harandi.

---

Ivan Arandjelović

Mašinski fakultet Beograd

Hranislav Milošević

Prirodno-matematički fakultet Kosovska Mitrovica

Dojčin Petković

Prirodno-matematički fakultet Kosovska Mitrovica

**KONVERGENCIJA RACIONALNIH FUNKCIJA SA  
PRIMENOM NA NEKE OD KLASA FUNKCIJA**

**Apstrakt**

U mnogim oblastima savremene nauke i tehnike sve češće se dolazi do matematičkih zadataka čija se tačna rešenja ne mogu dobiti klasičnim matematičkim metodama ili se pak mogu dobiti, ali su pri tom toliko komplikovana da se praktično ne mogu upotrebiti. Broj takvih zadataka je porastao. Naročito u poslednje vreme zbog velikog i brzog razvoja nauke i tehnike. Prirodno je što se, zbog toga, postavio problem izgradnje efikasnih metoda za nalaženje približnih rešenja takvih zadataka. S

druge strane zbog velikog napretka u nauci i tehnici omogućili su konstruisanje novih, izvanrednih sredstava za računanje. Zbog toga su se postavili zadaci upoređivanja, revidiranja i sistematizacije već postojećih i izgradnje novih metoda radi efikasnog korišćenja tih sredstava. Navedeni razlozi su doveli do nastanka jedne posebne oblasti matematike, čiji je zadatak razrada metoda koje dovode do brojeanih rezultata, rešenja, različitih zadataka analize, algebre, verovatnoće, statistike, geometrije itd. U ovom radu biće prikazana jedna od takvih metoda za rešavanje problema konvergencije racionalnih aproksimacija, i njihova primena na neke od klasa funkcija.

Fikret Vajzović, Amina Šahović, Sead Peco

Univerzitet "Džemal Bijedić" Mostar, BiH

## **ERGODIČKE TEOREME ZA KOSINUSNE OPERATORSKE FUNKCIJE**

### **Apstrakt**

Dokazane su tri ergodičke teoreme kojima je data veza između operatora koji se pojavljuju u ergodičkim limesima i pozitivnog kvadratnog korijena iz infinitezimalnog generatora ograničene jako neprekidne kosinusne operatorske funkcije u kompleksnom Banach-ovom prostoru i na jednoj užoj klasi Banach-ovih prostora.

Jovana Đuretić

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia

## **PIUNIKHIN–SALAMON–SCHWARZ ISOMORPHISMS AND SYMPLECTIC INVARIANTS OBTAINED USING COBORDISMS OF MODULI SPACES**

### **Abstract**

We give a brief survey of results considering the Piunikhin–Salamon–Schwarz isomorphism in Lagrangian Floer homology groups generated by Hamiltonian orbits starting at the zero section and ending at the conormal

bundle. We discuss the PSS isomorphism in Lagrangian Floer homology groups for the open subset. Also we discuss some properties of the absolute and relative spectral invariants.

---

Elmir Čatrnja

Univerzitet "Džemal Bijedić" Mostar

Milenko Pikula

Filozofski fakultet Pale

**RJEŠAVANJE STURM-LIOUVILLOVOG PROBLEMA SA  
KONSTANTNIM KAŠNENJEM METODOM  
UPUCAVANJA**

**Apstrakt**

Metoda upucavanja se već dugu niz koristi za numeričko rješavanje diferencijalnih jednačina, kao i za rješavanje Sturm-Liouvilleovog problema. Međutim, kod klasičnog Sturm-Liouvilleovog problema, sve svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije su realne, dok se kod Sturm-Liouvilleovog problema sa kašnjenjem, pored realnih svojstvenih vrijednosti pojavljuju i kompleksne svojstvene vrijednosti, a samim time i kompleksne svojstvene funkcije. U ovom radu proširujemo primjenu ove metode na određivanje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih funkcija (kako realnih, tako i kompleksnih) Sturm-Liouvilleove jednačine sa konstantnim kašnjenjem pri graničnim uslovima Dirichletovog tipa.

---

Šefket Arslanagić

Prirodno-matematički fakultet Sarajevo

**ZNAČAJ METODE POMOĆNE NEJEDNAKOSTI ZA  
DOKAZIVANJE RAZNIH NEJEDNAKOSTI**

**Apstrakt**

U ovom radu je dat dokaz jedne zanimljive algebarske nejednakosti od tri promjenljive. Za njen dokaz se koristi jedna pomoćna nejednakost koju

smo konstruisali uz detaljno objašnjene kako smo to uradili. Poslije dokaza date nejednakosti, data je i njena generalizacija kao i njen dokaz.

Riječ je o sljedećoj nejednakosti

$$\frac{x^2}{x^2 + y + z} + \frac{y^2}{y^2 + z + x} + \frac{z^2}{z^2 + x + y} \geq \frac{1}{7},$$

gdje su  $x, y, z$  realni pozitivni brojevi čija je suma jednaka 1, tj.  $x + y + z = 1$ .

Vladimir Vladičić

Faculty of Philosophy, University East Sarajevo

Nebojša K. Elez

Faculty of Philosophy, University East Sarajevo

## INEQUALITIES AND RAPIDLY VARYING FUNCTIONS

### Abstract

A measurable function  $f : [a, \infty) \mapsto (0, \infty)$ ,  $a > 0$  is called **regularly varying** in the sense of Karamata if for some  $\alpha \in R$  it satisfies

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\alpha$$

for every  $\lambda > 0$ , and we denote  $f \in R_\alpha$ . Class  $R_\alpha$  were introduced by J.Karamata [5] in 1930.

A measurable function  $f : [a, \infty) \mapsto (0, \infty)$ , ( $a > 0$ ) is called **rapidly varying** in the sense of de Haan with the index of variability  $\infty$  if it satisfies

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \infty$$

for every  $\lambda > 1$ . This functional class is denoted by  $R_\infty$  (see e.g. [1]).

Example: If  $f(x) = x^{r(x)}$ ,  $r(x) \rightarrow \infty$ , and  $r$  is nondecreasing function then  $f \in R_\infty$ .

In this paper we study properties of regularly and rapidly varying functions. The important properties of this class that are related to classical

inequalities will be proved. The properties of rapidly varying functions that are related to integral sums will be proved, also.

---

Jovana Đuretić, Jelena Katić and Darko Milinković  
Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia

**HOFER'S GEOMETRY FOR LAGRANGIAN  
SUBMANIFOLDS AND HAMILTONIAN  
DIFFEOMORPHISMS**

**Abstract**

We give a brief survey of results and problems considering the relation between Hofer's distance for Hamiltonian diffeomorphisms, and Lagrangian submanifolds, as well as the role of quasi - autonomous Hamiltonians in the description of geodesics. Besides, we discuss quasi - autonomous Hamiltonians in relation to Hofer's geometry of Hamiltonian diffeomorphisms group within the ambient space of Lagrangian submanifolds.

---

Vesna Mišić

University of East Sarajevo - Faculty of Transport and Traffic Engineering  
Vojvode Mišića 52, 53000 Doboј, Bosnia and Herzegovina

Ivan D. Arandjelović

University of Belgrade - Faculty of Mechanical Engineering  
Kraljice Marije 16, 11000 Beograd, Serbia

**ON A FIXED POINT THEOREM OF REZAPOUR AND  
HAMLBARANI**

**Abstract**

In this talk (paper) we present one fixed point theorem with operator contractive condition which generalize earlier result obtained by Sh. Reza-pour and R. Hamlbarani.



---

Milenko Pikula

Filozofski fakultet Pale

Elmir Čatrnja

Pedagoški fakultet, Univerzitet "Džemal Bijedić" Mostar

Esad Jakupović

Panevropski fakultet "Apeiron" Banja Luka

A. Šarić

Srednjoškolski centar Mostar

## KONSTRUKCIJA VEKTORSKE FUNKCIJE $\vec{w} = (q, \alpha)$ POMOĆU DVA DATA NIZA SOPSTVENIH VRIJEDNOSTI

### Apstrakt

Osnovni rezultat ovog rada može se izraziti sledećom teoremom:

**Teorema:** Ako su  $\lambda_{nj}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $j = 1, 2$  nizovi sopstvenih vrijednosti graničnog zadatka

$$-y''(x) + q(x)y(\lambda(x)) = \lambda y(x)$$

sa graničnim uslovima  $y(0) = y(\pi) = 0$  i  $y'(0) = y'(\pi) = 0$  redom pri  $q \in L_2[0, \pi]$ ,  $0 < \lambda'(x) < 1$ ,  $\lambda \in C^1[0, \pi]$  tada je dvodimenzionalni vektor  $\vec{w} = (q, \alpha)$  jednoznačno definisan.

---

Jelena Vujaković

University of Pristina, Faculty of Sciences and Mathematics

## WEAKLY COMPATIBLE MAPPINGS IN MENGER SPACES AND FIXED POINT RESULTS

### Abstract

It is well known that the class of fuzzy metric spaces in the sense of Kramosil and Michalek is "equivalent" to the class of Menger spaces having a continuous  $t$ -norm. In this paper is prove common fixed point theorems for two pairs weakly compatible mappings in Menger spaces. Some

illustrative examples are given to demonstrate the validity of main results.

---

Miljan Knežević

Matematički fakultet Beograd

**BI-LIPSCHITZ PROPERTIES OF HARMONIC  
QUASICONFORMAL MAPPINGS**

**Abstract**

By considering the properties of hyperbolic metrics we will give some characterizations of harmonic quasiconformal mappings. Also, we will give few interested inequalities of Schwarz-Pick type for harmonic quasiconformal mappings.

**SEKCIJA ZA PRIMIJENJENU MATEMATIKU**

**SECTION FOR APPLIED MATHEMATICS**



Milan Tuba

Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Fakultet za kompjuterske  
nauke Megatrend Univerziteta

## SWARM INTELLIGENCE ALGORITHMS FOR JPEG QUANTIZATION TABLE SELECTION

### Abstract

JPEG algorithm is the prevailing digital image compression method. It is a lossy compression algorithm that facilitated digital image revolution during the last decade. The degree of compression can be decided by selecting appropriate quantization matrix. JPEG standard contains recommended quantization matrix which was determined empirically, mostly with the purpose to make compressed image "look good" to human observer. However, for many important applications like medical images analysis (usually from alternative imaging sources like ultrasound or x-ray) or biometrics (iris, fingerprint or face recognition), recommended quantization matrix is not appropriate since measure of the image compression quality is determined by successfulness of the corresponding software application and not by the subjective human opinion. Moreover, there is not a single best quantization matrix for all applications, not even for one application; one matrix may be good for x-ray images from one device, the other may be more appropriate for x-ray images originating from different x-ray device. Selecting optimal quantization matrix is an exponential combinatorial problem with extremely complex objective function. Nondeterministic metaheuristics are appropriate tool for such optimization problems and this lecture will show some successful applications of swarm intelligence algorithms to quantization matrix selection using appropriate image similarity measure.

---

Bernardo de la Calle Ysern

Department of Applied Mathematics, Polytechnic University of Madrid  
ETS de Ingenieros Industriales, José Gutiérrez Abascal 2, 28006 Madrid,  
Spain

## MODIFIED GAUSS-KRONROD QUADRATURES

### Abstract

Gauss-Kronrod quadrature rules were introduced in the sixties to calculate in an optimal way an approximation of the integral and an estimate of the error committed. When they exist, Gauss-Kronrod rules can be computed efficiently and are used in packages for automatic integration. However, very few classes of weight functions are known for which the corresponding Gauss-Kronrod rules are proved to exist. So, several authors have proposed to relax the requirements of the Gaussian extension so that the resulting suboptimal rules show good properties, like having simple nodes on the interval of integration and positive quadrature weights.

Though there is numerical evidence supporting this approach, no theoretical results are available until now.

In this work, we introduce modified Stieltjes polynomials to construct suboptimal extensions of the Gaussian rules with one or two degrees less of polynomial exactness than the corresponding Kronrod extensions. We prove that, for a wide class of weight functions and sufficiently large number of nodes, the extended quadratures have positive weights and simple nodes on the interval of integration. The class of weight functions considered complements those for which the Gauss-Kronrod rule is known to exist.

This is a joint work with Prof. Miodrag M. Spalević.

---

Aleksandar Pejčev, Miodrag Spalević

Faculty of Mechanical Engineering

## QUADRATURE FORMULAS FOR THE FOURIER-Chebyshev COEFFICIENTS

### Abstract

We consider the well known Micchelli-Rivlin quadrature formula, of highest algebraic degree of precision, for the Fourier-Chebyshev coefficients. For analytic functions the remainder term of this quadrature formula can be represented as a contour integral with a complex kernel. We study the kernel, on elliptic contours with foci at the points  $\mp 1$  and a sum of semi-axes  $\rho > 1$ , for the quoted quadrature formula. Starting from the explicit expression of the kernel, we determine the locations on the ellipses where maximum modulus of the kernel is attained. So we derive effective  $L^\infty$ -error bounds for this quadrature formula. Complex-variable methods are used to obtain expansions of the error in the Micchelli-Rivlin quadrature formula over the interval  $[-1, 1]$ . Finally, effective  $L^1$ -error bounds are also derived for this quadrature formula.

---

Miroslav Pranić

University of Banja Luka, Faculty of Sciences

## RATIONAL GAUSS QUADRATURE

### Abstract

The  $n$ -point mechanical quadratures which are exact in the  $2n$ -dimensional space of rational functions (with preassigned poles) are considered. The basic idea is to stay as close as possible to the ideas behind well-known Golub-Welsch algorithm.

---

Žana Kovijanić Vukićević, Goran Popivoda, Vladimir Božović  
Faculty of Sciences Podgorica

## EXTREMAL VALUES OF CERTAIN TOPOLOGICAL INDICES OVER SOME SPECIAL CLASSES OF GRAPHS

### Abstract

In this paper we give an overview of following problems: maximal values of Zagreb indices over chemical trees, minimal values of Zagreb coindices over chemical trees, and minimal value of detour index over connected bicyclic graphs. Corresponding extremal graphs are also presented.

---

Miodrag Spalević

University of Beograd, Faculty of Mechanical Engineering

## ERROR ESTIMATES OF GAUSS-TURÁN QUADRATURES

### Abstract

A survey of our recent results on the error of Gauss-Turán quadrature formulae for functions which are analytic on a neighborhood of the set of integration is given. In particular, a computable upper bound of the error is presented which is valid for arbitrary weight functions. A comparison is made with the exact error and number of numerical examples, for arbitrary weight functions, are given which show the advantages of using such rules as well as the sharpness of the error bound. Asymptotic error estimates when the number of nodes in the quadrature increases are presented. A couple of numerical examples are included.



---

Gradimir V. Milovanović

Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts,  
Belgrade

## NONSTANDARD QUADRATURES OF GAUSSIAN TYPE

### Abstract

Let  $\mathcal{D}\mu$  be a finite positive Borel measure on the real line such that its support is an infinite set, and all its moments  $\mu_k = \int_{\mathbb{R}} x^k \mathcal{D}\mu(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , exist and are finite. Let  $\mathcal{P}$  be the space of real polynomials and  $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$  be the space of polynomials of degree at most  $n$ .

