Izdavač

Univerzitet u Istočnom Sarajevu

Fakultet za proizvodnju i menadžment Trebinje

Stepe Stepanovića bb, 89 101 Trebinje, BiH

Telefon: +387 (0)59 490 654

E-mail: fpmtrebinje@gmail.com

University of East Sarajevo
Mathematical Society of the Republic of Srpska

FOURTH MATHEMATICAL CONFERENCE OF THE REPUBLIC OF SRPSKA

PROCEEDINGS

Trebinje, 06-07 June 2014

VOLUME II
Trebinje, 2015

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE

ZBORNIK RADOVA
TOM II

Izdavač:
Fakultet za proizvodnju i menadžment Trebinje, Univerzitet u Istočnom Sarajevu

Za izdavača:
Prof. dr Dušan Jokanović

Glavni urednik:
Prof. dr Milenko Pikula

Tehnički urednik i kompjuterski slog:
Marina Milićević

Lektura i korektura:
Tamara Dursun

Štampa:
"Grafokomerc" a. d. Trebinje

Tiraž:
300

Trebinje, 2015.

COBISS.RS-ID 5048856
ISBN 978-99976-600-4-6

Sadržaj

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Matematičke institucije u Srbiji do Velikog rata

Aleksandar M. Nikolić
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu
nikaca@uns.ac.rs

Pregledni rad

Apstrakt

Institucionalni razvoj matematike u Srbiji počiva na dve nacionalne institucije: visokoškolskoj ustanovi pod nazivom Licej, osnovanoj 1838. (od 1863. Velika škola a danas Univerzitet u Beogradu) i Društvu srpske slovesnosti, osnovanom 1841. (od 1864. Srpsko učeno društvo, od 1886. Srpska Kraljevska Akademija - SKA, pa Srpska Akademija Nauka - SAN, danas Srpska akademija nauka i umetnosti - SANU). Njihovom saradnjom i preplitanjem aktivnosti, prvenstveno zaslugom Mihaila Petrovića i Bogdana Gavrilovića, osnovan je na Univerzitetu u Beogradu Matematički seminar koji je posle Drugog svetskog rata, pod nazivom Matematički institut SANU, prerastao u najvišu srpsku matematičku instituciju. U okviru Matematičkog seminara - instituta razvijale su se Petrovićeva matematička škola izmedju dva svetska rata i Karamatina škola matematičke analize posle Drugog svetskog rata. Danas su one poznate kao Beogradska škola matematike.

AMS Mathematics Subject Classification (2010): 01A72, 01A73, 01A74
Key words and phrases: Lyceum, Higher School of Belgrade, Mathematics Seminar, Serbian Royal Academy, Mathematical Institute, University of Belgrade, Serbian Academy of Sciences.

1 Uvod

Ovaj rad predstavlja pregled razvoja matematičkih institucija u Srbiji od vremena oko sredine XIX veka, kada je osnovana prva viša škola, do Velikog rata i prve polovine XX veka, kada su rezultati rada više srpskih matematičara već poznati i priznati u matematičkom svetu. Tokom tog perioda od nešto više od 60 godina, koji je vrlo kratak u ukupnoj istoriji naučne misli i istoriji matematike kao naučne discipline, Srbija je od jedne nerazvijene zemlje u svim aspektima obrazovanja, uspela uspostaviti poziciju u svetu matematike koja bi se mogla smatrati ravnopravnom sa najrazvijenijim evropskim zemljama.

Nakon samostalne i prosperitetne srpske države koja se kroz čitav srednji vek u duhovnom i kulturnom smislu oslanajala na Vizantijsko carstvo, polovinom petnaestog veka došlo je do velikih promena. Ukupni razvoj srpskog naroda iz temelja je uzdrman potpunim turskim osvajanjem i okupacijom teritorije srpske drzave.

Vladajuća klasa je iskorenjena, institucije uništene, a narod se posle mnogobrojnih seoba našao na velikom prostoru i severno od reka Save i Dunava - u okviru Habzburške monarhije - i južno od reka Save i Dunava - u okviru turske carevine. Turska vlast nad Srbima trajala je više od 400 godina za deo naroda koji se oslobodio ustancima u XIX veku i oslobodilačkim Balkanskim ratom (1912), a oko 250 godina za deo naroda koji je živeo u Panonskoj niziji, na teritoriji Habzburške monarhije. Taj severni deo srpskog naroda, većinom sa teritorije današnje Vojvodine, izborio se kod Habzburških vlasti za dozvolu otvaranja osnovnih i srednjih škola na srpskom jeziku, a podižu se i gotovo sve najvažnije institucije mlade nacionalne kulture srpskog naroda. Te činjenice kao i opšti kulturno-prosvetni uslovi u Habzburškoj državi doveli su do formiranja obrazovanog i imućnog gradjanskog sloja jednog dela srpskog naroda, ali i značajnog broja učenih ljudi, kulturnih, umetničkih i naučnih radnika. Kulturno obrazovne prilike medju Srbima koji su ostali pod turskom vlašću bile su bitno drugačije. Vladala je skoro potpuna nepismenost i obrazovna zaostalost. Organizovano otvaranje škola počelo je početkom XIX veka posle prvih ustanaka protiv Turaka 1804. i 1815. godine, mada je tek Hatišerifom iz 1830. godine, Srbima dozvoljeno da sami ustanovljavaju škole, i druge državne institucije.

2 Licej - prva visoka škola u Srbiji

Prva četvorogodišnja srednja škola u Srbiji, 1835. godine nazvana Gimnazijom, otvorena je 1833. godine u Kragujevcu, tadašnjoj srpskoj prestonici, sa 16 učenika i jednim nastavnikom. Bez zasebne zgrade, stručnog kadra, nameštaja i osnovnih učila, škola je teško ispunjavala osnovni cilj zbog kojeg je i osnovana - da širi prosvetu i da obrazuje i spremi sposobne mladiće za državnu službu. Knez Miloš Obrenović je Ukazom iz 1838. godine produžio gimnazijsko školovanje na šest godina i time osnovao Licej koji je predstavljao vrhunac dotadašnjih nastojanja da Kneževina Srbija i srpski narod dobiju školu na kojoj bi se sticala najviša znanja i spremali državni činovnici.[1] Kako u Srbiji tog vremena nije bilo dovoljno kvalifikovanih profesora za rad na Liceju, Miloš Obrenović je uputio poziv svim učenim Srbima koji su živeli širom Evrope da svojim dolaskom u tek oslobodjenu i osamostaljenu Srbiju pomognu u prvim godinama njegovog rada. Tom se pozivu odazvao mali broj onih kojima je upućen, pa su časove iz svih predmeta i oblasti morali da drže razni državni činovnici, tada najobrazovaniji gradjani Srbije. Prve godine u novoosnovanom Liceju predavani su: filozofija, opšta istorija, čista matematika, statistika, nemački jezik i crtanje. Sve te predmete su predavala samo dva gimnazijska profesora - Petar Radovanović i Atanasije Teodorović! Sledeće godine navedenim predmetima pridodati su i fizika, geometrija i francuski jezik, pa je povećan i broj nastavnika. Većina njih još uvek nije bila stručno kvalifikovani za rad u školi i za predmete koje su predavali, ali

[1] U periodu Prvog srpskog ustanka 1808-1813. godine radio je Dositejev Licej kao prva viša prosvetna ustanova u Srbiji. Nakon propasti ustanka i škola je zatvorena.

medju prvim nastavnicima bilo je i onih koji su u srpskoj kulturi i nauci ostavili značajan trag. Navešćemo samo neke od njih - Josif Pančić (1814-1888) srpski lekar, botaničar, prvi predsednik Srpske kraljevske akademije, književnik Jovan Sterija Popović (1806-1856), osnivač srpske drame, Matija Ban (1818-1903) koji je bio pisac, političar i diplomata, osnivač nacionalnog programa ujedinjenja i oslobodjenja Južnih slovena (Srba i Hrvata), Konstantin Branković (1814-1865) pedagog, filozof, pravnik, višegodišnji rektor Liceja, Vuk Marinković (1807-1859) fizičar, autor udžbenika iz fizike i osnivač kabineta za fiziku na Liceju.

Najveći problem u nastavničkom kadru bio je sa školovanim predavačima matematike i sadržaja prirodnih nauka (fizike, hemije, biologije, geografije, geologije, astronomije). Nastavu matematike držali su razni učitelji, školski nadzornici, pravnici, sveštenici, inženjeri. Niko od njih nije po osnovnom obrazovanju bio matematičar, mada su svi oni u toku školovanja slušali ili polagali neke matematičke predmete različitih sdržaja i nivoa. Njihova predavanja nisu bila ni na visokoškolskom, a kamoli ne na naučnom nivou, ali u tadašnjoj Srbiji prikladnijih i matematički obrazovanijih ljudi nije bilo. (vidi [24, str. 85-86]). Matematičke nauke - matematika, fizika, mehanika - su u svojim skromnim okvirima predavane i izučavane uglavnom u cilju njihove primene u tehnici i vojnim naukama. Posebnu poteškoću u nastavi matematičkih nauka predstavljao je nedostatak udžbenika što je tesno povezano sa reformom srpskog jezika filologa Save Mrkalja i Vuka Karadžića. Reformisana srpska ćirilica je zvanično uvedena u Srbiji 1868. godine. Skoro sve matematičke knjige na srpskom jeziku, od prve srpske aritmetike iz 1767. godine Vasilija Damjanovića (1734/35-1792) (vidi [17], [18]) pa sve do knjiga iz druge polovine XIX veka, nastale su u Vojvodini koja je bila u okviru Habsburške monarhije. One su napisane crkvenoslovenskim ili slavenosrpskim jezikom koji su bili vrlo siromašni matematičkom terminologijom evropske matematike i koji nisu bili lako razumljivi Srbima koji su živeli u okviru novoosnovane kneževine Srbije. Svakodnevni govorni jezik se razlikovao od tih oblika. To je značajno otežavalo i prevode stranih ali i pisanje originalnih, srpskih, udžbenika. Problem matematičke terminologije na srpskom jeziku ostao je sve do početka XX veka. To pitanje ponovo je otvoreno posle drugog svetskog rata kada je u okviru novoosnovanog Matematičkog instituta formirana Komisija za terminologiju čiji su rezultati rada dati u dve publikacije: *Matematička terminologija za osnovne i srednje škole* (Beograd, 1963) i *Rečnik matematičkih termina* (Beograd, 1966).

Za prvog rektora Liceja postavljen je Atanasije Nikolić (1803-1882), koji je po obrazovanju inženjer geodezije bio i prvi profesor matematike. On na Liceju ostaje do kraja oktobra 1842. godine kada je na srpskom prestolu došlo do smene dinastija i kada odlazi za načelnika Popečiteljstva unutrašnjih dela gde ostaje 16 godina. Bio je zadužen za policiju, poljoprivredu, gradjevinarstvo, saobraćaj, vojsku. Svojim rezultatima i delatnošću u svim tim oblastima ostavio je značajan trag.[2] Atanasije Nikolić je za učenike Liceja napisao prve udžbenike iz alge-

[2]Kovaček, B., Teatar Atanasija Nikolića, Zbornik radova Srpskom narodnom pozorištu 1861-1986, Novi Sad, 1986, s. 207-222.

bre *Algebra - ustrojena za upotrebljenije slišatelja filosofije u Liceumu Knjažestva Serbije* (1839) i geometrije *Elementarna geometrija - ustrojena za upotrebljenije slišatelja filosofije u Liceumu Knjažestva Serbije* (1841). Udžbenici su bili na elementarnom nivou i nisu bili originalno delo. On se verovatno poslužio nekim sličnim udžbenicima korišćenim u Austrougarskoj koje je prilagodio tadašnjim potrebama u Srbiji (vidi [11], [28]). Nikada ništa nije napisao iz matematike kao nauke, pozivao je na širenje naučnih znanja bez rada u nauci i bez ličnog stvaralaštva, a u svojim javnim istupima čak je često govorio protiv svakog naučnog rada, posebno u matematici, jer, po njegovom mišljenju, neobrazovana ili poluobrazovana sredina kakva je tada bila Srbija, to ne bi mogla razumeti niti prihvatiti (vidi [20, str. 36]). Izdvajamo i Emilijana Josimovića (1823-1897) koji je bio medju istaknutijim profesorima na Liceju, Vojnoj akademiji i, kasnije, na Velikoj školi. Inženjersko obrazovanje i diplomu stekao je na Bečkoj Politehnici, bio je član Društva srpske slovesnosti i Srpskog učenog društva, rektor Velike škole, pisac prvog, obimnog u tri dela napisanog, visokoškolskog matematičkog udžbenika *Načela više matematike*[3] na srpskom jeziku, prvi srpski urbanista poznat kao autor urbanističkog plana Beograda iz 1867. godine. Pored matematike, predavao je geodeziju, arhitekturu, mehaniku i nacrtnu geometriju. Josimović je imao ugled matematičara, mada nije objavio nijedan rad iz ove nauke.