The  $n$ -point quadrature formula

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{D}\mu(x) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + R_n(f), \quad (1)$$

which is exact on the set  $\mathcal{P}_{2n-1}$ , i.e.,  $R_n(\mathcal{P}_{2n-1}) = 0$ , is known as the Gauss quadrature formula. His famous method of approximate integration, Gauss discovered for the Legendre measure  $d\mu(t) = dt$  on  $[-1, 1]$  in 1814, and he obtained values of quadrature parameters, the nodes  $x_k$  and the weights  $w_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , by solving nonlinear systems of equations for  $n \leq 7$ . Computationally, today there are very stable methods for generating Gaussian rules. The most popular of them is one due to Golub and Welsch, which is based on determining the eigenvalues and the first components of the eigenvectors of a symmetric tridiagonal Jacobi matrix, with elements formed from the coefficients in the three-term recurrence relation for the monic polynomials orthogonal with respect to the inner product  $(f, g) = (f, g)_{\mathcal{D}\mu} = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) \mathcal{D}\mu(x)$  ( $f, g \in L^2(\mathcal{D}\mu)$ ). The Gaussian quadrature formulae were generalized in several ways.

In this lecture we present two kinds of the so-called nonstandard Gaussian quadrature formulae, which have been recently developed. If the information data  $\{f(x_k)\}_{k=1}^n$  in the standard quadrature (1) are replaced by  $\{(\mathcal{A}^{h_k} f)(x_k)\}_{k=1}^n$ , where  $\mathcal{A}^h$  is an extension of some linear operator  $\mathcal{A}^h : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $h \geq 0$ , we get a non-standard quadrature formula

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{D}\mu(x) = \sum_{k=1}^n w_k (\mathcal{A}^{h_k} f)(x_k) + R_n(f). \quad (2)$$

Beside the theoretical results on existence, uniqueness and several properties of such kind of Gaussian quadratures (based on operator values), Milovanović & Cvetković have proposed a stable algorithm for their numerical construction. Also, some special classes of linear operators have been analyzed, e.g.,

$$(\mathcal{A}^h f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \mathcal{D}t, \quad (\mathcal{A}^h f)(x) = \sum_{k=0}^m \frac{b_k h^k}{k!} \mathcal{D}^k f(x),$$

$$(\mathcal{A}^h f)(x) = \sum_{k=-m}^m a_k f(x + kh), \quad (\mathcal{A}^h f)(x) = \sum_{k=-m}^{m-1} a_k f\left(x + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right),$$

for which several interesting explicit results connected with theory of orthogonal polynomials have been obtained. The first case, with the the *average operator* (operator of Steklov), is connected with the so-called *interval quadratures*, which have been also recently studied.

The second approach is related with quadratures for integrals of the form  $I(f) = \int_{\mathbb{R}} (Lf)(x) \mathcal{D}\mu(x)$ , where  $L$  is a linear operator acting between certain functional spaces. In a recent joint paper with S. Esmaili, a family of nonstandard Gauss-Lobatto quadratures for numerical calculating integrals of the form  $\int_{-1}^1 f'(x)(1-x)^\alpha \mathcal{D}x$ ,  $\alpha > -1$ , has been derived and applied to approximation of fractional derivatives of Riemann-Liouville and Caputo type.

In this lecture we devote a special attention to an important case of the Gauss-Lobatto type with  $(Lf)(x) = \alpha f(x) + (1+x)f'(x)$ ,  $\alpha > 0$ ,

$$\int_{-1}^1 (Lf)(x)w(x) \mathcal{D}x = A_0 f(-1) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + A_{n+1} f(1) + R_n(f),$$

where  $R_n$  is the remainder term such that  $R_n(\mathcal{P}_{2n+1}) = 0$ . Under some conditions on the moment sequence  $\{\mu_\nu\}_{\nu \geq 0}$  we prove that such quadratures exist for each  $n \in \mathbb{N}$ . The nodes  $x_k$  are real and lie in  $(-1, 1)$  and the weights  $A_k$  can be expressed in terms of the corresponding Christoffel numbers of an equivalent Gauss-Christoffel quadrature formula. Special cases and applications are also analyzed. A software implementation of these quadratures was done by the recent MATHEMATICA package `OrthogonalPolynomials`, which is downloadable from the Web Site: <http://www.mi.sanu.ac.rs/~gvm/>. Several numerical examples are presented and they show the effectiveness of the proposed approach.

---

Hranislav Milošević

University of Pristina, Kosovska Mitrovica, Serbia

Sonia A. Beisel, Alexandar D. Rychkov

Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

Alexandar D. Rychkov

Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia

**MODELING OF TSUNAMI RUN UP USING OF LARGE  
PARTICLES OF SHALLOW WATER THEORY ON THE  
SHORE AREA**

**Abstract**

The work presents an approach to 2-D modeling of tsunami waves runup on the coast based on the use of large-particle method for calculating zones of the waves runup on the shore area to shore effect. Computational algorithm is based on the classical equations of shallow water theory. The results of the verification of the numerical algorithm and validation of the mathematical model on two-dimensional problems are presented. The opportunities of the methodology are demonstrated by the calculation of the wave runup on the coast of some regions of Japan during the 2011 Tohoku tsunami, on the Russian coast.

---

Željko Pržulj

Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu, Institut za  
nuklearne nauke Vinča, Univerzitet u Beogradu

Zoran Ljuboje

Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu

Zoran Ivić

Institut za nuklearne nauke Vinča, Univerzitet u Beogradu

## **SOLITONSKI MODEL TRANSPORTA ENERGIJE I NAELEKTRISANJA U MOLEKULSKIM LANCIMA**

### **Apstrakt**

Mnogi idealizovani modeli koji se uspješno koriste u fizici kondenzovane materije zasnovani su na harmonijskoj aproksimaciji. U okviru ove aproksimacije uvode se kolektivna pobuđenja koja opisuju istovremeno samosaglasno kretanje velikog broja čestica i koja se mogu posmatrati kao idealni gas kvazičestica (fononi, eksitoni, magnoni...). Interakcija između različitih kvazičestica dovodi nelinearnosti dinamičkih jednačina koje opisuju evoluciju određenog sistema. Ovakvi problemi se rješavaju različitim perturbacionim metodama.

Tokom vremena izdvojili su se problemi koji se nisu mogli objasniti u okviru pomenutog koncepta linearnih pobuđenja. Karakteristični primjeri su domenski zidovi u magneticima i feroelektricima, vorteksi u superprovodnicima, polaroni i drugi. U svim ovim slučajevima se radi o suštinski nelinearnim pojavama, za čiji opis je trebalo razviti nove metode. Iako se radi o pojavama različite fizičke prirode, njihov teorijski opis bilo je moguće svesti na mali broj modela, gdje se evolucija sistema opisuje nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama [1]. Partikularna rješenja ovih jednačina su nelinearni, ujedineni talasi solitoni. Najvažnije nelinearne jednačine koje dovode do solitonskih rješenja su: Kortevog-de Fris, sinus-Gordonova i nelinearna Šredingerova.

Nastanak solitona vezan je za spontano narušenje simetrije homogenog sistema, odnosno sa autolokalizacijom energije pobuđenja, gustine naelektrisanja ili drugih fizičkih veličina. Bitna osobina solitona je da se kreću

u kompaktnoj formi, zadržavajući oblik obvojnice i dimenzije proizvoljno dugo. Solitoni nastaju kao posljedica balansa suprotnih fizičkih težnji: disperzije koja nastoji da raširi talasni paket i nelinearnosti koja teži da formira udarni talasni front.

Davidov i saradnici su predložili novi model lokalizacije i transporta vibracione energije i naelektrisanja u molekulskim lancima [2]. U osnovi ove teorije je ideja da se elektroni, protoni, unutarmolekulska pobuđenja i drugo, mogu biti zahvaćeni lokalnom deformacijom rešetke, sa kojom grade vezano stanje koje se prostire kroz sistem u obliku solitona. U osnovi solitonskog mehanizma je efekat autolokalizacije.

U ovom radu, u okviru teorije koja objedinjuje vremenski zavisani varijacioni metod, odnosno Davidovljeve teorije i dressing metod [3], analiziraćemo egzistenciju različitih tipova autolokalizovanih stanja u molekulskim lancima. Razmotrena su dva tipa interakcije kvazičestica, sa akustičnim i sa optičkim fononima. Ova stanja, polaroni i solitoni, su klasifikovana i određeni su uslovi njihove egzistencije u zavisnosti od osnovnih parametara sistema. Na osnovu dobijenih rezultata razmotrena je relevantnost solitonskog modela transporta energije i naelektrisanja u spiralnim bje-lančevinama.

Dalibor Čevizović, Željko Pržulj, Zoran Ivić

Institut za nuklearne nauke Vinča, Univerzitet u Beogradu, Laboratorija  
za teorijsku fiziku i fiziku kondenzovane materije, Beograd, Srbija

**PRIMENA VARIJACIONOG METODA NA ODREĐIVANJE  
STATISTIČKI NAJPOVOLJNIJIH KVANTNIH STANJA  
EKSTACIJA KOD PROTEINSKIH  
MAKROMOLEKULARNIH LANACA**

**Apstrakt**

Određivanje statistički najpovoljnijih stanja kvantnih čestica u kristalnim i kvazikristalnim strukturama koje se nalaze na konačnim temperaturama veoma je složen problem. On se obično rešava izborom varijacione funkcije i određivanjem varijacionih parametara koji moraju odgovarati minimalnoj vrednosti Helmholtzove slobodne energije posmatranog sistema. Ovakve procedure mogu biti veoma složene i zahtevati velike

računarske resurse. Složenost procedure je uslovljena složenošću hamiltonijana ovakvih sistema, posebno u slučaju kad se ne mogu zanemariti interakcije među podsistemima. Tada je i samo izračunavanje Helmholtzove slobodne energije zahtevan posao. U ovakvim slučajevima obično se pribegava nekoj aproksimativnoj metodi. U mnogim slučajevima, varijacioni metod zasnovan na primeni Bogoljubovljeve nejednakosti u znatnoj meri može pomoći pri proceni gornje granice Helmholtzove slobodne energije. Ovakav metod u literaturi se obično naziva Bogoljubovljev varijacioni metod.

U radu su razmotrene osobine vibracionih pobuđenja u makromolekularnim lancima i njihova zavisnost od fizičkih parametara makromolekula kao i temperature okruženja. U obzir je uzeta interakcija vibrona sa termalnim oscilacijama makromolekula. Primenjen je varijacioni metod zasnovan na korišćenju modifikovane unitarne transformacije Langa i Firsova, a statistički najpovoljnija stanja vibrona su procenjena iz gornje granicne vrednosti Helmholtzove slobodne energije, primenom Bogoljubovljeve nejednakosti.

Analizom dobijenih rezultata uočeno je da za pojedine vrednosti parametara strukture, kao i za određene vrednosti temperature okruženja postoji nagla promena fizičkih osobina vibronskih stanja: u početku slabo lokalizovani, praktično slobodni vibroni, bivaju zahvaćeni u okolini nekog strukturnog elementa makromolekularnog lanca. Procenjena je zavisnost kritičnih vrednosti parametara strukture od temperature. Dobijeni rezultati potvrđuju ranija opažanja dvojnosti prirode vibrona u ovakvim strukturama, dobijena složenim numeričkim procedurama.

---

Vidan Govedarica

Elektrotehnički fakultet Istočno Sarajevo

Tatjana Mirković

Prirodno-matematički fakultet Kosovska Mitrovica

## NEKE JEDNAKOSTI I NEJEDNAKOSTI SOPSTVENIH VREDNOSTI GRAFOVA

### Apstrakt

U radu su dokazane jednakosti i nejednakosti za sopstvene vrednosti datog grafa  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n > 1$ ,  $|E| = m > 1$ , Opialovog i Wirtingerovog tipa.

Spektralna teorija grafova se veoma često primenjuje u rešavanju mnogih problema u računarskim naukama, numeričkoj matematici, fizici, biologiji, kao i u mnogim drugim naučnim i tehničkim disciplinama. U ovom radu se stavlja akcenat na njenu primenu u hemiji. Hemijski sastavi se predstavljaju empirijskim i strukturalnim formulama. Strukturalne formule se mogu predstaviti pomoću grafova, pri čemu se atomi predstavljaju čvorovima, a hemijske veze granama grafa. U izučavanju materijala i legura spektralna teorija grafova igra nezaobilaznu i osnovnu ulogu. Naročito se primenjuje u slučajevima kada novi materijali i legure treba da se sintetišu sa unapred definisanim karakteristikama.

Glavni zadatak spektralne teorije grafova je nalaženje spektra, tj sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora datog grafa, kao i određivanje karakterističnog i minimalnog polinoma. Nijedan od ovih zadataka, u opštem slučaju nije lak, a veoma retko se mogu naći rešenja u zatvorenom obliku. Zbog toga se, prilikom izračunavanja sopstvenih vrednosti, odnosno nula odgovarajućeg karakterističnog polinoma, često koriste numeričke metode. Takođe, veoma značajnu ulogu igraju nejednakosti, koje sadrže sopstvene vrednosti ili karakteristične polinome. U ovom radu smo izložili jednakosti i nejednakosti, posebno one diskretne Opialovog i Wirtingerovog tipa (videti na primer [1,3]). Razlog leži u činjenici da se one mogu transformisati u nejednakosti za sopstvene vrednosti grafova.

---

Bogdana Stanojević

Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts

Milan Stanojević

University of Belgrade, Faculty of Organizational Sciences

**GENERATION OF THE NON-DOMINATED SET FOR  
BI-OBJECTIVE LINEAR FRACTIONAL PROGRAMS –  
CONJECTURAL CONCLUSIONS**

**Abstract**

The aim of this work is to give an idea about how the non-dominated set of a bi-objective linear fractional program may be generated by using the solutions to certain linear programming problems. We transpose the classic idea of weighting objectives to the idea of weighting marginal solutions, thus avoiding the complexity that comes from the optimization of a nonlinear objective function. Both continuous and discrete cases are addressed. We report the computational results obtained by solving random generated instances and practical applications.

---

Petar D. Mandić, Mihailo P. Lazarević

Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade

Tomislav B. Šekara

Faculty of Electrical Engineering, University of Belgrade

**AN ALGORITHM FOR STABILIZATION OF LINEAR  
CONTROL SYSTEMS USING FRACTIONAL ORDER PID  
CONTROLLERS**

**Abstract**

In recent years, considerable attention has been paid to linear control systems whose processes or controllers are of fractional-order. This is mainly due to the fact that many real physical systems are well characterized by fractional-order differential equations, i.e., equations involving noninteger-order derivatives. On the other side, the PID controller



is unquestionably the most commonly used control algorithm in the control industry, because of its relatively simple structure that can be easily understood and implemented. Therefore, to enhance the robustness and performance of linear PID control systems, a generalization of the PID controller, namely  $PI^\lambda D^\mu$  controller, is introduced. It includes an integrator of order  $\lambda$  and differentiator of order  $\mu$ , where the orders  $\lambda$  and  $\mu$  may assume real noninteger values. It has been shown that the  $PI^\lambda D^\mu$  controller, which has extra degrees of freedom introduced by  $\lambda$  and  $\mu$ , provides a better response than the integer-order PID controllers. The problem of asymptotic stability is one of the basic requirements in control systems, and here it is solved using the  $D$  decomposition approach. In this paper, the  $D$ -decomposition method is generalized for the case of fractional-order  $PI^\lambda D^\mu$  controllers. Simple and efficient computational methods for determining stability regions in parameter space of a linear fractional order controller are presented. Some comparisons of fractional and integer order PID controllers are given based on simulation results.