Osnivanjem i radom Liceja ostvaren je jedan veoma važan cilj - omogućiti novim naraštajima nastavak studija na evropskim univerzitetima, i, posle sticanja univerzitetskog obrazovanja i diploma, povratak u Srbiju i prenošenje budućim generacijama tamo stečenog znanja, iskustva, kulture, i na taj način približiti svoju mladu, tek oslobodjenu srpsku državu većini naprednih evropskih zemalja.

3 Velika škola - zora srpske matematike

Na inicijativu svojih profesora, Licej je 1841. godine premešten u Beograd, nastava se u početku odvijala u jednoj privatnoj kući, a od 1844. godine, kada se u školskom sistemu zvanično uvodi mesto i rang Liceja kao velikog učilišta, u Konaku kneginje Ljubice. Na Licej se svake godine upisuje prosečno po 50 djaka-licejaca. Godine 1863. Licej je reformisan i prerasta u Veliku školu koja je preseljena u Kapetan-Mišino zdanje, palatu Miše Anastasijevića, tada najbogatijeg čoveka u Srbiji. Kao naslednica Liceja i prethodnica današnjeg Beogradskog univerziteta, Velika škola je postala kombinacija klasične gimnazije i visoke škole, a Zakonom o ustrojstvu definisana kao naučna institucija za visoko i stručno obrazovanje. To je bila najviša obrazovna institucija u Srbiji do 1905. godine. Veliku školu su u početku činila tri fakulteta - Filozofski, Tehnički i Pravni. Studije na Filozofskom fakultetu trajale su tri godine (do 1880. godine), a na Pravnom i Tehničkom fakultetu četiri. Ni u okviru Velike škole matematika se još uvek nije studirala

[3] Prvi deo je izašao 1858. na 253 strane, drugi deo 1860. i ima 296 strana, a treći 1872. i ima 198 strana. U prvom delu je izložena teorija funkcija, teorija jednačina i teorija redova. U drugom delu je izložen diferencijalni i integralni račun funkcija jedne i više promenljivih i varijacioni račun. Treći deo je sadržao analitičku geometriju u ravni.

kao posebna naučna oblast, već su studenti dobijali široko prirodno-naučno obrazovanje na Filozofskom fakultetu, ili su slušali višu matematiku i sticali upotrebno znanje matematike na Tehničkom fakultetu. U okviru Liceja kao i u prvim godinama rada Velike škole, najviše su se razvijale "nacionalne" nauke, društvene nauke korisne za državu i one prirodne nauke - botanika, zoologija, mneralogija, geologija - koje su se odnosile na upoznavanje zemlje i njenih prirodnih bogatstava. Matematika, fizika, hemija, astronomija razvile su se kasnije i njihov razvoj je tekao sporije jer se u političkim krugovima smatralo da nije potrebno trošiti energiju i novac na nauke od kojih država nema koristi (vidi [3], str. 151])!

Paralelno sa otvaranjem prvih gimnazija i Velike škole, 1841. godine osnovano je Društvo srpske slovesnosti kao preteča današnje Srpske akademije nauka i umetnosti. U njemu se prvenstveno vodila borba za srpski jezik, dok su ostale nauke bile vrlo slabo zastupljene. To naročito važi za matematičke i prirodne nauke. Godine 1864. Društvo srpske slovesnosti je preraslo u Srpsko učeno društvo, a u Odeljenje za prirodne i matematičke nauke ušli su E. Josimović i K. Branković. U XXV knjizi Glasnika Učenog društva za 1869. godinu izlazi i prva matematička rasprava inženjera Dimitrija Stojanovića (1841-1905) pod naslovom "Šturmova teorema". To je bio elementaran rad u kome je prepričano rešenje francuskog (švajcarskog) matematičara Šturma (Jacques Charles François Sturm) koji je formulisao teoremu koja danas nosi njegovo ime i koja se odnosi na lokalizaciju i utvrdjivanje broja realnih korena polinomske jednačine koji se nalaze izmedju datih granica. Na osnovu tog rada Stojanović je primljen u Srpsko učeno društvo. Godine 1886. Srpsko učeno društvo dolazi u sukob sa Ministarstvom obrazovanja, i na jednu godinu je suspendovan njegov rad. Tokom sledećih godina članstvo Društva se značajno smanjilo i njegova aktivnost se odvijala paralelno sa novoosnovanom Srpskom kraljevskom akademijom sve do njihovog spajanja 1892. godine. U skladu sa medjusobnim dogovorom, osmorica članova Srpskog učenog društva postali su redovni članovi Srpske kraljevske akademije, dok su ostali članovi ušli u novu naučnu istituciju kao dopisni članovi.

Za početak institucionalnog razvoja matematike u Srbiji važna je 1873. godina, kada se na Velikoj školi u okviru Filozofskog fakulteta osnivaju dva odseka - Istorijsko-filološki i Prirodno-matematički - kao i Katedra za matematiku u okviru Prirodno-matematičkog odseka. Višu matematiku će, već od ranije na Tehničkom, a sada i na Filozofskom fakultetu sve do 1887. godine redovno predavati samo profesor Dimitrije Nešić (1836-1904), jedna od ključnih ličnosti srpske nauke tog vremena, koje je naš istaknuti istoričar matematike Dragan Trifunović (1930-2008) nazvao zora srpske matematike. Kako se njegova nastavna i naučna aktivnost odvijala u polju matematike, i kako je on prvi Srbin autor većeg broja matematičkih rasprava objavljenih u izdanjima Srpskog učenog društva (4) i Srpske kraljevske akademije (5), sa pravom se Nešić može smatrati prvim srpskim matematičarom. Mada njegovi radovi ne sadrže velike rezultate koji se pamte i kojima se generacije koriste, oni pokazuju širinu Nešićevog znanja, preciznost u dokazu i savesnost u obradi i izboru problema (vidi [31], str. 17]). Naglasićemo da ni on nije imao striktno matematičko obrazovanje, već je matematiku slušao i učio studirajući tehničke nauke. On je po završetku dve godine opštih studija prirodno-matematičkih nauka na Liceju, 1855. godine otišao na dalje školovanje u inostranstvo kao državni pitomac. Po povratku sa sedmogodišnjih studija u Beču (Velika tehnička škola, 1855-1858) i Karlsrueu (Politehnika, 1858-1862) preuzeo je predavanja iz matematike na Liceju i kasnije na Velikoj školi. Bio je redovan član Srpskog učenog društva i jedan od prvih 16 postavljenih članova SKA, član JAZU, kao i budući rektor Velike škole i predsednik SKA. U svojim kursevima Nešić je predavao opštu euklidsku geometriju, trigonometriju, analitičku geometriju, kombinatoriku, algebru i diferencijalni i integralni račun. Po prvi put u Srbiji uvodi osnovne pojmove iz teorije determinanata i savremen kramerovski prilaz rešavanju linearnih jednačina i linearnoj algebri. U istoriji srpske nauke ostaće zapamćen kao autor kvalitetnih visokoškolskih matematičkih udžbenika[4], autor Zakona o merama i teksta njegovog objašnjenja (1873) čime je u Srbiji uvedem metarski sistem mera, inicijator reforme nastave matematike na Velikoj školi - uspeo je da nedovoljno odredjen stari kurs matematike podeli na nižu i višu matematiku, da se izbori da matematičar predaje samo matematiku a ne i arhitekturu, mehaniku, geografiju, fiziku, ali i da matematiku predaju samo matematičari.[5]

Njegovim se zalaganjem Katedra za matematiku Prirodno-matematičkog odseka Filozofskog fakulteta 1885. godine podelila na dve katedre - za višu i za nižu matematiku. Kurs niže matematike je obuhvatao analitičku geometriju i trigonometriju, a u okviru kursa više matematike predavani su algebarska analiza, kombinatorika i osnovni elementi infinitezimalnog računa. Usled značajno povećanog obima posla, Nešić je od ministarstva tražio pomoć u ljudstvu, ali ju sve do 1887. godine nije dobijao[6]. Te godine za profesora niže matematike na Velikoj školi dolazi Bogdan Gavrilović (1864-1947), doktor filozofije-matematike Univerziteta u Budimpešti. Odbranivši tezu "O predstavljanju jednogranih analitičkih funkcija" (1887) (na madjarskom), postao je drugi matematičar u Srbiji sa doktoratom nauka. Pre nego što je doktorirao, Gavrilović je 1883. godine na Univerzitetu u Budimpešti položio profesorski ispit i usavršavao se na univerzitetima u Berlinu, Pragu i Parizu. U Berlinu je slušao predavanja kod čuvenog Karl Vajerštrasa. Po naučnom radu on je predstavljao prelaz od Nešića ka Mihailu Petroviću, iako se sa naučnim radovima javio znatno posle Petrovića. Nije bio plodan naučnik i ni on nije objavljivao radove u inostranim časopisima, već su štampani samo na srpskom jeziku u izdanjima Srpske akademije nauka u Beogradu i Jugoslovenske akademije znanosti u umetnosti u Zagrebu, i uglavnom su elemen-

[4] *Trigonometrija*, Beograd 1875, s. 496, *Nauka o kombinacijama*, Beograd 1883, s. 132, *Algebarska analiza I i II*, Beograd 1883, s. 582 i 667.

[5] Opširnije o Dimitriju Nešiću videti u [36].

[6] Tako se 1871. iz Ciriha sa diplomom VI-A odeljenja Ciriške politehnike, odeljenja na kome su kasnije studirali i Albert Ajnštajn i njegova supruga Mileva Marić, u Srbiju vratio Petar Živković (1847-1924). Pre odlaska na studije u Cirih on je završio i Tehnički fakultet Velike škole (1867). Iako je Nešiću trebao asistent i iako je Živković završio takve dve škole i direktno uputio molbu ministarstvu da se razmotri njegovo postavljenje i zaposlenje na Velikoj školi, bio je odbijen. Radio je kao gimnazijski profesor, ali i sa te pozicije uspeo je da postane redovan član Srpskog učenog društva i dopisni član SKA (vidi [33]).

tarnog nivoa. Njegova dva udžbenika - *Teorija determinananata*, (1899) i *Analitička geometrija* (1896) - napisana na visokom univerzitetskom nivou i danas pokazuju izvesnu svežinu i modernost pristupa ([35, str. 10]). Bio je dugogodišnji profesor Velike škole i Univerziteta u Beogradu, kasnije rektor Beogradskog univerziteta, dopisni član JAZU i redovan član i predsednik SKA. U srpskoj istoriji nauka ostaće zabeležene njegove ogromne zasluge u stvaranju matematičke škole u Beogradu i u nastanku Beogradskog univerziteta.[7]

Nije bio lak rad srpskih matematičara druge polovine 19. veka. U sredini u kojoj se gradjanska kultura tek radjala, sa skoro nikakvim materijalnim sredstvima, u narodu rascepkanom u više država, nije bilo povoljnih uslova ni za kakav naučni rad, a najmanje za matematičke teorije (vidi [9, str. 201-204]). Bogdan Gavrilović je u takvu sredinu došao kao mlad naučnik, sa evropskim shvatanjem nauke i kulture, i sav se posvetio nauci i Univerzitetu. Tada u istoj nameri nije uspeo Dimitrije Danić (1862-1932) berlinski djak koji je 1885. doktorirao u Jeni i tako postao prvi doktor matematike u srpskom narodu[8].