---

Zoran Ljuboje, Željko Pržulj, Ognjen Bjelica

Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Elektrotehnički fakultet, Istočno  
Sarajevo

## PRIMJENA NUMERIČKIH METODA PRI RJEŠAVANJU NEKIH PROBLEMA U FOTOREFRAKTIVNOJ OPTICI

### Apstrakt

Mnogi procesi u fizici opisuju se diferencijalnim jednačinama. U nekim situacijama te jednačine je teško ili nemoguće riješiti analitički pa se tada pri rješavanju koriste numeričke metode. Numerička metoda koju primjenjujemo može nam dati pogrešna rješenja. U nekim situacijama u rješenjima se mogu pojaviti numeričke nestabilnosti ili naša metoda može voditi do tzv. numeričkog haosa. U radu će biti analiziran primjer rješavanja diferencijalne jednačine i biće pokazano kako različite numeričke metode daju različita, pa i pogrešna rješenja, iako se jednačina može riješiti analitički. Na ovom primjeru pokazaće se koja metoda daje najtačnija rješenja. Nakon toga biće analizirani primjeri iz oblasti nelinearne optike, konkretno biće

analizirani neki aspekti fotorefraktivnog efekta. Ovaj efekat se javlja pri interakciji laserske svjetlosti sa nekim kristalima pri čemu dolazi do peri-odične promjene indeksa prelamanja date optičke sredine. U ovoj situaciji formira se difrakciona rešetka u kristalu na kojoj se mogu rasijavati dodatni upadni zraci.

Fotorefraktivni efekat je opisan diferencijalnim jednačinama koje se teško mogu rješavati analitički pa se rješavaju numeričkim metodama. U rješenjima se pojavljuju numeričke nestabilnosti za koje je potrebno ustanoviti da li imaju eksperimentalnu potvrdu.

---

Tamara Bojičić

Elektrotehnički fakultet Podgorica

Vesna Popović-Bugarin

Elektrotehnički fakultet Podgorica

**UTICAJ PERIODA AKTIVACIJE UREĐAJA NA  
UPRAVLJANJE OPTEREĆENJEM  
ELEKTRODISTRIBUTIVNE MREŽE PRIMJENOM  
RAZLIČITIH KRITERIJUMA MINIMIZACIJE**

**Apstrakt**

Cilj algoritama za upravljanje opterećenjem elektrodistributivne mreže jeste smanjenje iznosa koji potrošači plaćaju za utrošenu električnu energiju, ali i povećanje stabilnosti elektrodistributivne mreže u smislu smanjenja odnosa maksimalnog i srednjeg nivoa opterećenja mreže u toku 24h. Sa ovakvim algoritmima koji obezbjeđuju postizanje pomenutih performansi potrošači bi trebali biti upoznati, ali i podstaknuti na njihovo korišćenje. Kako bi to bilo ostvarljivo u radu je analizirana mogućnost primjene ovih optimizacionih algoritama uz korišćenje aktualne (linearne) funkcije cijene, a predloženi su i načini njene modifikacije uz što manje izmjene iste. Predložena je i promjena perioda aktivacije uređaja (onih sa kliznim vremenom aktivacije kao što su: mašina za veš, mašina za suđe itd.) iz vremena više u vrijeme niže tarife, a sve u cilju što boljih performansi algoritma za optimizaciju i simuliranja realne situacije u praksi. Dobi-jeni rezultati predstavljaju značajan oslonac za primjenu optimizacionih

algoritama u praksi, kao i motivaciju za rad na njihovom unapređivanju i prilagoavanju potrošačima, što bi moglo predstavljati značajan pomak u razvoju savremenih tokova tehnologije. Rezultati simulacija pokazuju da bi domaćinstva, poštujući sate više i niže tarife, primjenom predloženog algoritma ostvarila značajna smanjenja iznosa koji plaćaju za električnu energiju uz istovremeno smanjenje odnosa maksimalnog i srednjeg opterećenja mreže, čime se obezbjeđuje njena stabilnost.

Milan Dotlić

Institute Jaroslav Černi for the Development of Water Resources,  
Belgrade, Serbia

Mladen Ignjatović

Faculty of Technology, Zvornik, University of East Sarajevo, Bosnia and  
Herzegovina

Aleksandar Jović

Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia

## NUMERICAL SOLUTIONS TO LOVE'S INTEGRAL EQUATION

### Abstract

The electrostatical potential in the space, generated by a condenser consisting of two parallel equal circular plates is described with integral equation of the second kind, known as Love's integral equation

$$f(y) \pm \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d}{(x-y)^2 + d^2} f(x) dx = 1, \quad |y| \leq 1, d \geq 0, d \in \mathbb{R}.$$

In the fluid dynamics this equation describes small-amplitude vertical oscillations of a thin rigid plate beneath the free surface of deep water.

Numerical difficulties arise in approximating solution  $f$  as the parameter  $d$  decreases.

We present several numerical algorithms to solve the Love's Integral equation. The first one represents the unknown function  $f$  in basis of Boubaker polynomials. This method gives poor results if the parameter

$d \ll 1$ . Method based on dividing integrational domain and using the change of variables, gives better results when  $d \ll 1$ , but it is computational cost. For Love's equation with negative sign and a very small parameter  $d$  (i.e. less than  $1e - 7$ ) based on the DE-SINC transformation is the best choice. Method based on the arcsinh transformation with the interpolation gives quite accurate results with low computational cost.

We presented numerical results obtained with each method considering different values of parameter.

---

Ivana Kuzmanović, Zoran Tomljanović, Ninoslav Truhar

Department of Mathematics, J. J. Strossmayer University of Osijek,  
Croatia

## LYAPUNOV AND $T$ -LYAPUNOV EQUATIONS WITH SOME APPLICATIONS IN MECHANICS

### Abstract

Lyapunov equation is equation of the form

$$AX + XA^T = E,$$

where  $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  are given and  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is unknown matrix.  $T$ -Lyapunov equation (known also as Lyapunov equation for  $T$ -congruence) is equation of the form

$$AX + X^T A^T = E,$$

where  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $E \in \mathbb{R}^{m \times m}$  and the unknown matrix is  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Lyapunov equations play a vital role in a number of applications such as matrix eigendecompositions, control theory, model reduction, numerical solution of matrix differential Riccati equations, image processing, eigenvalue assignment problem, and many more.

On the other hand,  $T$ -Lyapunov equation comes from the theory of Hamiltonian mechanical systems, it can also be used for the singular value decomposition of time varying matrices, for  $\mathcal{H}^2$  optimal output feedback control for descriptor systems and generalized algebraic Riccati equation for continuous-time descriptor systems.

It is straightforward but very interesting to emphasize that the symmetric solution of  $T$ -Lyapunov equation (if it exists) corresponds to the solution of Lyapunov equation, i.e. Lyapunov equation can be understood as constrained Lyapunov equation for  $T$ -congruence:

$$AX + XA^T = E \iff \begin{cases} AX + X^T A^T = E \\ X = X^T \end{cases}.$$

This connection between Lyapunov and  $T$ -Lyapunov equations can be used in some structured problems. For example, if  $A = S\hat{A}S^T$ , where  $S$  is regular matrix, then multiplying  $AX + XA^T = E$  from the left by  $S^{-1}$  and from the right by  $S^{-T}$ , from Lyapunov equation we obtain  $T$ -Lyapunov equation  $\hat{A}Y + Y^T\hat{A}^T = \hat{E}$ , where  $Y = S^T X S^{-T}$  and  $\hat{E} = S^{-1} E S^{-T}$ . Then

$$AX + XA^T = E \iff \begin{cases} \hat{A}Y + Y^T\hat{A}^T = \hat{E}, \\ Y = S^T X S^{-T}, X = X^T, \\ A = S\hat{A}S^T, \hat{E} = S^{-1} E S^{-T}. \end{cases}$$

If  $\hat{A}$  has some particular structure, then the right-hand side constrained  $T$ -Lyapunov structured problem may have better properties than the unstructured Lyapunov equation.

In this talk we will concern application of Lyapunov and  $T$ -Lyapunov equations to the problem of optimal damping in mechanical systems. For that purpose we first consider a mathematical model of a linear vibrational system:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0, \quad (3)$$

where the matrices  $M, D$  and  $K$  (called mass, damping and stiffness, respectively) are real, symmetric matrices of order  $n$  with  $M$  and  $K$  positive definite.  $D = C_u + C_{ext}$  is the damping matrix where  $C_u$  represents the internal damping while matrix  $C_{ext} = vC_0$  is a positive semidefinite matrix with  $C_0$  which describes the geometry of external damping and  $v$  represents viscosity. Equation (3) can be transformed to the phase space which yields a system of first order differential equations  $\dot{y} = Ay$ , where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & -\Phi^T D \Phi \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

where  $\Phi$  is matrix which simultaneously diagonalize  $M$  and  $K$ , i.e.  $\Phi^T K \Phi = \Omega^2$  and  $\Phi^T M \Phi = I$ . The solution of above equation is  $y = e^{At} y_0$  where  $y_0$  contains the initial data.

In damping optimization very important question arises: for given masses and stiffnesses we want to determine the "best" damping matrix  $D$  which insures optimal evanescence of each component of  $y$ . There exists different optimality criterions for that problem. We will use criterion based on the minimization of the total energy averaged over all initial states of the unit total energy and a given frequency range which is equivalent to

$$\text{trace}(X) \rightarrow \min, \quad (5)$$

where  $X$  is the solution of the Lyapunov equation

$$AX + XA^T = -Z \quad (6)$$

where  $Z = GG^T$  and  $G$  determines eigenfrequencies of the undamped system which will be damped.

Damping optimization using criterion (5) requires solving the Lyapunov equation (6) numerous times since we need to optimize the viscosity parameter or even geometry of external damping. Moreover, efficient damping optimization was widely studied in past, but due to complexity of presented problem, this is also nowadays very investigated problem.

Nebojša Nikolić, Dragana Makajić-Nikolić

University of Belgrade, Faculty of Organizational Sciences

## CONNECTION BETWEEN METRIC DIMENSION OF HYPERCUBE AND COIN WEIGHING PROBLEM

### Abstract

In this paper we consider the connection between metric dimension problem of hypercube graph and coin weighing problem. Metric dimension of hypercube ( $\beta_n$ ) is the minimum cardinality of a resolving set of hypercube  $Q_n$ . Coin weighing problem posed by Söderberg and Shapiro can be defined as follows: for  $n$  coins, each with one of two distinct weights, determine the weight of each coin with the minimum number of weighings ( $f_n$ ). It is known that  $f_n$  differs from  $\beta_n$  by at most one. We have shown that stronger inequalities holds:  $f_n \leq \beta_n \leq f_{n-1} + 1$ . In addition, we consider the connection between the minimum cardinality of a doubly resolving set

of hypercube ( $\psi_n$ ) and coin weighing problem. We have shown that equality  $\psi_n = f_n + 1$  holds and, as a consequence,  $\beta_{m+n} \leq \beta_m + \beta_n$ . The last inequality shows that well-known hypothesis  $\beta(G \square H) \leq \beta(G) + \beta(H)$  is true in the case of hypercube graph.

---

Dragan Matić

Prirodno-matematički fakultet Banja Luka

Vladimir Filipović

Matematički fakultet Beograd

Jozef Kratica

Matematički institut SANU Beograd

**PREGLED METODA ZA RJEŠAVANJE PROBLEMA  
MAKSIMALNO BALANSIRANE POVEZANE PARTICIJE U  
GRAFU**

**Apstrakt**

Problem pronalaženja maksimalno balansirane povezane particije spada u široku klasu problema particionisanja grafa, koji pronalazi primjenu u rješavanju mnogih problema u teoriji i praksi. U ovom radu prikazan je pregled do sada razvijenih egzaktnih i heurističkih metoda za rješavanje ovog NP teškog problema. Prikazani su eksperimentalni rezultati na osnovu kojih su upoređene performanse opisanih metoda.

---

Marija Stanić

University of Kragujevac, Faculty of Science, Department of Mathematics  
and Informatics

## AN OPTIMAL SET OF QUADRATURE RULES FOR TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

### Abstract

In this paper we define an optimal set of quadrature rules with an odd number of nodes for trigonometric polynomials in Borges' sense [Numer. Math. **67** (1994), 271–288]. As a matter of fact we consider evaluation of a set of  $p \in \mathbb{N}$  definite integrals over the same interval  $E$  of length  $2\pi$ , taken with respect to the different weight functions and related to a common integrand. The optimal set of quadrature rules is characterized by multiple orthogonal trigonometric polynomials of semi-integer degree. Theoretical results are illustrated by some numerical examples.

---

Silvia Gilezan, Jelena Ivetić

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka

Pierre Lescanne

University of Lyon, École Normal Supérieure de Lyon, France

Silvia Likavec

Dipartimento di Informatica, Università di Torino, Italy

## SOME ADVANTAGES OF THE LAMBDA CALCULI WITH RESOURCE CONTROL

### Abstract

The subject of our research are the resource control lambda calculi, term calculi with operators for duplication and erasure of variables, that correspond to the explicit structural rules of contraction and thinning in logic. Some distinctive properties of both untyped and typed resource control lambda systems will be discussed. Particularly, we will focus on



the natural connection between resource control operators and intersection types that enables the specification of the role of a variable in a term. Our conclusion is that, due to the presented properties, lambda calculi with the resource control represent in some situations more convenient core calculi for the implementation than the traditional lambda calculus.

---

Miroslav Marić

Matematički fakultet Beograd

Aleksandar Takači

Tehnološk fakultet Novi Sad

Darko Drakulić

Filozofski fakultet Pale

## PRIMENA RAZLIČITIH KONORMI U MODELOVANJU FAZI LOKACIJSKIH PROBLEMA

### Apstrakt

Problemi pokrivanja lokacija (Covering location problems) predstavljaju važnu klasu problema kombinatorne optimizacije. Standardni modeli ovih problema ne opisuju precizno probleme iz stvarnog života, koji često sadrže neprecizne uslove. Korišćenje fazi skupova i različitih konormi omogućava preciznije modelovanje tih problema, a samim tim i dobijanje kvalitetnijih rešenja. U ovom radu biće prezentovana primena fazi skupova korišćenjem tri različite konorme u modelovanju problema pokrivanja lokacija, a rezultati će biti ilustrovani na definisanju novih modela za probleme maksimalnog pokrivanja lokacija (Maximal covering location problem), minimalnog pokrivanja lokacija (Minimal covering location problem) i pokrivanja skupa lokacija (Location set covering problem).

---

Huse Fatkić

Department of Mathematics, Faculty of Electrical Engineering, University  
of Sarajevo

Mehmed Brkić

Department for Automatic Control and Electronics, Faculty of Electrical  
Engineering, University of Sarajevo

Berina Fatkić

Department of Mathematics, Faculty of Science Sarajevo, University of  
Sarajevo

## ON MEASURABILITY-PRESERVING WEAKLY MIXING TRANSFORMATIONS

### Abstract

In this paper, we investigate some metric properties, dispersive effects and various notions of recurrence for measurability-preserving weakly mixing (MPWM) transformations on metric spaces endowed with a normalized measure. We consider four types of recurrent behavior (exact recurrence, Poincaré recurrence, coherent recurrence and strictly coherent recurrence) for some classes of measurability-preserving discrete time dynamical systems. The second of these, which is the type originally introduced by Jules Henri Poincaré (published in 1890) and is still by far the most widely discussed, especially in physics, holds for all (MPWM) transformations by virtue of the fact that they are measure-preserving. Poincaré had shown that almost all points in a space subject to a measure-preserving transformation return over and over again to positions arbitrarily close to their original position. However, P. Johnson and A. Sklar in [6] regard the third type ("coherent recurrence" for measurability-preserving transformations) as being of at least equal physical significance, and this type of recurrence fails for Chebyshev polynomials. They also found that there is considerable evidence to support a conjecture that no strongly mixing transformation can exhibit coherent recurrence.