U prvim godinama rada Velike škole najveći problem bio je veliki nedostatak udžbeničke i naučne literature. Pomalo je nejasno kako su prvi srpski diplomci uopšte uspevali da polože teške prijemne ispite po visokim školama Evrope. To je bio njihov veliki uspeh! Profesor Nešić je dobro znao da nauka nema granica, da su matematičke nauke svojina celog sveta, da ne može biti nacionalnih medja. Smatrao je da je nužno da matematičari u Beogradu budu u stalnom dodiru sa stranim stvaraocima, da strane naučne rezultate treba prikazati u Beogradu, ali i srpske u svetu. Razmena, saradnja, ali i savremena literatura i otkrivanje matematičkih problema, to su njemu tada bili najvažniji i neophodni preduslovi za razvoj nauke. Kao rezultat takvih ideja i nastojanja gostovao je u Srpskoj kraljevskoj akademiji eminentni češki matematičar iz Brna Matijas Lerh (Mathias Lerch (1860-1922)) kao prvi strani matematičar koji je objavio čak tri naučna rada u Glasu SKA[9] i 1888. godine održao predavanje na Akademiji. Nešić je takodje 1871. godine osnovao prvu matematičku biblioteku i polako počeo da prikuplja najznačajnija

---

[7]Ovo su njegova razmišljanja o univerzitetu: "Da li se u našoj sadašnjoj Velikoj školi uistinu mogu negovati nauke; da li se u njoj talenti mogu razvijati na širokoj osnovi; da li jednom reči više potrebe našeg intelektualnog i moralnog života imperativno ne zahtevaju da izadjemo iz uske oblasti one atmosfere u kojoj se danas naša cela viša nastava kreće? Da, nama treba jedan jači centar nauke, jedan univerzitet, jedna nova velika škola s novim pravcem i s novim duhom, škola kojoj će pasti udeo i čast da na svežem i toplom vrelu nauke i istine podmladi intelektualni, moralni i politički život našeg naroda. Stoga nije megalomanija, niti tašta sujeta ili nezrela ambicija to što mi hoćemo univerzitet. Ko tako misli, taj ne zna u čemu je moć univerziteta, taj ne zna da je univerzitet jedini rasadnik čiste nauke, a to će reći pravi apostol slobode i prosvećenosti, toplo gnezdo ideja i idealizma." (vidi [7, str. 189-204]). Opširnije o Bogdanu Gavriloviću videti u [8], [14] i [35].

[8]Demeter Danitsch, "Conforme Abbildung des elliptischen Paraboloids auf die Ebene", Fakultät zu Jena, 1885, s.41. Kao honorarni profesor jedno vreme je držao predavanja iz niže matematike na Filozofskom fakultetu, ali kada je na to mesto postavljen Bogdan Gavrilović odlazi na Vojnu akademiju u Beogradu. Tu je stekao ugled strogog i korektnog profesora, kao i autora udžbenika koje su osim pitomaca Vojne akademije koristili i studenti Velike škole.

[9]Glas SKA (knj. XI, Prvi razred, knj. 6, 1989) na srpski preveo D. Nešić.

dela klasika i savremenika, ali i strane naučne časopise, što je odmah po dolasku na Veliku školu nastavio da radi i mladi Bogdan Gavrilović. Ta biblioteka će vremenom prerasti u mesto okupljanja i rada beogradskih matematičara poznato kao Matematički seminar, a posle Drugog svetskog rata kao Matematički institut, koji će do danas opstati i postati najjača i najznačajnija matematička institucija u Srbiji.

4 Vreme Mihaila Petrovića

Prelomni trenutak u razvoju srpske matematike predstavlja konkurs za profesora matematike na Filozofskom fakultetu, na mesto koje je ostalo upražnjeno odlaskom profesora Dimitrija Nešića u penziju. Te 1894. godine na konkurs su se prijavila čak tri mlada doktora nauka, sva trojica sa evropskim diplomama: Djordje Petković (1863-1913) doktorirao u Beču iz teorije funkcija, Petar Vukićević (1862-1941) doktorirao u Berlinu na diferencijalnim jednačinama i Mihailo Petrović (1868-1943) doktorirao na École Normale Supérieure u Parizu takodje iz teorije diferencijalnih jednačina[10]. Izabran je M. Petrović, a prva dvojica nikada nisu ostvarili univerzitetsku karijeru. Osnovni razlog tome je bio Numerus Clausus koji je odredjivao tačan broj profesora na Velikoj školi. Tako se Srbija kao mlada država, i u političkom i u naučnom smislu, u vrlo kratkom periodu od dvadesetak godina odrekla pravih mogućnosti tri doktora matematičkih nauka i jednog diplomiranog matematičara Ciriške Politehnike (Živković)!

Mihailo Petrović je djak Dimitrija Nešića sa Velike škole. I pored svog neosporno velikog talenta, da je ostao u Beogradu verovatno bi i on "tavorio u naučnom lokalitetu beogradske varoši" i nikada ne bi postao tako veliko i cenjeno ime srpske i svetske matematike. Umesto toga on je posle završene trogodišnje Velike škole, upisao i École Normale Supérieure u Parizu i završava je kao jedan od najboljih u generaciji. Ta škola, koja simboliše jednu epohu u razvoju matematičkih nauka, bila je naročito u doba Petrovićevog školovanja na glasu po svojim profesorima[11], ali i po djacima. Povratkom sa studija u Parizu, svojim naučnim radom i radom na Univerzitetu, Petrović se izborio za najviše mesto u istoriji srpske nauke. Posebno će ostati zabeleženo da je njegov rad "Sur les intégrales uniformes des équations du premier ordre et du genere zéro" iz 1894. godine prvi pravi, originalan naučni rad u srpskoj matematici objavljen u nekom uglednom evropskom časopisu[12].

[10] Djordje Petković, "Abels Theorem beweisen algebraisch und mit der Hilfe von Riemanns Funktion", Beč, 1893, s. 25. Michel Petrowitch, "Sur les zéros et les infinis des integrales des équations differentiel algébriques", Gauthier-Villars, Paris, 1894, p. 109. Petar L. Vukićević, "Die Invarianten der linearen homogenen Differential-Gleichungen II-ter Ordnung", Friedrich Wilhelms Universität zu Berlin, 1894, s. 48. Posle Danića i Gavrilovića, Petković je bio treći matematičar u Srbiji sa doktoratom nauka, Petrović se iz Pariza vratio kao četvrti od prvih pet matematičara u Srbiji sa doktoratom nauka, a Vukićević je postao peti.

[11] Jules Tannery (1848-1910), Paul Painlevé (1863-1933), Charles Hermite (1822-1901), Emile Picard (1856-1941), Henry Poencaré (1854-1912), Jean Gaston Darboux (1842-1917)

[12] Comptes Rendus de L'Academie des Sciences, Paris, 1894, t. CXVIII, pp. 1190-1193. Rezultate iz tog rada je E. Pikar uneo u svoju monografiju *Traité d' Analyse*, Paris 1896, tome

Izborom Mihaila Petrovića za profesora matematike na Filozofskom fakultetu Velike škole, Bogdan Gavrilović preuzima celokupnu nastavu matematike na Tehničkom fakultetu. Rezultati Dimitrija Nešića prepušteni su prošlosti, a na scenu su izašla dva matematičara koji su, svaki na svoj način, često potpuno različito, širom otvarali vrata srpske nauke i trasirali put ka velikoj nauci Zapada. Njih dvojica će jedan dugi period biti jedini predstavnici matematičkih nauka na Velikoj školi i od 1905. godine na Univerzitetu u Beogradu, gde će predavati i teorijsku i primenjenu matematiku. Matematika je na Univerzitetu u Beogradu sve do dvadesetih godina prošlog veka bila zamrznuta u kadrovskim temeljima Petrović-Gavrilović i niko nije mogao da do tog jezgra dosegne. Oni su bili komplementarni po svojim interesovanjima u matematici. Petrovića je, pre svega, interesovala matematička analiza, diferencijalne jednačine, ali i primena računskih mašina na rešavanje diferencijalnih jednačina. Nasuprot tome, Gavrilović se bavio algebrom i geometrijom, posebno kombinatorikom, teorijom brojeva, analitičkom geometrijom, determinantama, pisanjem udžbenika. Njihov naučni ali i organizacioni rad na prelazu iz XIX u XX vek predstavljao je prelom u srpskoj naučnoj sredini. Načinjen je ogroman zaokret i odvajanje od trivijalnih matematičkih tema i problema i napravljen zapažen proboj u svetsku matematiku. To se posebno odnosi na Petrovića. Njihovom zaslugom, na predlog Petrovića a uz svesrdnu podršku Gavrilovića i saglasnost Filozofskog fakulteta, 1909. godine za vanrednog profesora primenjene matematike (racionalna mehanika, teorijska fizika i nebeska mehanika) iz Beča u Beograd dolazi Milutin Milanković (1879-1958). On je svojim prisustvom i aktivnostima na Beogradskom univerzitetu i u Matematičkom seminaru ostavio značajan trag u nacionalnoj, ali naučnim rezultatima iz klimatologije i geologije i u svetskoj nauci. Odmah po dolasku u Beograd u Glasu SKA je objavljen njegov rad "Osobine kretanja u jednom specijaliziranom problemu triju tela", kao prvi naučni rad u Srbiji iz nebeske mehanike i racionalne mehanike. U srpskoj istoriji nauka će trajno ostati upamćen i po, za to vreme veoma naprednom i savremenom, trogodišnjem kursu koji je uključivao poglavlja racionalne mehanike, teorijske fizike i nebeske mehanike. U toku kursa predavana je vektorska analiza, teorija fizičkih polja, nauka o provodjenju toplote, hidrodinamika, elektrostatika sa magnetostatikom, Maksvelova teorija elektriciteta i teorija elektrona.

Tokom prve četiri godine rada na Velikoj školi, Petrović je predavao po zatečenom stanju u skladu sa postojećim uslovima i sistemom niže i više matematike. Strogošću na ispitima uticao je da se poveća ozbiljnost pri učenju i pripremanju ispita i samim time podigne nivo studiranja. Ali mu je odmah postalo jasno da se nastava matematike mora menjati, osavremeniti i uskladiti sa onom u svetu, što je za njega značilo u Francuskoj, s kojom je on kao pariski djak bio najbolje upoznat. Smatrao je da samo kvalitetna, savremena nastava može dati nove generacije uspešnih naučnika-matematičara. Da bi bio u mogućnosti da preoblikuje nastavu u skladu sa svojim zamislima i stavovima, znao je da prvo mora

III, Chap. XIII, V. ([34]). GLAS SKA, Knj. 79, s. 218-222.

da postane uticajan i cenjen naučnik. A jedan univerzitetski profesor to može da postane prvenstveno svojim vrhunskim naučnim rezultatima. Kako se vratio iz Pariza pun zacrtanih ideja, skiciranih rasprava, donevši sa sobom savremenu literaturu, on u te četiri godine objavljuje i veoma zapažene rasprave, skoro 50, što je za tadašnju naučnu Srbiju bilo pravo čudo. I to ne samo u Glasu Akademije i Nastavniku (na srpskom), već i na francuskom i nemačkom jeziku u tada najuglednijim svetskim časopisima Mathematische Annalen (Leipzig), Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, American Journal of Mathematics, Bulletin de la Société Mathématique de France, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, i kasnije L'Enseignement Mathématique. Na takav način on je stekao svetski naučni ugled - poštenim i iskrenim radom, originalnošću, individualnošću, univerzalnošću, ingenioznošću. Njegovi radovi su iz različitih oblasti matematike - teorije funkcija, diferencijalnih jednačina, algebre, infinitezimalnog računa, matematičke fenomenologije, matematičkih spektara, primenjene matematike. Pisao je radove i iz verovatnoće, istorije matematike, geometrije, teorije grešaka. Pravi francuski djak, univerzalni matematičar! Godine 1895. imao je i prvo istupanje u SKA, 1897. godine je već izabran u SKA i JAZU, a 1899. godine postaje redovan član SKA. A to je period od njegove 27. do 31. godine (vidi [19])! Kao što je Dimitrije Nešić u periodu od više od 20 godina bio jedini profesor matematičkih predmeta u srpskom visokom školstvu, tako je, uz Gavrilovića na Tehničkom fakultetu sve do 1924. godine, i Mihailo Petrović punih 18 godina bio na Filozofskom fakultetu jedini profesor Teorijske matematike. Do odlaska u penziju predavao je čak 16 redovnih i specijalnih kurseva.