Continuing the work begun by Johnson and A. Sklar [6], and R. E. Rice [6], we define the fourth type of recurrent behavior and obtained some

results that extend their results from strongly mixing transformation to (MPWM) transformations.

In addition to this work, we also extend the previous results on some metric properties and dispersive effects due to T. Erber, B. Schweizer and A. Sklar [2], H. Fatkić [3], H. Fatkić and M. Brkić [4] and C. Sempì [10].

---

Stevan Šćepanović, Marko Grebović

Prirodno-matematički fakultet Podgorica, Univerzitet Crne Gore

**MATEMATIČKA ANALIZA POBOLJŠANJA ENERGETSKE  
EFIKASNOSTI AUTOMATIZACIJOM SISTEMA  
POTROŠNJE ENERGIJE I OPTIMIZOVANJEM TROŠKOVA  
GRADNJE**

**Apstrakt**

Pitanje energetske efikasnosti u gradnji danas se najčešće posmatra iz dva ugla: utroška energije kroz sisteme grijanja/hlađenja i osvetljenja i kroz energetske performanse omotača (izolacije, zidova, krova, vrata i prozora). U oba slučaja, glavni problem koji treba riješiti je pitanje isplativosti. Što se tiče utroška energije, jedno rješenje bi bilo korišćenje obnovljivih izvora energije. To je svakako poželjno, ali često ne donosi dovoljnu uštedu. Zbog toga se pribjegava nekim drugim metodama. Jedna od njih je optimizaciju troškova gradnje i implementacija automatizovanog sistema za upravljanje potrošnjom energije. U našem radu smo, za analizu energetske efikasnosti u gradnji, koristili metodu imitacionog modeliranja. Ova metoda predstavlja proces konstruisanja modela realnog sistema i eksperiment sa ovim modelom na računaru. Dakle, sam proces imitacionog modeliranja se sastoji iz dva dijela: izgradnje modela sistema i primjene tog modela za analizu sistema koji se modelira. Pri analizi energetske efikasnosti uz pomoć imitacionog modela, potrebno je što je moguće preciznije definisati tzv. ciljnu funkciju, tj. mora biti jasna predstava koji su ciljevi i zadaci modeliranja posmatranog sistema i koji su to neophodni kriterijumi za ocenu ispunjenja tih ciljeva. Ciljna funkcija ili kriterijuma modeliranja je bio da se dobije sistem koji će, uz optimalna ulaganja, trošiti manje energije, a koji će zadovoljiti sve potreba savremenog čovjeka za grijanjem, hlađenjem, osvetljenjem, komunikacijama,

higijenom itd. U praksi se obično izdvajaju dva tipa ciljnih funkcija ili kriterijuma modeliranja: prvi je izgraditi modela postojećeg sistema u cilju njegovog posmatranja i poboljšanja njegovih karakteristika, a drugi je procjena potrošnje energije, kada se planira izgradnja novog objekta u fazi projektovanja. Ovaj se cilj podudara sa zadatkom ovog rada. Ciljna funkcija mora biti jednoznačno određena ciljem ili zadatkom analize i mora odgovarati prihvaćenim rešenjima. Ona je obično sastavni dio modela i cio proces manipulisanja sa modelom usmeren je na optimizaciju ili zadovoljenje tog cilja i zadatog kriterijuma. Cilj rada je izgradnja matematičkog modela optimizacije troškova gradnje, uz postizanje najboljih performansi zgrade. U radu je posebno analizirana primjena automatizovanog sistema upravljanja potrošnjom energije, zasnovanog na bežičnoj računarskoj mreži.

---

Ralević Nebojša, Dukić Sanja, Danijela Karaklić

Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu

## **RASTOJANJA IZMEĐU FAZI OBJEKATA**

### **Apstrakt**

U skupu svih fazi objekata definisanih nad nekim univerzalnim skupom može se dati pojam rastojanja koje može biti metrika ili ne. Sva rastojanja koja razmatramo su, dakle, oblika, gde je skup fazi objekata definisanih nad univerzalnim skupom (različiti tipovi fazi skupova, fazi tačke), a podinterval skupa realnih brojeva, skup nenegativnih fazi brojeva. Primene u različitim oblastima kao što su teorija slike, prepoznavanje oblika dikti-raju nam kakve osobine ta rastojanja treba da zadovoljavaju. Najčešće ta rastojanja su semimetrike odnosno tzv. pseudometrike kod kojih ne važi nejednakost trougla. Obično je ona zamenjena nejednakošću u kojoj figurišu (ko)norme. U primeni su najčešće rastojanja između fazi objekata definisana samo preko njihovih funkcija pripadanja, a postoje i definicije koje kombinuju standardno definisana rastojanja sa funkcijama pripadanja odgovarajućih objekata.

---

Nebojša Ralević, Marko Janev, Danilo Rapaić

Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu

## **FAZI REGRESIJA**

### **Apstrakt**

Najveći broj primena linearne regresije se može svrstati u dve kategorije. Prva je predikcija ili predviđanje, gde regresiju koristimo da bismo konstruisali model koji odgovara opserviranim podacima. Druga je selekcija obeležja, to jest slučaj kada imamo određen broj nezavisnih promenljivih koje mogu imati neki uticaj na rezultujuću promenljivu, gde linearnu regresiju možemo koristiti za procenu koja od tih promenljivih ima uticaja i koliki je taj uticaj na rezultujuću promenljivu. U slučaju da nas je priroda problema, kojim se bavimo, navela da koristimo fazi regresiju, postavljaju nam se sledeća pitanja: Kako ćemo definisati rastojanje među fazi objektima? Da li ćemo dozvoliti postojanje negativnih koeficijenata? Da li ćemo i kada koristiti regularizaciju modela? Odgovori na ova pitanja najčešće proizilaze iz same prirode podataka i složenosti modela koji želimo dati.

---

Sandra Buhmiller

Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu

## **JEDAN ALGORITAM ZA FORMIRANJE I REŠAVANJE GRANIČNOG SISTEMA ZA SINGULARNE PROBLEME**

### **Apstrakt**

Uvođenje graničnog sistema jedna je od modifikacija kojom se ubrzava konvergencija iterativnog niza ka singularnom rešenju sistema nelinearnih jednačina. Za formiranje i rešavanje graničnog sistema postoji veoma brz, lokalno konvergentan algoritam koji zahteva izračunavanje matrice jakobijana i hesijana u svakoj iteraciji. U ovom radu je predložena modifikacija algoritma u kojoj se matrice jakobijana i hesijana aproksimiraju konačnim razlikama, dok brza lokalna konvergencija ka rešenju ostaje očuvana. Kombinacijom metode negativnog gradijenta sa linijskim pretraživanjem i predložene modifikacije dobija se globalno konvergentan algoritam koji je veoma

brz u okolini rešenja singularnog problema. Algoritam je testiran na relevantnim primerima iz već postojeće literature i predstavljeni su neki od dobijenih numeričkih rezultata.

---

Dragan Vidaković, Duško Parezanović

Gimnazija, 13. Septembar 58, 32250 Ivanjica, Serbia

## **POINT MULTIPLICATION ON ELIPTIC CURVES OVER $F_P$**

### **Abstract**

National Institute of Standards and Technology (NIST) has added Elliptic curve cryptosystems (ECC) to its set of standard cryptographic algorithms. One of the most important operations for all applications of elliptic curves is scalar point multiplication- the operation of multiplying a random number by a point on an elliptic curve. This fact is the reason why in this paper we present a full software implementation for computing scalar point multiplication on non-supersingular elliptic curves defined over the finite field  $F_p$ . Weierstrass and Edwards curves are commonly used in real life cryptography. Weierstrass curves are already an industrial standard and point multiplication on them is amongst the fastest. Those are the reasons why Weierstrass curves are the basis of this paper.

---

Radoslav Milošević

Filozofski fakultet Pale

## **KVANTIFIKATORI OGRANIČENOG DOMETA**

### **Apstrakt**

U uvodnom dijelu rada navodi se interpretacija matematičkih konstrukcija.

U glavnom dijelu rada biće istaknuta interpretacija kvantifikatora, te interpretacija logičkih veznika.

Na kraju rada posebno će se obraditi kvantifikatori ograničenog dometa sa posebnim osvrtom na univerzalni i egzistencijalni kvantifikator, kao i na negaciju rečenica koje sadrže kvantifikatori.

---

Dušan Jokanović, Mirsada Đezić, Marina Zirojević

Fakultet za proizvodnju i menadžment Trebinje

## A NOTE TO CANTOR-ZASSENHAUS ALGORITHM

### Abstract

The topic of this paper is the Cantor-Zassenhaus randomized algorithm for factoring polynomials over  $\mathbb{F}_p$ . The basic idea is to choose a polynomial  $g \in \mathbb{F}_p[x]$  of degree less than  $n$  at random, and then compute  $h = g^{(p^d-1)/(p-1)} \bmod f$ . The polynomial  $h$  is computed using repeated squaring, and  $h$  always satisfy  $h^p \equiv h \pmod{p}$ , and with probability  $1 - \frac{1}{p}$  it will not be a constant. A significant computer savings is obtained by choosing  $g = x + r$ , where  $r \in \mathbb{F}_p$  is chosen at random.

---

Vladan Mastilović<sup>1</sup>, Milorad Banjanin<sup>2</sup>

1 Ministarstvo Odbrane Sarajevo, 2 Filozofski fakultet Pale

## WEB SERVISI U MD REINŽENJERINJU INFORMACIONIH SISTEMA

### Apstrakt

U eri stalnog napredka softverskih tehnologija informacijski sistemi razvijeni juče postaju nasleđeni informacijski sistemi danas. Ipak napredak internet tehnologija otvorio je mogućnost ponovne upotrebe nasleđenih informacijskih sistema i produženje njihovih resursa, ne poznajući geografska ograničenja. Web servisi su se pojavili kao nova paradigma za dizajn i razvoj softvera iz komponenti u distribuiranom mrežnom okruženju. Oni su zasnovani na servisno orijentisanoj arhitekturi (SOA), XML-u i HTML-u. Nasleđeni informacijski sistemi u procesu reinženjeringa mogu ugraditi tehnologiju Web servisa i kao takvi mogu se ponovo koristiti u distribuiranom okruženju i na heterogenim platformama. Prateći savremene trendove da se zaključiti da se glavne inovacije u izgradnji i razvoju informacijskih sistema odnose na problem njihove integracije i interoperabilnosti. Osnovni koncepti koji se u literaturi koriste za rešavanje problema integracije i interoperabilnosti su: reinženjering, restrukturiranje, reverzni inženjering

i inženjering prema napred (forward engineering). Aktualna orijentacija je na modelom vođeni razvoj sistema, arhitektura, procesa, inženjeringa. Model više nije samo sredstvo za dokumentovanje i analizu sistema, već je deo implementacije sistema, u smislu da je moguće transformisati model u programski kod za ciljnu platformu. Modelom vođeni ili MD (Model-driven) pristupi razvoju sistema pomerili su interesovanje sa programskih jezika treće generacije (3GL) na modele. Ovo istraživanje predstavlja sveobuhvatan, sistematičan i automatizovan pristup modelom vođenom reinženjeringu nasleđenih informacionih sistema u Web servise. Cilj je dakle izbeći ponovno pisanje cijelog nasleđenog informacionog sistema i kretanje od nule.



**SEKCIJA ZA VJEROVATNOĆU I STATISTIKU**

**SECTION FOR PROBABILITY AND STATISTICS**



---

Slavica Medić, Tatjana Grbić

Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad, Serbia

## CHEBYSHSEV TYPE INEQUALITIES BASED ON $g$ -INTEGRALS

### Abstract

Pseudo-integral inequalities of Chebyshev type for  $g$ -semirings are considered. Generator  $g$  is a monotone continuous function. Pseudo-operations are defined by  $x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y))$  and  $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$ .

In the real-valued case, expectation and higher moments do not exist for the Chaychy's distribution. With the suitable choice of the generator  $g$ , the computation of the pseudo-expectation for the Cauchy's distribution and applicability of the Chebishev's inequality on the Cauchy's distribution is possible.

**Keywords:**  $g$ -semiring,  $g$ -integral, Cauchy's distribution, pseudo-expectation, Chebyshev type inequality

---

Halima Elfaghihe, Kristina Veljković, Vesna Jevremović

Department of Probability and Statistics, Faculty of Mathematics,  
University of Belgrade

## OPTIMAL PROCESS CALIBRATION FOR SOME EXAMPLES OF NON-SYMMETRIC LOSS FUNCTIONS

### Abstract

The process calibration is one of the methods in statistical process control for improving the quality of the products used by our society. We introduced basic notions of statistical process control and gave a review on loss functions used in this area. This paper is concerned with the problem of process calibration for some examples of non-symmetric loss functions. We suggested an optimal calibration policy which can be implemented using our programs written in statistical software  $R$ .

---

Huse Fatkić

Department of Mathematics, Faculty of Electrical Engineering, University  
of Sarajevo

Slobodan Sekulović

Hot Springs National Park, Arkansas, USA

Hana Fatkić

Department for Computer Science and Informatics, Faculty of Electrical  
Engineering, University of Sarajevo

## ON HARMONIC MEAN VALUES AND WEAKLY MIXING TRANSFORMATIONS

### Abstract

Let  $(S, d)$  be a (extended) metric space, and let  $A$  be a subset of  $S$ . For any positive integer  $k, (k \geq 2)$ , we define the harmonic diameter of order  $k$  of  $A$ , denoted by  $D_k(A)$ , by

$$D_k(A) := \sup \left\{ \binom{k}{2} \left( \sum_{1 \leq i < j \leq k} [g(x_i, x_j)]^{-1} \right)^{-1} \mid x_1, \dots, x_k \in A \right\}.$$

Note that  $D_2(A)$  is the (ordinary) diameter of the set  $A$ . The main result in this work is the following theorem:

In the above situation if  $(S, A, P)$  is a normalized measure (probability) space with the property that every open ball in  $(S, d)$  is  $P$ -measurable and has positive measure and if  $\phi$  is a transformation on  $S$  that is weakly mixing with respect to  $P$  and  $A$  is  $P$ -measurable with  $\mu(A) > 0$ , then  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_k(\phi^n(A)) = D_k(S)$ . This extends the known result by R. E. Rice ([6], Theorem 2) (motivated by some physical phenomena and offer some clarifications of these phenomena) from ordinary diameter to harmonic diameter of any finite order.

The above theorem shows that any set  $A$  of positive measure necessarily spreads out, not only in (ordinary) diameter, but also in harmonic diameter of any finite order. Thus, even though  $A$  may not spread out in "volume" (measure), there is a very definite sense in which  $A$  does not remain small.

The obtained results here also extend and/or complement the previous results due to T. Erber, B. Schweizer and A. Sklar [2], H. Fatkić and M. Brkić [3], N. S. Landkof [5], E. B. Saff [7] and C. Sempì [9].

There is considerable evidence to support a conjecture that our result (for weakly mixing transformations/weakly mixing dynamical systems with discrete time) can be extended to weakly mixing dynamical systems with continuous time (see [1, pp. 6 - 26]).

Tijana Levajković

Faculty of Traffic and Transport Engineering, University of Belgrade

## PROPAGATOR METHOD FOR MALLIAVIN-TYPE EQUATIONS

### Abstract

We consider stochastic differential equations that involve the Malliavin derivative, the Skorokhod integral and the Ornstein-Uhlenbeck operator. Applying the propagator method in white noise spaces we solve these equations and obtain explicit forms of the solutions in the space of Kondratiev generalized stochastic processes. For a better understanding we provide several examples.

Kristina Veljković

Department of Probability and Statistics, Faculty of Mathematics,  
University of Belgrade

## THE $\bar{X}$ CONTROL CHART FOR NON-NORMAL SYMMETRIC DISTRIBUTION OF QUALITY CHARACTERISTIC

### Abstract

The  $\bar{X}$  bar chart is one of the most important techniques in statistical quality control used to monitor a change in the process mean. This paper is concerned with the construction of the  $\bar{X}$  bar control chart when quality characteristic has non-normal symmetric distribution. For chosen

Student, standard Laplace and logistic distributions of quality characteristic, we calculated theoretical distribution of standardized sample mean and approximated it with Pearson VII distribution. Width of control limits and power of the  $\bar{X}$  control chart were established, giving evidence of goodness of fit of Pearson VII distribution to theoretical distribution of standardized sample mean.

---

Jelena Stanojević

Faculty of Economics, University of Belgrade

## INTERVALNO OCENJIVANJE VARIJANSE

### Apstrakt

Problem ocenjivanja varijanse dosta je izučavan u dosadašnjoj literaturi. Sa stanovišta stručne prakse jasna je važnost rešavanja tog problema. U ovom radu biće istaknuti neparametarski intervali poverenja za varijansu, problem jednog uzorka. Takođe će biti istaknuti neparametarski intervali poverenja za razliku varijansi, problem dva uzorka. I predstavljen je problem nalaženja intervala poverenja za količnik varijansi pomoću Edgewotrhovog razvoja odgovarajuće statistike.

---

Tatjana Bajić

Higher Education School of Professional Studies for Preschool Teachers in  
Šabac

## AN ORTHOGONAL STOCHASTIC MEASURE AND THE NORMED HERMITE POLYNOMIALS

### Abstract

We consider stochastic integrals of the square integrable functions with respect to an orthogonal stochastic measure. Since the normed Hermite polynomials constitute a complete orthonormal system in the space of square integrable functions with respect to the Gaussian measure, some interesting results can be obtained.

*Keywords:* Stochastic orthogonal measure, stochastic integrals, Hermite polynomials.

**SEKCIJA ZA ISTORIJU, FILOZOFIJU I  
NASTAVU MATEMATIKE**

**SECTION FOR HISTORY, PHILOSOPHY AND  
MATHEMATICS TEACHING**





Slobodan Vujošević

University of Montenegro, Faculty of Natural Sciences and Mathematics

## NONCOMPUTABILITY, MIND AND PHYSICS

### Abstract

Among the consequences of Gödel's incompleteness theorem is the attitude that the human mind cannot be explained in terms of any kind of computational process. Since the mind transcends computation it must transcend physics, unless there are some noncomputational aspects of physical laws. If we consider the possibility that the laws of physics might themselves involve noncomputational procedures (see [ Penrose, R., 2011, *Gödel, the Mind, and the Laws of Physics*, In *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics - Horizons of Truth*, Cambridge, Cambridge University Press, 2011, pp. 339-358.]), mentality can lie within the actions of the physical brain.

---

Radoje Šćepanović

Prirodno-matematički fakultet Podgorica

## PRIMJERI LINEARNIH PRESLIKAVANJA I JEDNAČINA U NASTAVI SREDNJE ŠKOLE

### Apstrakt

U radu se navode primjeri linearnih preslikavanja:  $f(x) = ax$ , skalarni proizvod dva vektora, vektorski proizvod dva vektora, projekcija vektora na osu, simetrija u odnosu na koordinatne ose, rotacija oko koordinatnog početka, homotetija itd. Takođe se razmatra i rješavanje linearnih jednačina sa posebnim osvrtom na strukturu njihovog rješenja (homogena, nehomogena, zbir njihovih rješenja).

---

Vesna Jevremović

Matematički fakultet Beograd

## KOMBINATORIKA - ŽIVOT I MATEMATIKA

### Apstrakt

U okviru nastave matematike, na svim nivoima, od osnovne škole do fakulteta, a takođe i u naučno-istraživačkom radu srećemo se sa zadacima kombinatornog tipa. Permutacije, varijacije ili kombinacije, sa ili bez ponavljanja, uvek su u vezi sa nekim realnim problemom. U izlaganju će biti dat pregled i osobine osnovnih pojmova iz kombinatorike, ilustrovanih na većem broju primera koji se javljaju, ili mogu javiti, u nastavi na raznim nivoima. Elementi primene kombinatorike u verovatnoći i statistici će takođe biti predstavljeni.

---

Gordana Laštovička-Medin

Faculty of Sciences and Mathematics, University of Montenegro

## ASSESSING CHILDRENS THINKING

### Abstract

This research was originally motivated by the findings author recorded studying cognitive abilities and development of own children, in particular comparing impact of two divergent educational systems (UK and Montenegro) and taking into account the simultaneous/sequential bilingual language acquisition. We show that individual differences in the processes in the learners mind or brain depend significantly on curriculum and instructional materials as well as on teachers instruction (pedagogy). Our findings emphasize that assessing childrens thinking is much more than assessing their cognitive ability. A summary of the literature and case studies we presented, suggest that to fully support the development of childrens thinking we need to pay attention to the following key areas: social/emotional development (are children adequately confident to tackle ambiguity and express their point of view?), motivation and dispositions to learn (do children show adequate perseverance and persistence to stay with a problem

and to think it through), cognitive development (have children developed the capacity to sequence and order, classify and sort at a concrete level?), linguistic development (have children acquired the linguistic competence to explain and give reasons, use conditional construction and reasoning?, can they explain why they have done things in a certain way, discuss their plan of action and answer open-ended questions?), creative development (do children show a degree of imagination and flair in what they do?), reflective responses (can children ask questions and express the need to find out more?, can children be to some extent self-critical, accept suggestions from others, tackle ambiguity and be open to challenge?). Finally we point out the crucial question: what are the teachers (those involved in children education) thinking skills and what is their belief in relation to necessity of developing children thinking skills, stretching their mind, exploring full potential. As it is given in conclusion: there is no reform which could change education until teacher and society as whole change attitude to learning from challenge, start to value thinking skills and government make happy surrounding for children, parents and educator.

Mirko Dejić

Učiteljski fakultet u Beogradu

## **KORENI I SVEDOČANSTVA SLOVENSKE (SRPSKE) NUMERACIJE**

### **Apstrakt**

Na poziv velikomoravskog kneza Rastislava (oko 846-870) vizantijski car Mihajlo III (836-867) šalje 863. godine solunsku braću Ćirila (oko 826-869) i Metodija (oko 820-885) da šire hrišćanstvo i pismenost među Slovenima. Pored azbuke, Ćirilo i Metodije donose i zapisivanje cifara po uzoru na jon-sko zapisivanje (oko 500 g.p.n.e.). Svedočanstva o pisanju malih i velikih brojeva kod Slovena nalaze se na srednjovekovnim poveljama, freskama, epigrafima, cifarnicima na satovima itd. Kod Srba najviše spomenika potiče iz doba Nemanjića. Jedno od najznačajnijih svedočanstava Slovenske numeracije predstavlja najstarija sačuvana matematička knjiga kod Rusa, čiji je autor monah Kirik (1110-?) iz Antonijevog manastira u Velikom Novgorodu.

U radu iznosimo alfabetski zapis cifara kod starih Slovena, pokazujemo slovenski izum zapisivanja veoma velikih brojeva, dokazujemo direktnu vezu slovenske i jonske numeracije, upoznajemo se sa rukopisom monaha Kirika i prikazujemo istorijske spomenike u kojima se nalazi staroslovensko zapisivanje brojeva.

---

Savo Ćebić

Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu

## ŠTA TO BEŠE UGAO?

### Apstrakt

Među geometrijskim figurama istaknuto mesto ima UGAO. Postoje razni pristupi formiranju ovoga pojma kao i njegovom definisanju. U radu je ukazano kakve sve probleme mogu izazvati različiti pristupi ovome pojmu u školskoj nastavi matematike. Dat je i jedan savremeni pristup formiranja pojma ugla. Posebno je istaknuta nedoslednost u udžbeničkoj literaturi za osnovnu školu kad je u pitanju formiranje ovoga pojma. Pojam ugla kod svršenih učenika osnovne škole nije u potpunosti formiran!

---

Aleksandar Nikolić

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka

## INSTITUCIONALNI RAZVOJ MATEMATIKE U SRBIJI DO VELIKOG RATA

### Apstrakt

Institucionalni razvoj matematike u Srbiji počiva na dve nacionalne institucije: visokoškolskoj ustanovi pod nazivom Licej, osnovanoj 1838. (od 1863. Velika škola a danas Univerzitet u Beogradu) i Društvu srpske slovesnosti, osnovanom 1841. (od 1864. Srpsko učeno društvo, od 1886. Srpska Kraljevska Akademija - SKA, pa Srpska Akademija Nauka - SAN, danas Srpska akademija nauka i umetnosti - SANU). Njihovom saradnjom i

preplitanjem aktivnosti, na Univerzitetu u Beogradu je, prvenstveno zaslugom Mihaila Petrovića i Bogdana Gavrilovića, osnovan Matematički seminar koji je posle Drugog svetskog rata, pod nazivom Matematički institut SANU, prerastao u najvišu srpsku matematičku instituciju. U okviru Matematičkog seminara - instituta razvijale su se Petrovićeve matematička škola između dva svetska rata i Karamatina škola matematičke analize posle Drugog svetskog rata. Danas su one poznate kao Beogradska škola matematike.

---

Marina Zubac

Fakultet prirodoslovno-matematičkih i odgojnih znanosti Sveučilišta u Mostaru

## GRUPNI OBLIK RADA U NASTAVI MATEMATIKE

### Apstrakt

U ovom radu se istražuju prednosti grupnog rada u nastavi matematike. Istraživanje je provedeno u Gimnaziji Čitluk tokom prva tri mjeseca ove godine. Obuhvaćalo je 80 učenika prvih razreda gimnazije. Učenici su bili podijeljeni u dvije grupe, oni koji su radili u grupnom radu (eksperimentalna grupa) i oni koji su imali tradicionalnu nastavu (kontrolna grupa). Grupe su bile ujednačene, što se vidi iz ocjena iz matematike na kraju prvog polugodišta. Na kraju smo proveli test znanja koji je pokazao da je uspješnija bila eksperimentalna skupina,  $\chi^2 = 12,76$  na razini značajnosti 0,05 i uz 4 stupnja slobode.

Provedena je i anketa iz koje se vidi da većina nastavnika rijetko koristi ili nikako ne koristi grupni rad u nastavi matematike. Zato se daje preporuka korištenja grupnog rada u nastavi matematike.

Spasoje Mučibabić

Univerzitet Odbrane, Vojna akademija Srbije

Dragan Vukmirović

Statistički zavod Srbije

Milan Martić

Fakultet organizacionih nauka Beograd

**MATEMATIČKO-STATISTIČKIM METODAMA I  
VOJNOSTRATEGIJSKOM ANALIZOM DO ISTINE O  
SARAJEVSKOM ATENTATU I POČETKU PRVOG  
SVETSKOG RATA**

**Apstrakt**

Približava se obeležavanje stogodišnjice Sarajevskog atentata i početka Prvog svetskog rata. Na sceni su nastojanja da se optuže Srbi za njegovo otpočinjanje i to poveže sa krvavim raspadom SFRJ. Istorijski revizionizam je vrlo organizovan i preti opasnost da ono sto su naši predci ostvarili na ratištima Balkana i šire, a što je verifikovano na međunarodnom nivou, da se revidira na našu štetu. Smatramo da je obaveza ove generacije, posebno naučnika svih oblasti, da u svom domenu na naučnom nivou učine napore da se to spreči i istina jasno dokaže.

Zbog toga je ovo interdisciplinarni rad koji čini sintezu matematičko-statističkih metoda i vojnostrategijske analize, zasnovan na dokumentovanim činjenicama iz međunarodnih i Srpskih arhiva, i jasno dokazuje da Srpski narod nije mogao da donese racionalnu odluku, koja bi ga vodila u rat.

---

Jasmina Milinković

Učiteljski fakultet, Univerzitet u Beogradu

## O TEORIJI I PRAKSI POSTAVLJANJA PROBLEMA U NASTAVI MATEMATIKE

### Apstrakt

Rad je posvećen teorijskom sagledavanju postupka kreiranja matematičkih problema. Više decenija pažnja istraživača usmerena je na postupke rešavanja problema sa dominantnim uticajem izuzetnog rada Džordža Polje. Postavlja se pitanje da li se može utvrditi metoda za postavljanje problema. U radu ćemo prikazati metodu postavljanja problema transformacijama. U prvom delu bavimo se prostorom problema. U drugom, prikazujemo postupak transformacije zadatka od lakšeg ka težem ili obratno menjanjem elemenata prostora problema. Posebno, bavimo se kreiranjem matematičkih problema ilustrujući na odabranim primerima mogućnost upadanja u zamke, postavljanja problema u kojima se zahteva nalaženje (ili određivanje) matematičkog objekta koji ne postoji (nije određen)-u praksi se kaže da "zadatak nema rešenje". Ukazujući na postojanje veze između vladanja matematičkim znanjima i vladanja veštinama postavljanja problema, ističemo značaj sticanja kompetencija u postavljanju problema za buduće nastavnike matematike.

---

Vladimir Drekalović

Faculty of Philosophy Nikšić

## HISTORICAL DEVELOPMENT OF THE ONTOLOGICAL ARGUMENT PHILOSOPHICAL AND MATHEMATICAL ASPECTS

### Abstract

Topic of God's existence has always occupied philosophers, theologians and scholars. Roughly speaking, there are two approaches to this issue. The first is religious, and it relies on the Gospel. The other is scientific, and it relies on reason. It seems that these two approaches, historically,

have divergent roads. But, the case of Ontological argument shows that, on the one hand, faith and science, and on the other hand, philosophy and mathematics, have many common points. The idea of the exact proof of God's existence is developed under the auspices of theology and philosophy. Recently, a collection of official supporters of this idea has gained new member - mathematics.

In such a way the Ontological argument has a special value. We can see that it passes different historical phases under the auspices of various science. Namely, it goes from the initial theological level, through the philosophical idea of formalization and, finally, gets the modern rigorous formal-logical forms.