Godine 1912. odbranjen je prvi doktorat matematičkih nauka na Beogradskom univerzitetu. Pred komisijom koju su sačinjavali Mihailo Petrović i Milutin Milanković, doktorsku tezu pod nazivom "Figurativni poligoni diferencijalnih jednačina prvog reda i njihova veza sa osobinama integrala" odbranio je Mladen Berić (1885-1935). Odmah je primljen za docenta za Teorijsku matematiku. Već sledeće, 1913. godine, Petrović uvodi u nauku i Simu Markovića (1888-1939) koji kao drugi doktor nauka Univerziteta u Beogradu pred istom komisijom kao i Mladen Berić, brani tezu "Opšta Riccati-eva jednačina prvog reda". Bez obzira što njihove univerzitetske karijere nisu trajale dugo - Berić je kao vanredan profesor napustio Univerzitet 1921. godine, a Marković se posvetio politici ubrzo po odbrani teze ([32, str. 241-247]) - odbranom ovih teza započinje, za razvoj srpske matematike, ali po rezultatima i u svetskim okvirima, značajna Petrovićeva škola matematike.

4.1 Matematički seminar

Za godinu osnivanja i početka rada Matematičkog seminara uzima se 1896, kada je donesena Uredba na Velikoj školi kojom je, pored ostalog, predvidjeno i formiranje seminara na odsecima Filozofskog fakulteta, samim tim i Matematičkog seminara. Petrović se odmah po dolasku na Veliku školu pridružio Gavriloviću u organizovanju matematičke biblioteke. On je sve svoje matematičke knjige donešene iz Francuske preneo u biblioteku Seminara. Po jedinoj sačuvanoj svesci prvog Inventara knjiga Matematičkog kabineta Velike škole iz 1902. godine ostalo je zabeleženo da su u Biblioteci, izmedju ostalih, bili sledeće knjige: H. Laurent, Traite d'Analyse, M. Cantor, Geschichte der Mathematik, B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke, R. Lipschitz, Differential und Integral rechnung, B. Pascal, Determinanten, E. Borel, Leçons sur les séries divergentes; kolekcije: Collection de mémoires des mathématiques, Collection de théses de doctorat à la Faculté des Sciences des Paris, i časopisi: Comptes Rendus De l'Academie des Sciences de Paris, Bulletin de la Société mathématique de France, Bulletin des Sciences Mathématiques, Mathematische Annalen, Revue semestrielle des publications mathématiques, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, L'Enseignement Mathématiques, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Acta Mathematica, Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik. Biblioteka Matematičkog seminara se tokom godina razvijala, pažljivo i sistematski popunjavala, i, zahvaljujući prvenstveno Petroviću i Gavriloviću, a kasnije i mladjim matematičarima, postala zavidno snabdevena najaktuelnijom matematičkom literaturom. Po završetku Prvog svetskog rata Petrović je u okviru ratne odštete tražio i dobio veliki broj kapitalnih matematičkih dela.

Šta je, u stvari, bio Matematički seminar Beogradskog univerziteta? Svi fakulteti Univerziteta su se tada nalazili u Kapetan-Mišinom zdanju, a prostorije Matematičkog seminara na prvom spratu. Po pisanju Milutina Milankovića, kada je 1909. godine došao u Beograd, on i Petrović su imali samo jednu slušaonicu sa velikom tablom i jednu zajedničku profesorsku sobu (vidi [15, str. 11]). Ta prostorija je nazvana Matematički seminar, jer je u njoj bila smeštena i biblioteka matematičkih nauka. Neposredno posle njegovog osnivanja, ali i u vreme Milankovićevog dolaska u Beograd, Matematički seminar su činila samo dva matematičara Beogradskog univerziteta - Mihailo Petrović sa Filozofskog fakulteta i Bogdan Gavrilović sa Tehničkog fakulteta. Posle Prvog svetskog rata Berićevom i Markovićevom odbranom prvih doktorskih disertacija iz matematike na Univerzitetu u Beogradu, razvojem Univerziteta i stvaranjem novih katedri, broj nastavnika i članova Matematičkog seminara se polako uvećavao pa su mu dodeljene četri prostorije u koje je smeštena biblioteka i tako je dobijen prostor za redovna okupljanje članova, kao i za njihove svakodnevne nastavne i naučne aktivnosti.

Tri su glavne karakteristike institucionalnog razvoja matematike u okviru Matematičkog seminara Beogradskog univerziteta. Prva je činjenica da su Petrović i Gavrilović već bili članovi Srpske kraljevske akademije, prvi od 1897. a drugi od 1905. godine, pa je delatnost Seminara, bez obzira što je on zvanično pripadao Univerzitetu u Beogradu, neodvojiva od akademijskih delatnosti, tačnije Akademije prirodnih nauka SKA. Čak se može kazati da je Akademija imala značajniji uticaj na njegov rad nego Univerzitet. Kasnije je i većina najistaknutijih matematičari bila iz članstva SKA. Posledica toga je da se svaka medjunarodna aktivnost Akademije prirodnih nauka SKA svodila na aktivnost članova Seminara. Druga karakteristika se odnosi na oblasti matematike kojima su se u jednom dužem periodu bavili srpski matematičari. Svi su oni, više ili manje direktno, bili Petrovićevi djaci pa su se bavili prvenstveno problemima koji pripadaju matematičkoj analizi i diferencijalnim jednačinama. Početkom dvadesetih godina teorije matrice i linearne algebre još uvek nema, o problemima kontinuuma nije se čula ni jedna reč; teorija skupova, matematička logika, aksiomatizacija algebre bili su veoma daleko od srpskih matematičara tih generacija. Vektorski račun i vektorska analiza bili su najviše zastupljeni u predavanjima i udžbenicima Milutina Milankovića, dakle u primenjenoj matematici. Poneka raznolikost njihovih oblasti interesovanja i rada je posledica Petrovićevog širokog matematičkog obrazovanja karakterističnog za Parisku školu matematike. Treća karakteristika, tesno povezana sa prethodnom, jeste skoro potpuno odsustvo geometrije u okviru nauke ali i nastave. Petrovićeva matematička škola nije negovala geometriju i toj, staroj i tako važnoj oblasti nauke nije bila naklonjena. Kako nije bila zastupljena kao posebni predmet, geometrija nije imala ni posebnog nastavnika u okviru članova Matematičkog seminara. Tek se početkom tridesetih godina prišlo osnivanju i sredjivanju nastave geometrije i na inicijativu M. Petrovića na Univerzitet je primljen Miloš Radojčić (1903-1975), ciljno za geometrijske predmete, mada je u toku svoje karijere predavao veliki broj različitih predmeta, a u naučnom radu se prvenstveno bavio teorijom analitičkih kompleksnih funkcija i teorijom relativnosti.

Rezultat naučnih i organizacionih aktivnosti tandema Gavrilović-Petrović je nemerljiv u okviru kulturne i intelektualne istorije Srbije. Gavrilović, kao jedan od najuticajnijih profesora zaslužan je za prerastanje Velike škole u Univerzitet (1905), a Petrović za organizovanje Matematičkog seminara Beogradskog univerziteta, budućeg jezgra matematike kao nauke i nastave matematike. Može se kazati da je Petrović otvorio vrata svetske nauke kroz koja su djaci njegove škole, prvenstveno Jovan Karamata (1902-1967) i Vojislav G. Avakumović (1910-1990) kao najpriznatiji, u velikom stilu prošli i uveli srpsku matematiku u svetske tokove.

5 Šta je bilo posle?

Period izmedju dva svetska rata postaće najznačajniji period rada Matematičkog seminara i institucionalizacije Petrovićeve matematičke škole kao temelja celokupnog razvoja matematike u Srbiji. Ogroman uticaj na kvalitativni rast srpske matematike tog perioda imala su dva, poreklom ruska matematičara, koji su dvadesetih godina prošlog veka došli u Beograd bežeći iz revolucionarne Rusije. To su bili Anton Bilimović (1879-1970) i Nikola Saltikov (1866-1961).[13] Oni su

[13] Anton Bilimović je rodjen u Žitomiru, u današnjoj Ukrajini. Diplomirao je na Fizičko-matematičkom fakultetu Kijevskog univerziteta i postavljen za asistenta, da bi 1915. godine bio izabran za redovnog profesora Novorosijskog univerziteta u Odesi. Januara 1920. godine, kao već priznato ime u nauci, došao je u Beograd gde je postao profesor na Univerzitetu, i već 1925. izabran je za dopisnog, a 1936. godine za redovnog člana SKA. Prvenstveno se bavio primenom Pfafovih diferencijalnih formi i diferencijalnih sistema u mehanici. Nikola Saltikov je rodjen u mestu Višnji-Voloček u Rusiji. Studije završio na Univerzitetu u Harkovu kao učenik Ljapunova

značajno doprineli ugledu srpske matematike izmedju dva svetska rata. Dodaćemo i nešto mladjeg Vjačeslava Žardeckog (1896-1962) koji se bavio primenjenom matematikom (teorijskom fizikom). U to vreme, sa završenih studija matematike na Sorboni u Parizu, u Srbiju dolazi i Radivoj Kašanin (1892-1989), jedan od retkih srpskih matematičara koji nije studirao u Beogradu izmedju dva rata - pre Pariza studirao je u Beču, Zagrebu i Pešti. Zapošljava se 1922. godine kao asistent na Tehničkom fakultetu i već 1924. godine doktorira kod M. Petrovića i A. Bilimovića. Po odlasku Bogdana Gavrilovića u penziju 1929. godine, preuzima sva matematička predavanja na Tehničkom fakultetu gde je 1939. godine izabran za redovnog profesora. Poznat je i visoko cenjen njegov udžbenik *Viša matematika* (Beograd, 1934, s. 627), koji je imao značajnu ulogu u podizanju nivoa nastave matematike i tehnike na Tehničkom fakultetu u Beogradu. U svom radu bavio se nekim problemima diferencijalnih jednačina, klasičnom teorijom funkcija, teorijom realnih i kompleksnih funkcija, geometrijom, statistikom, mehanikom i astronomijom. Radove je većinom objavljivao u akademijinim i univerzitetskim izdanjima. Dopisni član SAN postao je 1946, a redovan 1955. godine. kašanin je ostavio neizbrisiv trag u srpskoj matematici i univerzitetskoj nastavi, ali kako nije objavljivao radove na stranim jezicima u svetskim žurnalima, ostao je nezapažen i nepoznat van Srbije.

Sa takvim naučnicima nivo Petrovićevog Matematičkog seminara je značajno podignut. Dvadesetih godina 20. veka Matematički seminar je imao 15 članova. Sedmorica od njih bili su članovi SKA, a svi profesori Beogradskog univerziteta. Rezultati njihovog naučnog rada su pripadali ravnopravno kako teorijskoj tako i primenjenoj matematici i redovno su objavljivani, ne samo u Akademijinim i univerzitetskim publikacijama u Srbiji (GLAS SAN i Bulletin de L'Academie Serbe des Sciences, serie Mathématiques, Publications mathématiques de l'Université de Beograd) koje su uživale lep ugled i u stranom svetu, već i u izdanjima evropskih akademija nauka kao i u prestižnim svetskim naučnim časopisima. Kao rezultat intenzivnog i kvalitetnog rada na Univerzitetu i u okviru Matematičkog seminara, pojavila se grupa mladih i darovitih matematičara. Sve njih je iznedrio prvenstveno Mihailo Petrović. To su bili Tadija Pejović (1892-1982), doktorirao 1923. godine, Miloš Radojčić, doktorirao 1928. godine i Jovan Karamata, doktorirao 1926. godine. Novi naraštaji naučnika počinju da ispoljavaju svoj sopstveni interes za najsavremenije grane matematike i u toj interakciji starih i novih shvatanja, puteva i metoda, srpska matematika postiže velike uspehe.

Za vreme rata i okupacije od aprila 1941. do oktobra 1944. godine Akademija, Univerzitet i Matematički seminar nisu zvanično niti javno radili. Na žalost, cela

i Steklova. Radio je kao profesor racionalne mehanike na Tehnološkom institutu u Tomsku i Politehničkom institutu u Kijevu. Po odbranjenoj doktorskoj tezi iz matematike 1906. godine postaje profesor na Univerzitetu u Harkovu, a 1919. godine profesor teorijske matematike na Gruzijskom univerzitetu i Ruskom politehničkom institutu u Tbilisiju. Ubrzo napušta Rusiju, dolazi u Beograd i već 1921. godine izabran je za redovnog profesora matematike na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Godine 1934. izabran je za dopisnog člana SKA a 1946. godine za redovnog člana SAN. Bavio se prvenstveno diferencijalnim jednačinama.

zgrada Filozofskog fakulteta, pa i Biblioteka i prostorije Matematičkog seminara, tokom povlačenja okupatora krajem Drugog svetskog rata spaljena je i do temelja je izgorela. Od bogatog fonda ostalo je svega nekoliko knjiga koje su bile pozajmljene za ličnu upotrebu. Tako je u vihoru rata sve, osim ljudi, nestalo. Više nije bilo knjiga, časopisa, prostorija, Seminara. Završilo se jedno veliko poglavlje u institucionalnom razvoju srpske matematike. Ostala su samo sećanja, poneki arhivski zapis i velika ljubav i entuzijazam preživelih pojedinaca.[14]

Literatura

[1] Adamović, D., 1982. Razgovori sa savremenicima, Privredna štampa, Beograd.

[2] Aljančić, S., 1986. O sadašnjem radu i perspektivama instituta (prezentovano na proslavi 40-o godišnjice Matematičkog instituta), Arhiv Matematičkog instituta, br. P-32/1.

[3] Bojović, S., 2007. Prirodne nauke u Srbiji do 1914. godine, Zbornik radova naučnog skupa prirodne i matematičke nauke u Srba do 1918, SANU, PMF Novi Sad, Matica srpska, Novi Sad, 149-176.

[4] Čavčić, M., Vujičić, V., 1972. Četvrt veka Matematičkog Instituta, 1946-1971, Mathematički Institut, Beograd.

[5] Čavčić, M., 1986. Pregled izdanja matematičkog instituta, 1946 - 1986, Matematički institut, Beograd.

[6] Čavčić, M., 1990. Saopštenja naučnih rezultata u Matematičkom institutu 1946 - 1961, Matematika i mehanika, Matematički institut, Beograd.

[7] Gavrilović, B., 1901. Prosvetni glasnik 22(2), Beograd.

[8] Gavrilović, B., 1997. Sabrana dela Bogdana Gavrilovića. Urednik Žarko Mijajlović, Matematički institut SANU, Beograd.

[9] Kašanin, R., 1947. Dr. Bogdan Gavrilović (1864-1947), Glasnik matematičko-fizički i astronomski 1, Beograd.

[14] Atmosferu medju matematičarima u Beogradu u periodu izmedju dva rata možda je najlepše oslikao Radivoj Kašanin u svojim sećanjima koja je saopštio 1974. godine Dragoslavu Adamoviću, autoru knjige *Razgovori sa savremenicima* ([1, str. 131-134]). On kaže: "Pored visoke stručne spreme i originalnih naučnih radova, sva trojica (M. Petrović, B. Gavrilović i M. Milanković, prim.aut.) su se odlikovala nečim što najviše cenim, što smatram za ljudsku vrednost najvišeg ranga: ljubav prema mladim generacijama, razumevanje mladih ljudi, nesebičnost i iskrena pomoć mladim, talentovanim ljudima u njihovom napredovanju. Umeli su da se raduju i da uživaju kad se mladi ljudi uzdižu. Imao sam sreću da se razvijam i radim pored njih, velikih autoriteta nauke i morala. Da se ponosim njihovim prijateljstvom. Ne verujem da je igde postojao takav ambijent kakav su stvorili Gavrilović, Petrović i Milanković."

[10] Kečkić, J., 1985. Serbian doctors of mathematics in the 19th century, Publications de l'Institut Mathématique (N.S.) 38(52), Beograd, 3-6.

[11] Kečkić, J., 1995. Algebra Atanasija Nikolića, Zbornik radova naučnog skupa prirodne i matematičke nauke u Srba u 18. i u prvoj polovini 19. veka, SANU, PMF Novi Sad, Matica srpska, Novi Sad, 301-308.

[12] Lawrence, S., 2005. Balkan mathematics before First World War, BJSHM Bulletin, 4, 28-36.

[13] Lawrence, S., 2009. A Balkan trilogy: mathematics in the Balkans before World War I, In Oxford Handbook of the History of Mathematics, edited by Eleanor Robson, Jacqueline Stedall, Oxford University Press Inc., New York, Chapter 2.4, 175- 214.

[14] Mijajlović, Ž., 1997. Bogdan Gavrilović (1864-1947). Život i delo sepskih naučnika, Biografije i bibliografije, knjiga 2, SANU, Beograd, 71-103.

[15] Milanković, M., Mihailović, J., 1946. Mika Alas: beleške o životu, Beograd.

[16] Milanković, M., 2005. Sećanja, Beograd.

[17] Nikolić, A., 1987. Prva srpska aritmetika, Zbornik Matice srpske za društvena pitanja br.83, 151-160.

[18] Nikolić, A., 2010. Mathematical education in the province of Vojvodina within the Habsburg monarchy, History of Mathematics, vol. 41, Faculty of mathematics and physics, Charles University and Austrian Society for the History of Science, 2010, pp. 109-124

[19] Nikolić, A., 2012. Mihailo Petrović i njegovo doba, Zbornik radova naučne konferencije o srpskim matematičarima posvećene M. Petroviću i M. Milanković, Rektorat beogradskog Univerziteta, May 2012.

[20] Nikolić, At., 1851. Slavno Društvo srpske slovesnosti, Glas Srpskog učenog društva, 3, 36.

[21] Paunić, DJ., 1995. Načela više matematike Emilijana Josimovića, Zbornik radova naučnog skupa prirodne i matematičke nauke u Srba u 18. i u prvoj polovini 19. veka, SANU, PMF Novi Sad, Matica srpska, Novi Sad, 313-319.

[22] Pejović, T., 1980. Moje uspomene i doživljaji 1892-1945, Porodica Pejović, Beograd.

[23] Perišić, P., D.Trifunović, D., 1994. Matematičar Bogdan Gavrilović, Arhimedes, Beograd.

[24] Perišić, P., 1995. O nekim osobenostima rezultata Beogradske matematičke škole, Proceedings of the IX Congress of Yugoslav Mathematicians, Mathematics History Section, 83-100.

[25] Petrović, M., 1998. Sabrana dela. Zavod za udžbenike, Beograd.

[26] Petrović, A., 2004. Development of the first hydraulic analog computer, Archives internationals d'histoire des sciences, Vol. 54, No. 153, Brepols Publishers, Belgium, 1-14.

[27] Petrović, A., Fleming, J., 2005. Milanković's search for the Missing Link between Celestial and the Earth Sciences, Diffusion of Science and Technology Throughout History, Chinese Academy of Sciences, Bejing, p. 396

[28] Prvanović, M., 1995. Elementarna geometrija Atanasija Nikolića, Proceedings of the Symposium on Natural sciences and mathematics with the Serbs from the 18th and the early 19th century, Serban Academy of Sciences and Arts, University of Novi Sad, Matica srpska, Novi Sad, 263-269.

[29] Spomenica - 125 godina Matematičkog fakulteta u Beogradu, 1998. Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Beograd.

[30] Tomić, M., 1986. Matematički institut S. R. Srbije - njegovo osnivanje, razvoj i značaj, Govor na proslavi 40-o godišnjice Matematičkog instituta.

[31] Tomić, M., 1989. Matematičke nauke, Serbian Academy of Sciences and Arts, Centennial, vol. 1, Beograd, 13-35.

[32] Trifunović, D., 1969. Letopis života i rada Mihaila Petrovića, SANU, Beograd.

[33] Trifunović, D., 1993. Petar Živković, Valjevska gimnazija, Valjevo.

[34] Trifunović, D., 1994. Doktorska disertacija Mihaila Petrovića, Arhimedes, Beograd.

[35] Trifunović, D., Perišić, P., 1994. Matematičar Bogdan Gavrilović - Život i delo, Beograd.

[36] Trifunović, D., 1996. Dimitrije Nešić - zora srpske matematike, Arhimedes, Beograd.

[37] Trifunović, D., Perišić P., 1997. Matematičar Petar Vukićević, Beograd.

[38] Internet sajt Matematičkog instituta: http://www.mi.sanu.ac.rs

Istraživanje i pisanje rada je podržano od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije kroz projekte III44006 i ON174026.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Primjeri linearnih preslikavanja i jednačina u srednjoškolskoj matematici

Radoje Šćepanović
Prirodno-matematički fakultet odgorica
radoje@rc.pmf.ac.me

Pregledni rad

Apstrakt

Evo nekoliko podataka o razvoju pojma funkcije. Značajnu ulogu u zasnivanju ovoga pojma odigrao je metod koordinata koji su zasnovli francuski matematičari P. Ferma (1601-1665) i R. Dekart (1596-1650). Metod koordinata se široko koristio za grafičko ispitivanje funkcija i grafičko rješavanje jednačina. Termin "funkcija" prvi je uveo njemački matematičar G. Lajbnic (1646-1710), povezujući ga sa grafikom (crtanjem). L. Ojler (1707-1783) i J. Bernuli (1667-1748) počinju koristiti i analitički zapis funkcije. Kod L. Ojlera se pojavljuje i šire shvatanje pojma funkcije: kao zavisnosti jedne promjenljive veličine od druge veličine. Ovaj pojam dalje razvijaju ruski matematičar N. I. Lobačevski (1792-1856), njemački matematičar P. Dirihle (1805-1859) i drugi. Kao rezultati ovih istraživanja počinju se razmatrati brojevne funkcije: Promjenljiva y je funkcija promjenljive x, $x\in[a,b]$, ako se svakoj vrijednosti x pridruži određena vrijednost y, bez obzira na način kako se to radi: formulom, grafikom, tabelom ili prosto riječima. Iz ovoga vremena potiče i tzv. Dirihleova funkcija

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{ako je } x\in Q \\ 0, & \text{ako je } x\notin Q \end{cases}.$$

Dalji razvoj pojma funkcije je povezan sa pridruživanjem između skupova čiji elementi mogu biti ne samo brojevi, nego i objekti proizvoljne prirode.

1 Uvod

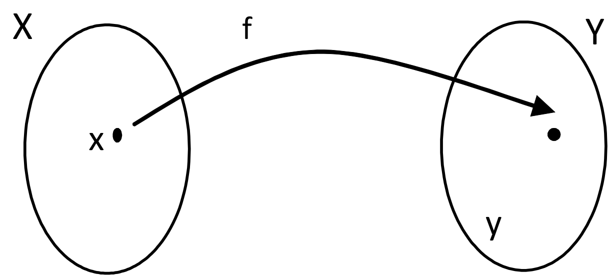
1.1 Definicija linearnog preslikavanja

Neka su zadati skupovi X i Y.