Branislav Popović

Univerzitet u Kragujevcu, Prirodno–matematički fakultet, Institut za matematiku i informatiku

Radojko Damjanović

Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije

## **KONKRETNO I APSTRAKTNO - MATEMATIČKE REPREZENTACIJE I RAZVOJ KOGNICIJE KOD UČENIKA**

### **Apstrakt**

Razvoj kognicije kod učenika je u tesnoj vezi sa razvojem matematičkog mišljenja. Odgovarajuće osmišljavanje reprezentacija matematičkih objekata neophodno je u razvojnom pristupu procesu učenja. U tim reprezentacijama određujemo odnos konkretnog i apstraktnog u aranžiranju aktivnosti u cilju postizanja optimuma učenja. Upotreba manipulativa u nastavi matematike može da olakša razumevanje matematičkih objekata. Razumevanje pojmova i matematičkih objekata u različitim reprezentacijama predstavlja više nivoje kognicije, ali i mogućnost uočavanja analogija i operisanja na ovim nivoima.



---

Gordana Laštovička-Medin

Faculty of Science and Mathematics, University of Montenegro

**EXPERIENTIAL EDUCATION: MULTI-SENSORY  
APPROACH AND LINKING THE ABSTRACT TO THE  
CONCRETE**

**Abstract**

This article discusses the importance of using multi-sensory approach, network of connections between concrete experiences, representations, language and symbolic notation in teaching science and mathematics. John Dewey originally wrote about the benefits of experiential education in 1938, explaining, "There is an intimate and necessary relation between the processes of actual experience and education". This article emphasizes the importance of opportunity for students to develop their own opinions of concepts based on interaction with the information. Dewey also suggests that each student's experience will be individualized based on past experiences, and not all students will take away the same outlook of the concept, thus, the experiential learning classroom mimics society, where all people have different views of topics and information". He argued that "if knowledge comes from the impressions made upon us by natural objects, it is impossible to procure knowledge without the use of objects which impress the mind" (Dewey, 1916/2009, p. 217-218). Study presented in this paper shows observations over 5 years, resulting from teaching of physics at Faculty of Science and Mathematics and Teacher Training Department at Faculty of Philosophy at University of Montenegro. Groups of students from different departments where level of conceptual knowledge content was different have been involved and their response to experiential education has been investigated. The study shows high percentage of student having serious problem to link abstract concept to concrete when faced to it for the first time, although they would learn to describe the concept and also would learn to underline link to other concept (through concept mapping). Reasons of low motivation of students to develop their own opinions of concepts based on interaction with the information were studied. Moreover, the reason, why large number of student, who displayed knowledge of

facts or concept, did not further created new knowledge through comparing, inferring, explaining and connecting the prior knowledge to the features of the question, has been questioned and studied. Characterizations of students reasoning strategies as keys in the development of instructional strategies that foster meaningful learning have been additionally studied. We have been in particular, interested to identify the shortcut reasoning procedures (heuristics) used by students to reduce cognitive load, in order to help us invent strategies to facilitate the development of more analytical ways of thinking.

---

Ivan Budimir

Sveučilište u Zagrebu, Grafički fakultet

## ZENONOV PARADOKS O AHILEJU I KORNJAČI I BESKONAČNOST

### Apstrakt

Čuveni Zenonov paradoks o utrci između najbržeg starogrčkog heroja iz Homerove Ilijade i Odiseje Ahileja i spore kornjače i danas je, nakon više od 2500 godina, predmetom brojnih rasprava u filozofiji i matematici. Drevni filozofi Platon, Aristotel, Toma Akvinski, suvremeni filozofi poput Martina Heideggera, osnivači diferencijalnog računa Newton i Leibniz, osnivač teorije relativnosti Albert Einstein, matematičar i logičar Bertrand Russell i brojni drugi znanstvenici suočavali su se s Zenonovim argumentima. Prema Russellu ovi paradoksi "postali su osnova matematičke renesanse". I danas je ovaj "zloglasni" paradoks predmetom proučavanja filozofa i matematičara, o čemu govore mnogi radovi koji su objavljeni na tu temu. U ovom radu ukazano je na višeznačnost ključnog Zenonovog argumenata u paradoksu o Ahileju i kornjači. Analizirana je beskonačna djeljivost konačnih intervala prostora i vremena koja se javlja u Zenonovim konstrukcijama. Detaljnom analizom beskonačne djeljivosti nailazi se na problem višeznačnosti pojma beskonačnosti koja se može interpretirati kao potencijalna ili aktualna beskonačnost. U klasičnom matematičkom rješenju pomoću geometrijskog reda, beskonačna djeljivost svodi se na određivanje limesa niza parcijalnih suma. Tako, rješenje paradoksa ovisi o definiciji limesa niza koji se tumači preko potencijalne beskonačnosti. U tom smislu

paradoks se može smatrati riješenim. No, ako se beskonačna djeljivost shvati u smislu aktualne beskonačnosti, izvod starogrčkog genija i dalje ostaje u određenom smislu paradoksalan. Naime, aktualnu beskonačnost nije moguće iskustveno predočiti. Stoga aktualnu beskonačnost nije moguće niti adekvatno pojmiti. Beskonačno kao totalitet transcendirira sve sposobnosti našeg mišljenja i ostaje mu nedohvatljivo. Ovim radom pokazano je da nam Zenonov paradoks o Ahileju i kornjači ukazuje da prostor i vrijeme sadrže neka zagonetna svojstva, poput beskonačne djeljivosti, koju ne možemo obuhvatiti našim intelektom.

Dragica Milinković

Pedagoški fakultet Bijeljina

## MODELOVANJE JEDNAČINA U MLAĐIM RAZREDIMA OSNOVNE ŠKOLE

### Apstrakt

U početnoj nastavi matematike najveći broj problema se svodi na rješavanje pomoću jednačina koje predstavljaju izazov za učenike, iako njihova primjena na tom uzrastu ima znatna ograničenja. Prilikom upotrebe modela jednačina u rješavanju realnih problema u mlađim razredima osnovne škole, učenici se susreću sa brojnim teškoćama, među kojima su najvažnije formiranje odgovarajućih jednačina i rješavanje formiranih jednačina, budući da su veze između poznatih i nepoznatih veličina u realnim problemima različitog karaktera. Shodno tome, ne postoji univerzalna metoda po kojoj bismo kontekstualne probleme preveli na algebarski jezik. Zato je u bazičnom školskom ciklusu neophodno, prije svega, iskoristiti kognitivne kompetencije učenika u implementiranju sadržaja o linearnim jednačinama što podrazumijeva da se u poučavanju koriste jednostavniji, pogodniji i efikasniji načini koji slijede njihove sposobnosti, odnosno metode koje omogućavaju "slikovni" pristup postavljanju i rješavanju jednačina. U tom smislu, matematičko modelovanje linearnih jednačina primjenom grafičkog pristupa podrazumijeva određene postupke koji se redoslijedom mogu primijeniti pri rješavanju svakog problema: proučavanje verbalnih (tekstualnih, ilustrativnih) prikaza kontekstualnih problema, identifikovanje numeričkih i promjenljivih veličina koje su eksplicitno date kao "nepoznate" i njihovo grafičko predstavljavanje, uočavanje i izražavanje algebarskih odnosa u

vizuelnom prikazu, postavljanje i rješavanje algebarskih jednačina, te kontekstualne interpretacije numeričkih i algebarskih izraza u njima. Shodno tome, u prvom dijelu rada predstavimo matematičke modele u kojima slikovne demonstracije pojednostavljaju modelovanje linearnih jednačina. Drugi, metodološki dio orijentisan je na utvrđivanje efekata slikovnog pristupa u modelovanju jednačina u mlađim razredima osnovne škole primjenom eksperimentalne metode, a treći na interpretaciju kvantitativnih i kvalitativnih pokazatelja. Evidentno je da heuristička vrijednost vizuelizacije u mlađim razredima osnovne škole, upućuje na primjenu slikovnog predstavljanja, ne samo u modelovanju linearnih jednačina, nego i u prikazivanju matematičkih pojmova, pravila i rješavanju problema.

---

Dragana Matić

Ugostiteljsko-trgovinsko-turistička škola

Milisav Knežević

Republički pedagoški zavod Republike Srpske

Dragan Matić

Prirodno-matematički fakultet Banja Luka

## **MODERNIZACIJA NASTAVNIH PLANOVA I PROGRAMA IZ MATEMATIKE ZA SREDNJE STRUČNE ŠKOLE U REPUBLICI SRPSKOJ**

### **Apstrakt**

U ovom izvještaju se govori o aktivnostima radne grupe, koja je ispred Republičkog pedagoškog zavoda Republike Srpske zadužena za modernizaciju nastavnih planova i programa iz matematike za srednje stručne škole u Republici Srpskoj. Objašnjena je metodologija rada na osnovu koje je realizovana modernizacija i prikazani su sadržaji predloženih novih nastavnih planova i programa, uz analizu sličnosti i razlika u odnosu na prethodno stanje.

---

Milenko Pikula

Filozofski fakultet Pale

Jelena Bozalo

Filozofski fakultet Pale

## **SLOBODE I OGRANIČENJA UČITELJA U REALIZACIJI NASTAVE MATEMATIKE**

### **Apstrakt**

Sa aspekta intelektualnog razvoja učenika razredne nastave i matematike kao nauke učitelj ima određene slobode i ograničenja u realizaciji nastavnog procesa. U ovom radu bavimo se odnosom komponenti slobodnog i ograničavajućeg kao stalnim realnostima nastavnog procesa. Nastavnik, kao ključni faktor nastavnog procesa, dovoljno dobrim uspostavljanjem odnosa navedenih komponenti razvija i kod učenika osjećaj slobodnog i ograničavajućeg. Ta problematika je sadržajna i značajna kako sa teorijskog, tako i sa praktičnog aspekta.

---

Sanja Maričić

Univerzitet u Kragujevcu, Učiteljski fakultet u Užicu

Krstivoje Špijunović

Univerzitet u Kragujevcu, Učiteljski fakultet u Užicu

## **METODIKA POČETNE NASTAVE MATEMATIKE IZAZOVI I PERSPEKTIVE**

### **Apstrakt**

Promene u savremenoj organizaciji nastave zahtevaju i promene u organizaciji nastave matematike, koji se direktno reflektuju i na promene u metodičkom matematičkom obrazovanju učitelja za rad u izmenjenim uslovima. Autori u radu skreću pažnju na stanje metodike početne nastave matematike danas, ali i izazove i perspektive njenog razvoja. U tom kontekstu ukazuju na neke od problema koji se, pre svega, odnose na

odreivanje njenog mesta u sistemu nauka, nepostojanje jasne teorijske osnove na kojoj se ova naučna disciplina izgrađuje i razvija, skoro isključivu usmerenost studijskih programa prema metodičkoj transformaciji sadržaja, probleme koji prate stručno usavršavanje učitelja na ovom planu nakon završetka studija i drugo. Pored toga, autori skreću pažnju na neke od zahteva koji se postavljaju pred nastavu matematike u mlaim razredima osnovne škole danas, kao što su: usmerenost na razvoj sposobnosti mišljenja učenika, osposobljavanje za primenu znanja, obrazovanje u realnom kontekstu, orijentaciju nastave na obrazovna postignuća učenika, uticaj savremenih tehnologija u tom procesu, koncept inkluzivnog obrazovanja i drugo. Razrešavanje navedenih pitanja i dilema predstavlja izazov za sve one koji se bave problemima metodike početne nastave matematike, a istovremeno ukazuje na pravce i okvire u kojima se metodika kao naučna disciplina ubuduće mora razvijati.

---

Ljubica Diković

Visoka poslovno-tehnička škola Užice

## **JACANJE INTUITIVNOG USVAJANJA POJMOVA - LIMES I NEPREKIDNOST**

### **Apstrakt**

U radu se razmatraju problemi, ali daju i rešenja, vezani za usvajanje veoma bitnih pojmova realne funkcije realne promenljive: limes i neprekidnost, koji su u uskoj vezi. Koliko god većina studenata doživljavala da se radi o "teškim" i "komplikovanim" definicijama u čijoj osnovi je "epsilon-delta" terminologija, zapravo odgovarajućim softverskim rešenjima može se postići pravilno i jako, intuitivno razumevanje ovih pojmova. Cilj rada je u prezentovanju pristupa za prevazilaženje površnog usvajanja ovih fundamentalnih pojmova, kao i izrade tačnih tehničkih rešenja zadataka bez razumevanja, što se u ovoj oblasti veoma često dešava.

---

Darko Drakulić, Milorad Banjanin, Milenko Pikula, Vladimir Vladičić

Filozofski fakultet Pale

## INTERAKTIVNI UDŽBENICI IZ MATEMATIKE U REPUBLICI SRPSKOJ

### Apstrakt

Ekspanzija prenosnih elektronskih uređaja koji se nazivaju tableti započeta je predstavljanjem uređaja iPad 2010. godine. Glavne karakteristike tableta su veliki ekrani osjetljivi na dodir, mala težina i relativno niska cijena, što im daje veoma značajniju ulogu u procesu obrazovanja. Primjena elektronskih interaktivnih udžbenika u nastavi matematike je opravdanija nego u nastavi ostalih predmeta zbog nivoa apstraktnosti sadržaja. Ispravno korišćenje adekvatnih animacija, simulacija i didaktičkih igara može pomoći učenicima u razvijanju apstraktnog mišljenja, kao i u razvijanju interesovanja za učenje matematike. Većina zemalja aktivno radi na razvoju interaktivnih obrazovnih materijala, a Republika Srpska takođe prati taj trend. U ovom radu su opisani koncepti razvoja interaktivnih udžbenika razvijenih u okviru projekta "Interaktivno elektronsko učenje matematike u Republici Srpskoj", koji se realizuje na Univerzitetu u Istočnom Sarajevu a u saradnji sa Univerzitetom u Mariboru. Cilj ovog projekta je razvoj interaktivnih udžbenika iz matematike čiji se sadržaj prilagođava nastavnom planu osnovnih škola u Republici Srpskoj, kao i konteksta za njihovu operativnu, funkcionalnu i pouzdanu primjenu u kontekstu nastave i učenja.

---

Milorad Šuković, Zoran Lovren

Osnovna škola "Sveti Sava" Arandjelovac

## REŠENJE NIJE SAMO REZULTAT

### Apstrakt

Matematičari koji se bave teorijom rešavanja matematičkih problema u svojim radovima ističu, a nastava matematike potvrđuje, da se proces rešavanja matematičkog zadatka odvija kroz četiri osnovne etape, faze: (1)

Analiza uslova i razumevanje zadatka (2) Plan (3) Izvršavanje plana (4) Osvrt na zadatak i rešenje ( provera rešenja, analiza i komentar rešenja, formulisanje odgovora, rezime). Ovo je jedna kratka priča o poslednjoj etapi. Pažnja koja se poklanja nekom zadatku obično završava nalaženjem rešenja. Stiče se utisak da je nalaženje rešenja u čitavom procesu rešavanja najvažnije i jedina njegova svrha. Znamo da nije tako. Kada dođu do rešenja nekog zadatka , učenici, po pravilu, otkače taj zadatak i očekuju novi. Tako se gotovo uvek izostavlja važna i poučna etapa rada osvrt. Zato valja izgraivati saznanje o tome da dobijanjem rešenja (odgovora, rezultata) zadatak skoro nikada nije potpuno iskorišćen, već ostaje još ponešto da se uradi. Osvrt na rešavanje zadatka (svojevrsan pogled unazad, ali i unapred) zgodna je prilika da se istraže veze tog zadatka sa drugim zadacima primena istog postupka u nekoj drugoj situaciji, uopštavanje i slično. Pruža se mogućnost ispitivanja novih ideja i daljeg usmeravanja mišljenja učenika. Na nekoliko primera ukazaćemo na sadržajnije i potpunije rešavanje jedne vrste geometrijskih zadataka u kojima dobijamo jedinstvene rezultate iako uslovima zadatka situacija nije jednoznačno određena.