Definicija 1.1. Preslikavanje $f:X\to Y$ koje zadovoljava uslove:

1. $\forall x,y\in X$: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (svojstvo aditivnosti),
2. $\forall\lambda\in R$ $\forall x\in X$:$f(\lambda x)=\lambda f(x)$ (svojstvo homogenosti)

nazivamo linearnim preslikavanjem.



Slika 1:

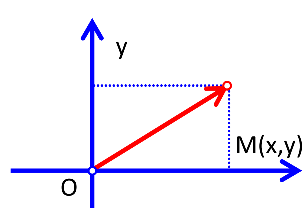
Posljedica 1. Ako je $f{:}X{\to}Y$ linearno preslikavanje, tada je
$f(\lambda_1 x_1{+}\lambda_2 x_2){=}\lambda_1 f(x_1){+}\lambda_2 f(x_2)$,
gdje su λ_1 i λ_2 proizvoljni realni brojevi.

Ako su X i Y skupovi brojeva (funkcija), tada se umjesto preslikavanje, obično, kaže funkcija (operator).

1.2 Primjeri linearnih preslikavanja

Primer 1.1. Već u osnovnoj školi sretamo se sa linearnom funkcijom $f{:}R{\to}R$, $f(x){=}ax$, gdje je a fiksirani realni broj. Međutim, preslikavanje $f(x){=}ax{+}b$, $b{\neq}0$ nije, saglasno definiciji 1, linearno. Lako se provjerava da nije ispunjen ni jedan od uslova linearnosti funkcije (aditivnost i homogenost). U literaturi se odomaćio izraz da je funkcija $f(x){=}ax{+}b$ linearna ($b{\neq}0$). Netačno korišćenje ovoga termina proističe, vjerovatno, iz činjenice da se svaka funkcija čiji je grafik prava naziva linearnom funkcijom. Pravilno je kazati: grafik linearne funkcije $f(x){=}ax$ je prava. I grafik funkcije $f(x){=}ax{+}b$ je takođe prava.

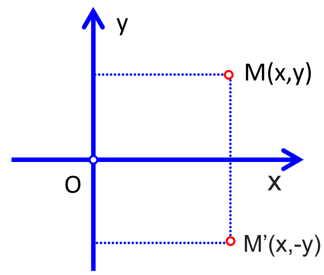
Primer 1.2. Neka je $\overrightarrow{a}$ fiksirani vektor u prostoru $\overrightarrow{V_3}$. Preslikavanje $f.\overrightarrow{V_3} \to R$, $f(x) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x}$ (skalarni proizvod) je linearno.



Slika 2:

Primer 1.3. Neka je $\overrightarrow{a}$ fiksirani vektor u prostoru $\overrightarrow{V_3}$. Preslikavanje $f{:}\vec{V_3} \to \vec{V_3}$, $f(x) = \vec{a} \times \vec{x}$ (vektorski proizvod) je linearno.

Primer 1.4.



Slika 3:

Neka je $\overrightarrow{a}$ fiksirani vektor u prostoru $\overrightarrow{V_3}$. Preslikavanje $f:\overrightarrow{V_3} \to R$, $f(x) = pr_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{x}$ (projekcija vektora $\overrightarrow{x}$ na vektor $\overrightarrow{a}$) je linearno.

Svakom uređenom paru (x,y) realnih brojeva odgovara u koordinatnoj ravni tačka M. I obratno, svakoj tački M u koordinatnoj ravni odgovara uređeni par realnih brojeva (x,y), koji nazivamo koordinate tačke M, pišemo $M(x,y)$. Ovo pridruživanje je bijektivno. Radi jednostavnijeg pisanja uvedimo zapise:

$M=(x,y)$,

$$\lambda M = \lambda\,(x,y) = (\lambda x, \lambda y)\,,$$

$$M_1 + M_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,.$$

Primer 1.5. Simetrija ravni α u odnosu na osu apscisa je linearno preslikavanje.

Ako je M proizvoljna tačka ravni α sa koordinatama (x,y), tada njoj simetrična tačka M' u odnosu na osu apscisa Ox ima koordinate $(x,-y)$ (vidi sliku). Ovu simetriju označimo sa S_{Ox}. Saglasno prethodnom, imamo da je $S_{Ox}(M)=M'$, odnosno $S_{Ox}(x,y)=(x,-y)$. Dokažimo da je ovo preslikavanje linearno:

a) $\forall\lambda\in R\forall M\in\alpha$: $S_{Ox}(\lambda M)=S_{Ox}(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x,-\lambda y)= \lambda(x,-y) =\lambda S_{Ox}(M)$.

b) $\forall M_1,M_2\in\alpha$:

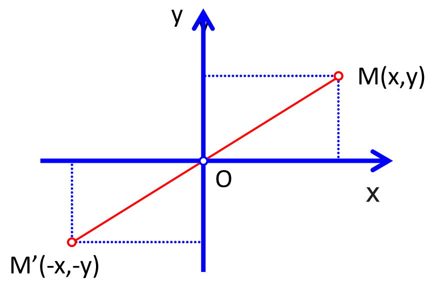
$S_{Ox}(M_1+M_2)=$

$=S_{Ox}(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_1+x_2,-y_1-y_2)=(x_1,-y_1)+(x_2,-y_2)=S_{Ox}(M_1)+S_{Ox}(M_2)$.

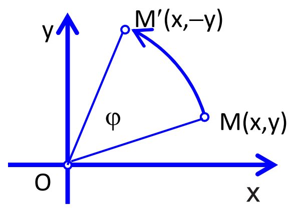
Na sličan način se dokazuje da je i simetrija u odnosu na osu ordinara Oy: $O_{Oy}(x,y)=(-x,y)$ je linearno preslikavanje.

Primer 1.6. Centralna simetrija ravni α u odnosu na koordinatni početak je linearno preslikavanje.

Ako je $M(x,y)$ proizvoljna tačka ravni α, tada njoj simetrična tačka M' u odnosu na koordinatni početak O ima coordinate $(-x,-y)$ (vidi sliku). Označimo ovo preslikavanje sa S_O. Imamo da je $S_O(M)=M'$, odnosno $S_O(x,y)=(-x,-y)$. Lako se uvjeravamo da je:



Slika 4:



Slika 5:

a) $\forall\lambda\in R\forall M\in\alpha$:
$S_O(\lambda M)=S_O(\lambda x,\lambda y)=(-\lambda x,-\lambda y)=\lambda(-x,-y)= =\lambda S_O(M)$.
b) $\forall M_1,M_2\in\alpha$:
$S_O(M_1+M_2)=$
$=S_O(x_1+x_2,y_1+y_2)=(-x_1-x_2,-y_1-y_2)=(-x_1,-y_1)+(-x_2,-y_2)=$
$=S_O(M_1)+S_O(M_2)$.

Primer 1.7. Rotacija ravni α za ugao φ oko koordinatnog početka je linearno preslikavanje.

Neka je $M(x,y)$ proizvoljna tačka ravni α. Može se dokazati da tački M, pri rotaciji oko koordinatnog početka O za ugao φ odgovara tačka $M\prime$ čije su coordinate $(x\cos\varphi-y\sin\varphi,x\sin\varphi+y\cos\varphi)$ (vidi sliku). Označimo ovo preslikavanje sa $R_{O,\varphi}$. Saglasno prethodnom, imamo da je $R_{O,\varphi}(M)=M\prime$, odnosno $R_{O,\varphi}(x,y)=(x\cos\varphi-y\sin\varphi,x\sin\varphi+y\cos\varphi)$. Dokažimo da je ovo preslikavanje linearno.

a) $\forall\lambda\in R\forall M\in\alpha$:

$\mathrm{R}_{O,\varphi}(\lambda M)=$

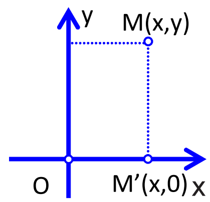
$\mathrm{R}_{O,\varphi}(\lambda x,\lambda y)=(\lambda(x\cos\varphi-y\sin\varphi),\lambda(x\sin\varphi+y\cos\varphi))=$

$(\lambda x\cos\varphi-\lambda y\sin\varphi,\lambda x\sin\varphi+\lambda y\cos\varphi)=$

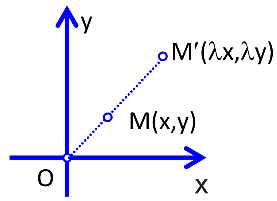
$\lambda(x\cos\varphi-y\sin\varphi,x\sin\varphi+y\cos\varphi)=$

$\lambda\mathrm{R}_{O,\varphi}(\ M)$.

b) $\forall M_1,M_2\in\alpha$:



Slika 6:



Slika 7:

$\mathrm{R}_{O,\varphi}(M_1+M_2)=$

$=\mathrm{R}_{O,\varphi}(x_1+x_2,y_1+y_2)=((x_1+x_2)\cos\varphi-(y_1+y_2)\sin\varphi,(x_1+x_2)\sin\varphi+(y_1+y_2)\cos\varphi)$
$=(x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi,x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi)+(x_2\cos\varphi-y_2\sin\varphi,x_2\sin\varphi+y_2\cos\varphi)=$

$\mathrm{R}_{O,\varphi}(M_1)+\mathrm{R}_{O,\varphi}(M_2)$.

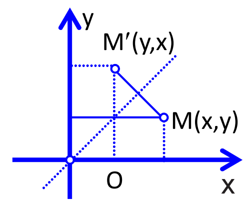
Primer 1.8. Ortogonalna projekcija ravni α na osu apscisa je linearno preslikavanje.

Ako je $M(x,y)$ proizvoljna tačka ravni α, tada njena ortogonalna projekcija M' na osu apscisa ima koordinate $(x,0)$ (vidi sliku). Ovo preslikavanje označimo sa P_{Ox}. Dakle, $P_{Ox}(M)=M'$, odnosno $P_{Ox}(x,y)=(x,0)$. Lako se dokazuje da je preslikavanje P_{Ox} linearno. I preslikavanje P_{Oy} (ortogonalna projekcija na osu Oy) je linearno.

Primer 1.9. Homotetija ravni α u odnosu na koordinatni početak je linearno preslikavanje.

Neka je λ koeficijenat homotetije H u odnosu na koordinatni početak O. Označimo sa $H_{O,k}$ ovo preslikavanje. Tada, svakoj tački $M(x,y)$ ravni α pridružuje se tačka M' te iste ravni sa koordinatama $(\lambda x,\lambda y)$ (vidi sliku). Dakle, $H_{O,k}(M)=M'$, odnosno $H_{O,k}(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$. Lako se dokazuje da je preslikavanje $H_{O,k}$ linearno. Napomenimo, ako je $|\lambda|<1$, tada govorimo o kontrakciji (srezanju), a ako je $|\lambda|>1$ govorimo o dilataciji (rastezanju). Za $\lambda=1$ homotetija postaje inentičko preslikavanje, a za $\lambda=-1$ centralna simetrija u odnosu na koordinatni početak.

Primer 1.10. Translacija za nenulti vektor u ravni nije linearno preslikavanje.



Slika 8:

Primer 1.11. Za dva linearna operatota A i B u opštem slučaju ne važi svojstvo (zakon) komutacije.

Evo primjera koji to dokazuje. Neka je A linearni operator projekcije na osu apscisa (osa Ox), a B linearni operator simetrije u odnosu na simetralu I i III kvadranta (prava y=x) (vidi sliku). Tada je $A(x,y)=(x,0)$ i $B(x,y)=(y,x)$. Slijedi, $A(B(x,y))=A(y,x)=(y,0)$ i $B(A(x,y))= B(x,0)=(0,x)$. Kako je $(y,0)\neq(0,x)$, to je $A\circ B\neq B\circ A$.

Primer 1.12. Lako se dokazuje da su sljedeći operatori A i B linearni i komutativni:
$A(x,y)=(x+y,y)$, $B(x,y)=(x-y,y)$.