---

Radoslav Milošević

Filozofski fakultet Pale

## NEKI NOVIJI FILOZOFSKI PRAVCI U MATEMATICI

### Apstrakt

U ovom radu biće obrađeni neki noviji filozofski pravci u matematici: strukturalizam, funkcionalizam, postmodernizam i disfunkcionalizam.

Osnovno načelo strukturalizma je to da objekti formalnih sistema nemaju nikakav prirodan ili unutrašnji identitet, već svoj identitet stiču kroz odnose sa drugim elementima u okviru datog formalnog sistema.

Funkcionalističko shvatanje značenja suštinski se zasniva na kružnoj, depredikativnoj definiciji: identitet strukture jedinice izveden je iz njenih odnosa sa totalitetom elemenata strukture kojoj ona pripada. Postmodernizam jednostavno prihvata sve "paranormalne" posledice formalističke na koje je intuicionizam ukazivao.

Disfunkcionalizam uprkos svom krajnje formalističkom stavu individualno se svodi na formalnu kombinaciju simbola, u smislu nefunkcionalizma.



---

Šefket Arslanagić

Matematički fakultet Sarajevo

## DOPRINOS MATEMATIKE RAZVOJU LIČNOSTI

### Apstrakt

Matematika danas prožima cjelokupno društvo i njena uloga stalno raste jer se njena pomoć traži u situacijama i problemima koji se javljaju i van same matematike. Matematički metodi nisu više privilegija samo znanstvenika, inženjera i tehnologa; oni se sve više koriste za analizu individualnih ponašanja i izučavanja stavova i trendova u društvu kao cjelini. Ovaj razvoj svakako, povećava zahtjev za matematičkom sposobnošću u matematičkom modeliranju, u algoritamskim tehnikama. Zato je matematika integralni dio ljudske kulture, socijalne, ekonomske i tehničke okoline, i to ne samo u sadašnjem obliku već i u svim oblicima koji će se sigurno razviti kao posljedica sve šire sposobnosti brzog računanja.

---

Milan Živanović, Stojkanović Jelena

Kruševac/Bajina Bašta

## NASTAVA STATISTIKE U SREDNJOJ ŠKOLI I MERENJE FREKVENCIJE SAOBRAĆAJA

### Apstrakt

Nastava statistike u četvrtom razredu je završna tema srednjoškolskog matematičkog obrazovanja. Često, zbog pada motivacije i zaokupljenosti pripremama za maturalne radove i prijemne ispite, ta tema ostane nedovoljno prihvaćena od strane učenika. Zbog toga smo pokušali da motivaciju za učenje statistike podignemo kroz praktičnu primenu nastavnih sadržaja u obradi podataka merenja frekvencije saobraćaja u opštini Bajina Bašta. Lokalna administracija je prepoznala korisnost ovog istraživanja za projektovanje novih i rekonstrukciju postojećih saobraćajnica, te je podržala ovu akciju. U ovom radu će biti opisan model aktivne nastave statistike izveden kroz praktičnu primenu rešavanja navedenog konkretnog problema iz neposrednog realnog okruženja.

---

Dejić Mirko

Učiteljski fakultet Beograd

Ivana Jovanović

Osnovna škola Valjevo

## TEORIJSKE OSNOVE REŠAVANJA PROBLEMSKIH ZADATAKA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

### Apstrakt

Rešavanje problemskih zadataka u nastavi matematike ima niz pozitivnih efekata od kojih se u prvi plan ističu: aktiviranje misaonih procesa učenika, misaono angažovanje učenika, izazivanje intelektualne radoznalosti učenika, podsticanje logičkog, kritičkog, apstraktnog i stvaralačkog mišljenja, motivisanje učenika, podsticanje darovitosti učenika, negovanje samostalnosti u radu i sl. Zbog mnogobrojnih kvaliteta do kojih se dolazi rešavanjem problemskih zadataka, pre svega, zbog njihovog pozitivnog uticaja na misaoni razvoj učenika, oni dobijaju sve veći značaj u početnoj nastavi matematike. To je još razumljivije ako se ima na umu da učenike od prvih dana školovanja treba učiti da misle i logički rasuđuju, odnosno osposobljavati ih za rešavanje problema. Teškoće i prepreke, koje su glavna karakteristika problemskih zadataka, su upravo ono što podstie misaoni razvoj učenika i ima pozitivan uticaj na proces učenja. U radu se ukazuje na teorijske osnove rešavanja problemskih zadataka u početnoj nastavi matematike, na sposobnosti učenika koje su od značaja za proces rešavanja problemskih zadataka, na značaj rešavanja problemskih zadataka, odnosno njihov pozitivan uticaj na proces učenja u nastavi matematike. Takođe, ukazuje se i na metode rešavanja problemskih zadataka u početnoj nastavi matematike.

---

Aleksandra Stanković  
OŠ "Sveti Sava" Foča

## INTERNET I DRUŠTVENE MREŽE IZMEĐU ZLOUPOTREBE I SLOBODE

### Apstrakt

Kada neko pokušava da objasni na koji način Internet funkcioniše, obično naglašava da je to neformalan i otvoren medij. Informacije slobodno teku i svima su dostupne, što znači i da svako svoje informacije moe da plasira u svijet. Demokratija, rekao bi neko. Međutim, sve više to liči na anarhiju. Internet je svakako napravio revoluciju u mnogim aspektima društva, a socijalne mreže su napravile svoju revoluciju u okviru interneta. Socijalne mreže, a prije svega Fejsbuk, predstavljaju novi model ponašanja. Internet se smatra slobodnim medijem, i u pristupu nema vremenskog, geografskog, rasnog, polnog, političkog ili drugog ograničavanja. U veini država još uvijek ne postoji zakonska regulativa koja ograničava djelovanje putem ovog medija, te se on slobodno koristi u najrazličitije svrhe. Ovaj rad je napisan sa željom da se ukaže na prednosti i nedostatke korištenja interneta i društvenih mreža, te se pokušava odgonetnuti gdje je granica između upotrebe i zloupotrebe. Dakle u trenutku kada veina nas ima pristup ovom moćnom sistemu, pokušaćemo odgonetnuti kako bi trebalo da se odnosimo prema njemu tako da minimiziramo moguće opasnosti i eventualne štete, kako ne bismo postali žrtva nekog oblika sajber kriminala.

---

Jasmina Milinković

Učiteljski fakultet, Univerzitet u eogradu

## FUNKCIJE IGRE U NASTAVI MATEMATIKE

### Apstrakt

Rad osvetljava mogućnosti korišćenja didaktičkih igara u nastavi matematike sa posebnim osvrtom na matematičke igre. U prvom delu se ukazuje na uobičajeno viđenje igre kao suštinski važne aktivnosti za razvoj matematičkog saznanja u predškolskom periodu. Primećuje se da igra u potpunosti gubi

značaj sa polaskom dece u školu. U tom periodu igra se povezuje sa razonom i vanškolskim, rekreativnim aktivnostima. U nastavku rada analizira se mogućnost ciljanog korišćenja igara i u mlađim razredima osnovne škole. Igre o kojima je reč u radu se mogu koristiti u nastavi matematike u cilju motivisanja učenika, uvežbavanja postupaka, razvijanja sposobnosti komunikacije, itd. Ukazujemo kroz primere da matematičke igre mogu uticati na razvoj matematičkih sposobnosti, vrlina, veština, navika i saznanja. Posebno, se osvetljava značaj igre u podsticanju divergentnog / imaginativnog mišljenja i holističkog razvoja dece. U radu dajemo prikaz odabranih igara iz udžbenika i druge nastavne literature gde su prepoznate mogućnosti primene igara u učenju matematike. Odabrane igre su analizirane sa aspekta funkcije koju mogu imati u nastavnom procesu.

---

Karmelita Pjanić

Pedagoški fakultet Bihać

Sanela Nesimović

Pedagoški fakultet Sarajevo

## **IDENTIFIKACIJA I KLASIFIKACIJA GEOMETRIJSKIH OBLIKA UOČENIH NA FOTOGRAFIJAMA REALNIH OBJEKATA - SLUČAJ STUDENATA RAZREDNE NASTAVE**

### **Apstrakt**

Jedan od zadataka početne nastave geometrije je razvijanje prostornog zora kod učenika. Preporuka je da se ovaj zadatak realizuje povezivanjem geometrijskih sadržaja sa realnim situacijama i objektima. Stoga bi se među osnovnim kompetencijama učitelja trebale naći i kompetencije vezane za prostorni zor, preciznije prostornu vizualizaciju. Sposobnost prepoznavanja geometrijskih oblika koje susreću svakodnevno u različitim okruženjima te sposobnost tačnog i preciznog opisivanja tih oblika korišćenjem geometrijske terminologije pripadaju kompetenciji prostorne vizualizacije učitelja. U radu analiziramo (kvantitativno i kvalitativno) odgovore studenata razredne nastave tokom aktivnosti identifikovanja geometrijskih oblika na 8 fotografija realnih objekata. Analiza odgovora studenata usmjerena je na sljedeće ciljeve: Analizirati termine navedene u

odgovorima studenata, s posebnim osvrtom na tačnost, frekvenciju i raznolikost odgovora. Utvrditi i analizirati kriterije po kojima su studenti klasifikovali geometrijske oblike. Analizirati korištenje termina geometrije ravni nasuprot terminima prostorne geometrije. Razvrstati netačne odgovore studenata.

---

Ima Šehanović

JU gimnazija "Meša Selimović"

Dragana Kovačević

KŠC Sarajevo

## **PRAVILA DJELJIVOSTI**

### **Apstrakt**

Pojam djeljivosti u skupu prirodnih brojeva, učenici prvi puta sreću u šestom razredu osnovne škole. Nakon obrađene nastavne jedinice, učenici bi trebali da znaju rastaviti složeni broj na proste faktore, prepoznati brojeve koji su djeljivi sa 2,3,4,5,9,10 i 15. Trebaju znati odrediti NZS i NZD, te razlikovati proste od složenih brojeva, kao i relativno proste brojeve. Dakle, sa pojmom djeljivosti i pravilima djeljivosti učenici se upoznaju veoma rano, ali je činjenica da ta naučena pravila kasnije rijetko koriste na rješavanju nekih konkretnih zadataka i problema. Kao dokaz za to proveli smo jedno istraživanje u JU Gimnazija "Meša Selimović" u Tuzli i KŠC "Sveti Josip" u Sarajevu. Rezultati su pokazali da učenici na konkretnim zadacima jako malo koriste naučena pravila, te da do rješenja pokušavaju doći uglavnom koristeći digitron, pogađanjem ili rješavanjem nekih sistema, što predstavlja puno teži način.

---

Aleksandra Mihajlović  
Fakultet pedagoških nauka u Jagodini

## POSTAVLJANJE PROBLEMA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

### Apstrakt

Učenici bi trebalo da svojim sopstvenim misaonim naporima aktivno konstruišu znanja. U nastavi matematike ne bi trebalo aktivnosti učenika svesti samo na nalaženje rešenja rutinskih problema, već i onih nerutinskih, nestandardnih i nestrukturiranih. Veoma važnu ulogu u oblasti matematike i matematičkog mišljenja, osim rešavanja problema, ima i postavljanje problema. Naime, u matematici kao nauci postavljanje, formulisanje, generisanje problema predstavlja proces koji zahteva bogato iskustvo i ekspertizu u oblasti, ali i kreativno mišljenje matematičara. Kada učenike angažujemo u postavljanju problema, tada ih zapravo stavljamo u ulogu matematičara kao naučnika i nudimo mogućnost da iskuse nešto drugačiji aspekt matematike. Postavljanje problema omogućava učenicima da prodube svoja matematička znanja, da poboljšaju razumevanje matematičkih koncepata, motiviše ih da razvijaju sopstvene matematičke ideje i podstiče kreativno mišljenje. Ipak, u nastavi matematike se ovoj aktivnosti posvećuje malo vremena. U prvom delu rada daje se prikaz nekih teorijskih razmatranja i istraživanja o aktivnostima postavljanja problema, ukazuje se na njihov značaj, i prikazuju se primeri primene u početnoj nastavi matematike. U drugom delu rada prikazani su rezultati istraživanja sprovedenog među učiteljima čiji je cilj bio da se ispita u kojoj meri primenjuju postavljanje problema u svom nastavnom radu, kao i njihovi stavovi o značaju ovih aktivnosti.

---

Mičo Miletić

Visoka škola za vaspitače strukovnih studija

**TIPIČNE GREŠKE UČENIKA (JEDAN POGLED NA  
ZNAJJE MATEMATIKE KOD UČENIKA OSNOVNIH I  
SREDNJIH ŠKOLA)**

**Apstrakt**

Greške nalazimo ne samo kod slabijih učenika već i kod neospornih stručnjaka u određenim poljima nauke. U tom smislu je neophodna analiza učinjenih grešaka učenika. Najslabije rezultate na raznim testovima učenici pokazuju iz onih područja koja traže logičko rasuđivanje i primenu znanja. Šta i kako dalje da bi se ispravili učinjeni propusti u nastavi.

---

Gordana Maksimović

Kruševac

**PRIMENA SLOBODNOG SOFTVERA U NASTAVI WEB  
DIZAJNA I PROGRAMIRANJA**

**Apstrakt**

Nastava informatike nije ograničena na jedan softverski alat ili razvojno okruženje. Termin slobodan softver ne umanjuje kvalitet softvera i mogućnosti primene. U radu su objašnjeni termini softverska licenca, Free softver, Open softver i sistemi otvorenog koda za upravljanje sadržajem CMS. U nastavi informatike - web dizajna izučava se dizajn statičkih web stranica (HTML i CSS) i rad sa gotovim dizajn rešenjima CMS. U ovom radu je prikazano razvojno okruženje NetBeans. NetBeans IDE je integrisano razvojno okruženje koje omogućava kreiranje web stranica, desktop i mobilnih aplikacija. Pored HTML, CSS, JavaScript, PHP za izradu web stranica, NetBeans podržava i sledeće programske jezike C/C++, Java tako da svoju primenu može imati i u nastavi programiranja.

---

Dragica Milinković

Pedagoški fakultet ijeljina

## KOMPETENCIJE STUDENATA UČITELJSKOG STUDIJA ZA MATEMATIČKO MODELOVANJE

### Apstrakt

Ishodi učenja u visokom obrazovanju predstavljaju kompetencije koje student treba razviti tokom studija, a koje su profilisane kompetencijama fakulteta koji ih školuju. Evropska komisija za unapređivanje obrazovanja naglašava interdisciplinarno i multidisciplinarno obrazovanje budućih učitelja koje podrazumijeva znanja iz predmeta koje predaje, ali i drugih, njima sličnih predmeta, pedagoško-psihološka znanja koja se odnose na razumijevanje razvojnih karakteristika učenika, stilova učenja i kulture učenika, vještine poučavanja u smislu poznavanja strategija, metoda i tehnika, te razumijevanje društvenog i kulturnog konteksta. U tom smislu, u radu se daje teorijski osvrt na opšte i specifične matematičke kompetencije studenata učiteljskog studija, te vrši detaljnije razmatranje kompetencija u oblasti matematičkog modelovanja. U fokusu su "školska znanja" matematičkog modelovanja, znanja učitelja, te njihove kompetencije za matematičko modelovanje. U tu svrhu koncipirali smo istraživanje u kome smo za ispitanike uzeli studente četvrte godine studijskog programa razredne nastave Univerziteta u Istočnom Sarajevu. U obzir smo uzeli pokazatelje ulaznih (UK) i izlaznih kompetencija (IK), vršili njihovu komparativnu analizu, te upoređivanje rezultata IK sa kurikularnim kompetencijama. S obzirom na značaj matematičkog modelovanja u savremenom svijetu, očekujemo da pitanje kompetencija za tu oblast postane ključna tema u pravcu osiguranja kvaliteta matematičkog obrazovanja na svim nivoima.



---

Ivica Boljat

Prirodoslovno-matematički fakultet u Splitu

**USPOREDBA ALICE, NXT-G LEGOMINDSTORMS-A I  
PSEUDO-KODA U POUČAVANJU PROGRAMIRANJA  
POČETNIKA**

**Apstrakt**

Petosatni program poučavanja osnovnih programskih koncepata poput grananja i ponavljanja obuhvatio je 115 učenika drugog razreda gimnazije. Korišteni su različiti alati i programska okruženja: alat za vizualizaciju programa Alice, vizualni programski jezik NXT-G s LegoMindstorms robotima te pseudo-kod kao službeni programski jezik državne mature. Istraženi su stavovi učenika o zanimljivosti i korisnosti programiranja ovisno o spolu učenika i načinu poučavanja programiranja. Odredilo se koliko je način poučavanja programiranja utjecao na promjenu interesa učenika za izbor programiranja kao budućeg poziva. Usporedili su se rezultati svake skupine na testu iz programiranja, posebno za analitička pitanja vezana za vještinu praćenja izvršavanja koda a posebno za sposobnost rješavanja jednostavnih problema u pseudo-kodu. Ključne riječi: Alice; LegoMindstorms; pseudo-kod; poučavanje programiranja; programski jezici.

---

Ivica Luketin

Prirodoslovno-matematički fakultet u Splitu

**INCORPORATING THE STRUCTURE AND MATERIALS  
FROM INOVATIVE MOOC INTO TRADITIONAL PHYSICS  
DIDACTICS SEMINAR BASED ON SCIENTIFIC  
ARGUMENTATION**

**Abstract**

Physics didactics seminar is part of curriculum enabling prospective physics teachers to acquire pedagogical content knowledge necessary to earn Master of Physics educational branch. Several past years versions, besides strong emphasize on cultivating praxis of scientific argumentation

in context of physics history, were research flavoured experimenting with didactical potential of computer augmented reality (remote laboratory, climate network simulation). This year we are realizing seminar whose content is inspired with innovative edX corporation MOOC (massive open online course) testing possibility of teaching simple short course in quantum mechanics and its application in understanding advantages of quantum compared to classical computing. Using online delivery of MOOC study materials (textbook, video lectures) and exercise (forum, quizzes, exams, just in time help) while on-campus social meeting and controlled assessment of competencies we hope to blend the best of traditional academia habits (critical thinking and argumentation) with promises of contemporary computer technology. Key words: physics, scientific argumentation, computer technology, blended MOOC pedagogy.

---

Tatjana Bajić

Visoka škola strukovnih studija za vaspitače u Šabcu

**INFORMATIKA I RAČUNARSTVO ZA STRUKOVNE  
VASPITAČE PLANIRANJE I INTERPRETACIJA  
NASTAVNIH SADRŽAJA**

**Apstrakt**

Polazeći od činjenice da se pojedini korisnički programi mogu prilagoditi potrebama različitih profesija, u savremenom informatičkom društvu početni nivo poznavanja rada u njima se smatra osnovom informatičke pismenosti. Međutim, budući da obuka u bilo kom aplikativnom programu prethodno iziskuje odgovor na pitanje zbog čega, i sa kojim unapred postavljenim ciljem se ona sprovodi, uopštena obuka ne zadovoljava u potpunosti potrebe jednog strukovnog vaspitača u smislu informatičkog obrazovanja. Samim tim nameće se neophodnost za uvođenjem izvesnih teorijskih osnova u nastavni sadržaj predmeta Informatika sa računarstvom za strukovne vaspitače, pri čemu se prilikom planiranja nastavnih sadržaja, prvenstveno mora poći od obrazovnih potreba budućih strukovnih vaspitača iz ove oblasti, kao i od prethodnog predznanja studenata. Imajući u vidu navedene činjenice, u radu se izlaže određen pristup nastavnim sadržajima sa ciljem približavanja i prilagođavanja nivou obrazovanja strukovnih vaspitača.

Takođe se ističe značaj specificiranja određenih mogućnosti pojedinih aplikativnih programa u cilju rešavanja konkretne klase problema sa kojima se strukovni vaspitači susreću, kako bi jasnije uvideli koje prednosti računar može da im pruži tokom njihovog školovanja, kao i u budućem profesionalnom radu. Pored toga, obrazlaže se i uvođenje nastavnih sadržaja iz uvoda u statistiku, značajnih u smislu teorijske podloge za obradu podataka koja je studentima neophodna u metodologiji pedagoških istraživanja.

Vladimir Šašo  
Alfa univerzitet

## **SLOBODAN PRISTUP INTERNETU I NASTAVA INFORMACIONIH TEHNOLOGIJA**

### **Apstrakt**

Slobodan pristup Internetu ima mnoge važne implikacije, a jedna od njih je njegova upotreba u nastavi. Mnogi autori istraživali su različite konsekvence slobodne upotrebe Interneta u nastavi različitih stručnih predmeta (stranog jezika, geografije, računarstva). U ovom radu biće izloženi primeri ovakve upotrebe Interneta, a posebna pažnja će biti posvećena njegovoj upotrebi u univerzitetskoj nastavi Informativnih tehnologija.

Gordana Đorđević  
Alfa univerzitet

## **UNAPREĐENJE NASTAVNIH PROCESA PRIMENOM INFORMACIONIH TEHNOLOGIJA**

### **Apstrakt**

Savremeno društvo sve više bazira na informacionim tehnologijama koje postaju deo svakodnevnog života ljudi. Koncept "informativno društvo" upravo podrazumeva intenzivniju upotrebu ovih tehnologija u poslovanju, upravi, bankarstvu, zdravstvu, obrazovanju. Primena informacionih tehnologija u nastavi, a posebno slobodno korišćenje edukativnih i drugih softvera, vodi ka unapređenju realizacije i krajnjih efekata nastavnih procesa.

---

Bernardin F. Ibrahimović  
Pedagoški fakultet Univerziteta u Bihaću

## PITAGORINE TROJKE

### Apstrakt

Uređenu trojku prirodnih brojeva  $(x, y, z)$  zovemo Pitagorina trojka ako su  $x$  i  $y$  katete, a  $z$  hipotenuza nekog pravouglog trougla. Ako su brojevi  $x$ ,  $y$  i  $z$  relativno prosti onda se takva trojka zove primitivna Pitagorina trojka. U radu se analiziraju mogući oblici Pitagorinih trojki i određene zakonitosti o elementima Pitagorinih trouglova, a zatim se kao posljedica analizira rješivost nekih nelinearnih Diofantovih jednačina.

---

Petar Vuca  
Filozofski fakultet Pale

## NASTAVA FIZIKE U KONTEKSU PROMENA U OBRAZOVANJU

### Apstrakt

Pitanje rezultata obrazovnog procesa u novije vreme zaokuplja društvo. U savremenom društvu tradicionalna nastava, koja je zasnovana na memorisanju i reprodukciji činjenica, nije u mogućnosti razviti kompetencije potrebne za izazove i tempo života kakvog ga znamo u današnjem svetu. Dosadašnja istraživanja su pokazala da reprodukcija znanja razvija pasivnost podložnost, i poslušnost nego kreativno mišljenje i snalažljivost u novim životnim situacijama.

Živimo u vremenu u kojem se znanje multiplicira neverovatnom brzinom, da više nije moguće izučiti neko zanimanje u ranom periodu života u kojem se školujemo i smatrati to poglavlje života okončanim, kako je to bio slučaj u devetnaestom i dvadesetom veku. Teško prihvatamo činjenicu i argumente da je obrazovni proces savremenog doba doživotni proces. Danas je važnije da učenik/student zna kako odabrati informaciju koja mu je potrebna i kako odabranu informaciju, upotrijebiti je, nego je memorisati. Važnije nego ikad je operativno znanje. Kako nova saznanja i

činjenice aktivno primjeniti u životu, nego memorisati mnogobrojne informacije. Prelaskom na doživotno obrazovanje, je izuzetno bitna prilagođenost znanja određenom životniom dobima učenika/studenta u nastavnom procesu.

---

Mirko Radić

University of Gavle, Sweden

## GEOGEBRA AND PATTERNS OF VARIATION

### Abstract

This paper is a part of the ongoing project at University of Gavle concerning issues with teaching mathematics at a university level from a teachers perspective. As a theoretical framework we use Variation theory.

Variation theory is a theory of learning which can be seen as an expansion of phenomenography, which explores the qualitatively different ways of experiencing or understanding a phenomenon, especially in an educational context. Learning, according to Variation theory is defined as a change in the way a person experiences a particular phenomenon and is associated with a change in discernment in that person's structure of awareness. This means that there is a change in the critical aspect(s) of the phenomenon that the learner simultaneously focuses on after learning has taken place; the learner is able to discern critical aspects that he or she could not see before. A significant feature of Variation theory is its strong focus on the object of learning. A central assumption is that variation is prerequisite for discerning aspects of object of learning. Hence the most powerful didactic factor to students' learning is how the object of learning is represented in a teaching situation. In order to clarify and understand what enables learning in one situation and not in another, a researcher should focus on discerning what varies and what remains invariant under a lesson. In order to help learners appropriate a particular object of learning, a certain pattern of variation and invariance in the learning environment must be implied. Therefore, the professional role of a teacher is to design a learning environment that enables students to discern the critical aspects of the object of learning, with the systematic and conscious use of variation as a pedagogical tool. Teachers may make use of the following four principles when designing the patterns of variation and invariance [1]:

Contrast: "– In order to experience something, a person must experience something else to compare it with."

Generalization: "– In order to fully understand what three is, we must also experience varying appearances of three."

Separation: "– In order to experience a certain aspect of something, and in order to separate this aspect from other aspects, it must vary while other aspects remain invariant."

Fusion: "– If there are several critical aspects that the learner has to take into consideration at the same time, they must all be experienced simultaneously."

According to [2] these patterns of variation create opportunities for the students to understand the underlying formal abstract concept. In order to generate the patterns of variation, we use the dynamical nature of GeoGebra software, which has the ability to "visually make explicit the implicit dynamism of 'thinking about' mathematical, in particular geometrical, concepts." ([2], p197)

In this paper we illustrate how to create the variation patterns mentioned above when teaching some of concepts of university calculus course by using GeoGebra.

**STUDENTSKA SEKCIJA**

**STUDENT'S SECTION**





---

Marko Rajković, Ivan Bartulović

University of Primorska, Faculty of Mathematics, Natural Sciences and  
Information Technologies

supervisor dr. Štefko Miklavič

## POLYNOMIAL TIME PRIMALITY TESTING

### Abstract

Prime numbers are of great significance in number theory, but also in modern cryptography. Most of modern cryptographic protocols use factoring numbers composed of product of two large prime numbers. Thus, the problem of distinguishing prime numbers from the rest is still interesting and important as well and therefore there is a need to have efficient primality testing algorithms. Although there had been many probabilistic algorithms for primality testing, there was not a deterministic polynomial time algorithm until 2002 when Agrawal, Kayal and Saxena came with an algorithm, popularly known as the AKS algorithm, which could test whether a given number is prime or composite in polynomial time. This project is an attempt at understanding the idea behind this algorithm and the principles of mathematics that is required to study it. Finally, the project provides an implementation of the algorithm using Software for Algebra and Geometry Experimentation (SAGE) and arrives at conclusions on how practical it is.

---

Đorđe Žikelić

Matematička gimnazija Beograd

mentor dr Đorđe Baralić

## MNOGOUGLOVI UPISANI U CELOBROJNU REŠETKU

### Apstrakt

Definišemo rešetku, kao i osnovne pojmove iz ove oblasti, a nakon toga se skoncentrišemo na celobrojnu rešetku i njene osobine. Na početku

se bavimo mnogouglovima upisanim u celobrojnu kvadratnu rešetku, i navodimo neke od najinteresantnijih njihovih osobina (Pikova teorema, teorema Minkovskog, Skotova ocena...). Nakon toga se bavimo celobrojnim rešetkama u  $\mathbb{Z}^n$ ,  $n > 2$ . Rešetke se često koriste i za interpretaciju raznih problema, u cilju napadanja problema na neuobičajeni način. Zato, za kraj predstavljamo jednu od interpretacija na Frobenijusovom problemu novčića, gde se bavimo i još nekim rezultatima vezanim za ovaj problem.

---

Mina Šekularac

Matematička gimnazija Beograd

mentor dr Aleksandar Pejčev

## TESELACIJE

### Apstrakt

Područje istraživanja u ovom radu predstavljaju teselacije koje su poznate još od antičkog perioda. Termin teselacije, predstavlja prekrivanje, odnosno popločavanje različitih površina geometrijskim oblicima, koji se ponavljaju bez međusobnog preklapanja i formiranja šupljina između sebe. Ovako složeni oblici stvaraju različite šare, raznih oblika i boja, koje se mogu videti na raznim mestima na popločavanju, mozaicima i vitražima.

---

Vesna Miletić

Filozofski fakultet Pale

mentor dr Milenko Pikula

## O JEDNOM SISTEMU NELINEARNIH JEDNAČINA U PROSTORU $E^4$

### Apstrakt

U spektralnoj teoriji diferencijalnih operatora značajna uloga pripada takozvanim inverznim spektralnim zadacima. Pri rješavanju takvih zadataka dolazi se do sistema nelinearnih jednačina u prostoru  $E^4$ . Rad je posvećen rješavanju takvog sistema.

---

Branko Grbić  
Matematička gimnazija Beograd  
mentor Miloš Đorić

## KRIVE U RAVNI

### Apstrakt

U ovom radu razmatramo krive u ravni sa interesantnim svojstvima i prikazujemo ih u kanonskom, parametarskom ili polarnom obliku. Na početku definišemo krivinu i torziju, a zatim navodimo krive i dokazujemo njihova svojstva.

CIP - Каталогизација у публикацији  
Народна и универзитетска библиотека  
Републике Српске, Бања Лука

51(048.3)

МАТЕМАТИЧКА конференција Републике Српске (4 ; 2014 ;  
Требиње)

Knjiga rezimea / Četvrta matematička konferencija Republike  
Srpske, Trebinje, 06-07. juni 2014. = Book of Abstracts / 4th  
Mathematical Conference of the Republic of Srpska ; [glavni urednik  
Milenko Pikula]. - Trebinje : Fakultet za proizvodnju i menadžment,  
2015. - 123 str. ; 30 cm

Tekst na srp. i engl. jeziku. - Bibliografija uz pojedine radove.

ISBN 978-99976-600-2-2

COBISS.RS-ID 4886808