Primer 1.13. Razmotrimo linearni operator $A_1(x,y)=(x,\lambda y)$, $\lambda\in$R. Za $\lambda=0$ operator A_1 je projekcija na osu apscisa, za $\lambda=1$ radi se o identičkom (kaže se i jediničnom) preslikavanju ravni u samu sebe, za $\lambda=-1$ operator A_1 je simetrija u odnosu na osu apscisa. Ako je $|\lambda|<1$ operator A_1 nazivamo kontrakcia (stezanje, sažimanje) prema osi apscisa, a za $|\lambda|>1$ –dilatacija (rastezanje) prema osi opscisa. Na sličan način se definiše linearni operator $A_2(x,y)=(\lambda x,y)$ koji steže ili rasteže koordinatnu ravan u smjeru ose ordinata u zavisnosti od toga da li je $|\lambda|<1$ ili $|\lambda|>1$. Interesantno je pogledati kako operator sažimanja (rastezanja) djeluje na neke od geometrijskih likova, na primjer, kružnicu. Podjetimo se: jednačina jedinične kružnice K glasi $x^2+y^2=1$. Operatorom $A_1(x,y)=(x,2y)$ kružnica K se preslikava u liniju $x^2+4y^2=1$ (kružnica ״stegnuta״ u pravcu ose apscisa dva puta u odnosu na kružnicu K, elipsa). Operatorom $A_1\left(x,y\right)=\left(x,\frac{1}{3}y\right)$ kružnica K se preslikava u liniju $x^2+\frac{1}{9}y^2=1$ (kružnica ״ rasstegnuta ״ u pravcu ose apscisa tri puta, elipsa). Na sličan način se mogu razmatrati stezanja i rasrezanja kružnice K u pravcu ose ordinata. Operator $A(x,y)=A_1A_2(x,y)=(\lambda_1x,\lambda_2y)$ predstavlja stezanje ili rastezanje u smjeru koordinatnih osa, opet u zavisnosti od toga da li su parametri λ_1 ili λ_2 po modulu veći ili manji od 1. Na primjer, oprtator $A\left(x,y\right)=\left(2x,3y\right)$ predstavlja rastezanje duž ose apscisa dva puta i rastezanje duž ose ordinate tri puta. Kružnica K se ovim preslikavanjem prevodi u elipsu $4x^2+9y^2=1$. Za vježbu predlažemo da se razmotri slučaj da se umjesto kružnice K uzme pravougaonik P: $1\leq x\leq3$, $2\leq y\leq5$.

Napomena: Sva prethodna razmatranja imaju svoje analoge u prostoru. Navedimo samo primjer operatora projektovanja. Neka je $M(x,y,z)$ proizvoljna tačka iz prostora R^3. Preslikavanje $P_{Ox}(x,y,z)$=$(x,0,0)$ se naziva operatorom projektovanja (ili projektor) iz R^3 na osu apscisa Ox toga prostora. Preslikavanje P_{Ox} je linearno. Uočimo da je

M=(x,y,z)=$P_{Ox}(M)$+$P_{Oy}(M)$+$P_{Oz}(M)$. $P^2(M)$=$P(P(M))$=$P(M)$.

I sljedeća preslikavanja

$P_{Oxy}(x,y,z)$=$(x,y,0)$, $P_{Oyz}(x,y,z)$=$(0,y,z)$, $P_{xz}(x,y,z)$=$(x,0,z)$

su linearna (redom, ortogonalna projekcija na ravan Oxy, Oyz, Oxz). Lako se dokazuje da je $P^2(M)$=$P(P(M))$=$P(M)$, gdje je P neki projector.

Primer 1.14. Afine transformacije. Podsjetimo, transformaciju ravni nazivamo afinom ako predstavlja neprekidnu bijekciju koja svaku pravu prevodi u pravu. Svaka afina transformacija ravni može se predstaviti u obliku
(x,y)=$(ax+by+e,\ cx+dy+f)$,
za neke konstante a, b, c, d, e, f (zbog bijektivnosti je $ad-bc\neq 0$). Obično se prikazuje u formi matrice

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Sva izometrijska preslikavanja u ravi (translacija, rotacija, osna i centralna simetrija) su afine transfprmacije. Matrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se, sa razlogom, naziva linearni dio afinog preslikavanja. Vektor $q = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ nazivamo vektorom translacije. Afina transformacija L se, na prirodan način, sa tačaka prenosi na vektore: $L\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{L(A)\,L(B)}$. Preslikavanje L na skupu vekora je linearno, jer zadovoljava uslove:

$$L\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}, L\left(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\right) = L\left(\overrightarrow{a}\right) + L\left(\overrightarrow{b}\right), L\left(\lambda\overrightarrow{a}\right) = \lambda L\left(\overrightarrow{a}\right).$$

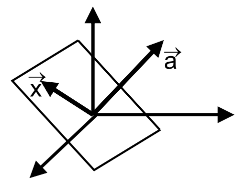
1. Preslikavanje $D(f) = f^{\setminus}(x)$je linearno

1. Preslikavanje $I(f)$=$\int f(x)dx$ je linearno.

2 Linearne jednačine

Neka je f:$X\to Y$ linearno preslikavanje. Za pereslikavanje f bitna su tri objekta: domen (skup X), način pridruživanja (f) i kodomen (skup Y). Ako su poznata dva od tri navedena objekta, tada se treći objekat može naći. Istina, to ne mora biti na jednoznačan način.

a) Neka je poznato f i B, gdje je $B\subset Y$. Traži se skup $A\subset X$ za koji je $f(A)$=B. Ovdje je $f(A)$=$\{y\in Y$: y=$f(x)$, $x\in A\}$. Ako je B=$\{b\}$, tada se problem svodi na rješavanje jednačine $f(x)$=b u skupu X, tj. određivanje svih vrijednosti $x\in X$ za



Slika 9:

koje je je $f(x)=b$. Jednačina $f(x)=b$ može, ali ne mora, imati rješenja u skupu X.

b) Neka je poznato A, $A \subset X$ i f. Traži se skup $B=f(A)$, $B \subset Y$.

c) Neka su poznati A i B, gdje su $A \subset X$ i $B \subset Y$. Traži se f takvo da je $f(A)=B$. Na primjer, neka je $A=B=[0,1]$. Ako je $f(x)=x$, tada je $f(A)=B$. Isti se rezultat dobija, ako je $f(x)=x^2$, što znači da postoji više funkcija f za koje je $f(A)=B$.

Definicija 2.1. Jednačinu

$$f(x) = b \tag{1}$$

gdje je $f: X \to Y$ linearno preslikavanje i b fiksirani elemenat iz skupa Y nazivamo linearna jednačina.

Ako je $b=0$, tada jednačinu

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

nazivamo homogena linearna jednačina, u suprotnom – nehomogena linearna jednačina.

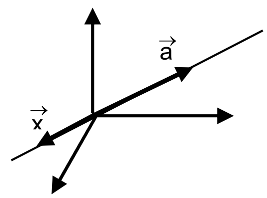
Rješenjem jednačine 1 nazivamo elemenat $x_0 \in X$ takav da je $f(x_0)=b$. Riješiti jednačinu 1 znači naći sva njena rješenja ili dokazati da ona nema rješenja.

Za početak razmotrimo homogenu linearnu jednačinu 2. Kako je f aditivno preslikavanje, to je $f(0+0)=f(0)+f(0)$, tj. $f(0)=0$, tj. homogena jednačina 2 uvijek ima rješenje. Ovo rješenje može biti jedinstveno, ali ih može biti i beskonačno mnogo.

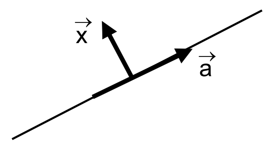
Primer 2.1. 1. Jednačina $2x=0$ u skupu realnih brojeva ima jedinstveno rješenje $x=0$.

2. Jednačina $0.x=0$ ima beskonačno mnogo rješenja, njeno rješenje je svaki realni broj.

3. Jednačina $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$ u prostoru vektora $\vec{V_3}$ ima beskonačno mnogo rješenja. Njeno rješenje je svaki vektor $\vec{x}$ koji je normalan na vektor $\vec{a}$ (vidi sliku). Ako je $\vec{a} \neq \vec{0}$, tada su rješenja svi vektori koji pripadaju ravni koja je normalna na vektor $\vec{a}$ i koja sadrži koordinatni početak. Podsjetimo, ravan je dvodimenzionalni prostor. Ako je $\vec{a} = \vec{0}$, tada je rješenje proizvoljni vektor iz prostora $\vec{V_3}$, tj. prostor rješenja je upravo $\vec{V_3}$.



Slika 10:



Slika 11:

4. Jednačina $\vec{a} \times \vec{x} = 0$ u prostoru vektora $\vec{V_3}$ ima beskonačno mnogo rješenja. Neka je $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tada je rješenje svaki vektor $\vec{x}$ koji je kolinearan sa vektorom $\vec{a}$ (vidi sliku). Skup rješenja čine svi vektori koji pripadaju pravoj određenoj vektorom $\vec{a}$ i kojoj pripada koordinatni početak. Ako je $\vec{a} = \vec{0}$, tada je rješenje proizvoljni vektor iz prostora $\vec{V_3}$, tj. prostor rješenja je upravo $\vec{V_3}$.

5. Jednačina $pr_{\vec{a}}\vec{x} = 0$ ima beskonačno mnogo rješenja. Njeno rješenje je svaki vektor $\vec{x}$ koji je normalan na pravu određenoj vektorom $\vec{a}$ (vidi sliku).

6. Jednačina $S_{Ox}(x, y) = (0, 0)$ ima jedinstveno rješenje (0,0).

7. Jednačina $R_{O,\varphi}(x, y) = (0, 0)$ ima jedinstveno rješenje (0,0).

8. Homogeni sistem linearnih jednačina $\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{array} \right.$ uvijek ima rješenje. Ako je $\Delta \equiv a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, tada ima samo trivijalno rješenje x=y=0. Ako $\Delta = 0$, tada dati sistem jednačina ima beskonačno mnogo rješenja. Ako je bar jedan od koeficijenata sistema: a_1, b_1, a_2, b_2 različit od nule, tada rješenja, geometrijski posmatrano, pripadaju jednoj pravoj koja sadrži koodinatni početak, tj. skup rješenja je jednodimenzionalni linearni prostor. Ako je $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, tada skup rješenja grade proizvoljne uređene dvojke (α,β) realnih brojeva. Skup rješenja u ovome slučaju je koordinatna ravan, tj. dvodimenzionalni prostor.

9. Jednačina $D(f)$=0 ima beskonačno mnogo rješenja $f(x)$=C, gdje je C proizvoljna konstanta.

10. Jednačina $I(f)$=0, tj. $\int f(x)dx = 0$ ima jedinstveno rješenje $f(x)$=0.

Označimo sa Ω skup svih rješenja jednačine (2), tj. Ω=$\{x \in X\colon f(x)=0\}$. Uočimo jedno bitno svojstvo skupa Ω: Ako su x_1 i x_2 rješenja jednačine (2), tada je njeno rješenje i linearna kombinacija

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

gdje su λ_1 i λ_2 proizvoljni realni brojevi. Stvarno, kako je $f(x_1)=0$ i $f(x_2)=0$, to je $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)=\lambda_1.0+\lambda_2.0=0$, što je i trebalo dokazati. Na strogom matematičkom jeziku kazano: Ω je linearni prostor. Kako se pojam linearnog prostora ne uvodi u srednjoškolsku matematiku, to je dovoljno umjesto njega navesti svojstvo da je rješenje jednačine (2) i linearna kombinacija $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ njenih rješenja x_1 i x_2. Sva ova razmatranja o linearnim preslikavanjima može pregledno, efikasno i elegantno da se izloži pomoću matrica, što ovdje nećemo raditi.

Pogledajmo strukturu rješenja nehomogene jednačine 1. Označimo sa x_h opšte (proizvoljno) rješenje pripadajuće homogene jednačine 2 i sa x_p jedno partikularno (konkretno) nehomogene jednačine 1. Tada je opšte (proizvoljno) rješenje x_o nehomogene jednačine 1 jednako zbiru rješenja x_h i x_p, tj.

$$x_o = x_h + x_p. \tag{3}$$

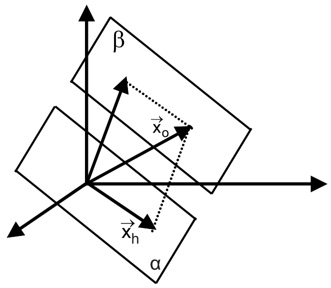
Dokaz da je formulom 3 dato rješenje jednačine 1 je vrlo prost. Kako je, po pretpostavci, $f(x_h)=0$ i $f(x_p)=b$, to je $f(x_o)=f(x_h+x_p)= f(x_h)+ f(x_p)=0+b=b$, što je i trebalo dokazati. Ovo svojstvo imaju sve linearne jednačine (algebarske, vektorske, diferencijalne, integralne, operatorske ....). Iz prethodnog slijedi, da bi riješili nehomogenu linearnu jednačinu dovoljno je naći opšte rješenje pripadajuće homogene jednačine i jedno partikularno rješenje polazne nehomogene jednačine i sabrati ta dva rješenja.

Primer 2.2.

1. Razmotrimo jednačinu $ax=b$. Odgovarajuća homogena jednačina $ax=0$ može da ima jedinstveno rješenje $x_h=0$ (za $a\neq 0$), ili beskonačno mnogo rješenja $x_h=\nu$, $\nu \in \mathrm{R}$ (za $a=0$). U prvom slučaju imamo da je $x_p = \frac{b}{a}$, a u drugom slučaju ne postoji partikularno rješenje (jer je $b\neq 0$). Slijedi, data nehomogena jednačina ima jedinstveno rješenje za $a\neq 0$: $x_o = x_h+x_p = 0 + \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$. Za $a=0$, odgovarajuća nehomogena jednačina nema rješenja.

2. Riješimo sistem jednačina $\left\{\begin{array}{c} 2x+y=0 \\ -x+3y=7 \end{array}\right.$. Pripadajući homogeni sistem jednačina $\left\{\begin{array}{c} 2x+y=0 \\ -x+3y=0 \end{array}\right.$ ima samo trivijalno rješenje (0,0). U ovom slučaju dati sistem ima samo jedno (partikularno) rješenje $(-1,2)$. Slijedi, dati sistem ima jedinstveno rješenje $(0,0)+(-1,2)=(-1,2)$, tj. $x=-1$, $y=2$.

3. Riješimo jednačinu: $x+y=2$. Radi se o sistemu od jedne jednačine sa dvije promjenljive. Rješenje pripadajuće homogene jednačine $x+y=0$ je svaki uređeni par $(\nu,-\nu)$, gdje je $\nu \in \mathrm{R}$. Jedno partikularno rješenje nehomogene



Slika 12:

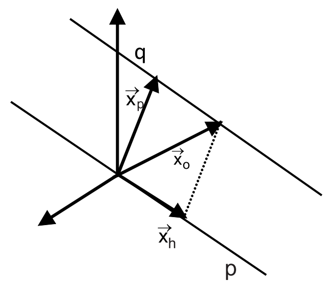
jednačine je, na primjer, (1,1). Slijedi, proizvoljno rješenje date jednačine je zbir rješenja $(\nu,-\nu)$ i (1,1), tj. $(\nu+1,-\nu+1)$, gdje je ν proizvoljni realni broj. U drugim oznakama, rješenje je $x=\nu+1$, $y=-\nu+1$, gdje je ν proizvoljni realni broj.

4. Jednačina $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$, $b\neq 0$ u $\vec{V}_3$ima beskonačno mnogo rješenja. Stvarno, neka je $\vec{x}_p\vec{x}_o\vec{x}_h\vec{x}_p\vec{x}_o\vec{x}_h\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ i $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$. Tada je $\vec{a}\cdot\vec{x}=b\Leftrightarrow a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$. Slijedi, rješenje date jednačine je svaki vektor $\vec{x}$ čije su koordinate (x_1,x_2,x_3) rješenja linearnr jednačine $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$. Uočimo da je sa $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$ data jednačina ravni u prostoru. Označimo je sa β. Skup rješenja homogene jednačine $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ gradi linearni prostor. Geometrijski posmatrano, to je ravan α koja sadrži koordinatni početak i normalna je na vektor $\vec{a}$ (vidi sliku). Označimo sa $\vec{x}_h$ proizvoljno rješenje jednačine $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$, i sa $\vec{x}_p$ partikularno (konkretno) nehomogene jednačine $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$. Tada je proizvoljno rješenje $\vec{x}_o$ nehomogene jednačine $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$ jednako zbiru rješenja $\vec{x}_h$ i $\vec{x}_p$, tj. $\vec{x}_o=\vec{x}_h+\vec{x}_p$ (ponovo vidi sliku). Ravni α i β su paralelne, ravan β nastaje translacijom ravni α za vektor $\vec{x}_p$, gdje je $\vec{x}_p$ je proizvoljno partikularno rješenje nehomogene jednačine $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$.

5. Jednačina $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ u $\vec{V}_3$ ima beskonačno mnogo rješenja. Ova rješenja se dobijaju kao zbir rješenja $\vec{x}_h$ homogene jednačine $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{0}$ i partikularnog rješenja $\vec{x}_p$ nehomogene jednačine $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$ (vidi sliku). Rješenja homogene jednačine su vektori koji pripadaju pravoj p koja sadrži koordinatni početak i ima vektor pravca $\vec{a}$. Skup rješenja nehomogene jednačine su vektori $\vec{x}_o$ koji pripadaju pravoj q koja nastaje translacijom prave p za vektor $\vec{x}_p$. Slično prethodnim primjerima, imamo da je $\vec{x}_o=\vec{x}_h+\vec{x}_p$ (ponovo vidi sliku).

6. Jednačina $D(f)=g(x)$, ima rješenje $f(x)=\int g(x)\,dx+C$, gdje je C proizvoljna konstanta.

7. Jednačina $I(f)=g(x)$, ima rješenje $f(x)=g\prime(x)$.



Slika 13:

Literatura

[1] Gegelije G., Princip kontraktivnih preslikavanja, Kvant, 9 (1980)

[2] Vertgejm B., Metod nepokretne tačke, Kvant, 8 (1980)

[3] Danilov V., Lekcije o nepokretnim tačkama, Ruska ekonomska škola, Moskva, 2006

[4] M. Gardner, Aha! Gotcha, W. H. Freeman and Company, San Francisko, 1982

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Ergodičke teoreme za kosinusne operatorske funkcije

Amina šahović, Fikret Vajzović, Sead Peco
University "Džemal Bijedić" Mostar, GF,University of Sarajevo, PMF, University "Džemal Bijedić" Mostar, GF
amina.sahovic@unmo.ba, sead.peco@unmo.ba

Pregledni rad

Apstrakt

Dokazane su tri ergodičke teoreme kojima je data veza između operatora koji se pojavljuju u ergodičkim limesima i pozitivnog kvadratnog korijena iz infinitezimalnog generatora ograničene jako neprekidne kosinusne operatorske funkcije u kompleksnom Banach-ovom prostoru i na jednoj užoj klasi Banach-ovih prostora.

1 Uvod

Ergodičkim teoremama za kosinusne operatorske funkcije na Banachovim prostorima, bavili su se mnogi autori (vidjeti npr. [2], [4]). Uovom radu dokazujemo tri ergodičke teoreme. U prvoj teoremi (Teorema 2.1) dokazujemo da je skup slika operatora koji se pojavljuje u jakom ergodičkom limesu u beskonačnosti ograničene jako neprekidne kosinusne operatorske funkcije $C(t)$ sa infinitezimalnim generatorom A u kompleksnom Banachovom prostoru, jednak skupu kojega pozitivan kvadratni korijen iz $-A$ prevodi u 0. U drugoj teoremi (Teorema 2.2) dokazujemo da je u slučaju kada 0 ne pripada punktualnom spektru operatora A, familija operatora $\left\{\frac{S(T)}{T}\right\}_{T>0}$,

$$S(T) := \int_0^T C(t)dt, \ \ T > 0, \ \|C(t)\| \leq 1 \ \text{ za sve } \ t \in \mathbb{R}$$

jako Cesaro-1 ergodična u beskonačnosti, tj. za svaki $x \in X$ postoji

$$(C,1) - \lim_{T\to+\infty} \frac{S(T)}{T}x := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{S(T)}{T}dt$$

i jednak je 0. Primjenjujući dobijene rezultate (Teorema 2.1 i Teorema 2.2) na ograničenu jako neprekidnu kosinusnu operatorsku funkciju $C(t)$ takvu da je $\|C(t)\| \leq 1$ za sve $t \in \mathbb{R}$ u refleksivnom striktno konveksnom Banachovom prostoru X sa Gâteaux-diferencijabilnom normom dobijamo da je operator P_1 definisan sa

$$P_1 x := (C,1) - \lim_{T\to+\infty} \frac{S(T)}{T}x \ \text{ za } \ x \in X,$$

ograničen linearni projektor ovakvog prostora X na nul-podprostor pozitivnog kvadratnog korijena iz $-A$ (Teorema 2.4).
Uvedimo pojmove i njihove osobine koje ćemo koristiti u radu.
Neka je X kompleksan Banachov prostor, $B(X)$ kompleksna Banachova algebra svih ograničenih linearnih operatora na X.

Definicija 1.1. Funkciju $C : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(X)$, $(\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ takvu da je:

a) $C(0) = I$, gdje je I identički operator;

b) $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)\,,\ t, s \in \mathbb{R}$;

nazivamo kosinusnom operatorskom funkcijom.
Ako je pri tome vektorska funkcija $C(t)x$ neprekidna (u normi na X) na $\mathbb{R}$ za svaki $x \in X$, onda za $C(t)$ kažemo da je jako neprekidna kosinusna operatorska funkcija. Ako pored toga, postoji konstanta $M (M \geq 1)$, takva da vrijedi $\|C(t)\| \leq M$ za sve $t \in \mathbb{R}$, tada za jako neprekidnu kosinusnu operatorsku funkciju kažemo da je ograničena.

Infinitezimalni generator A jako neprekidne kosinusne operatorske funkcije $C(t)$ je definisan sa

$$Ax = \lim_{t \to 0} 2\frac{C(t)x - x}{t^2}$$

za sve $x \in X$ za koje ovaj limes postoji.
Znamo da je A zatvoren operator sa domenom $D(A)$ gustim u X.
U ovom radu, $C(t)$ je jako neprekidna kosinusna operatorska funkcija za koju vrijedi $\|C(t)\| \leq 1$, za sve $t \in \mathbb{R}$. Pridružimo datoj funkciji $C(t)$ familiju operatora $F_a, a \geq 0$ definisanu na sljedeći način

$$F_a x := \lim_{\alpha \searrow 0} F_{a,\alpha} x, \quad x \in X, a \geq 0 \tag{1}$$

gdje je

$$F_{a,\alpha} x := \frac{1}{\pi i} \int_0^a du \int_{\alpha + i0}^{\alpha + iu} \left[\lambda R(\lambda^2, A) + \overline{\lambda} R(\overline{\lambda}^2, A \right] d\lambda, \quad \lambda = \alpha + iy, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Ovdje je rezolventa operatora A označena sa $R(\lambda^2, A)$, tj. $R(\lambda^2, A) = (\lambda^2 - A)^{-1} \in B(X)$.

U [3] je dokazano da limes u (1) postoji za sve $x \in X$ i $a \geq 0$, i vrijedi

$$F_a x = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin at}{t} \right)^2 C(2t) x dt = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin at}{t} \right)^2 C\left(\frac{2t}{a} \right) x dt. \tag{2}$$

Kako je $\|C(t)\| \leq 1$ za sve $t \in \mathbb{R}$, iz jednakosti (2), slijedi

$$\|F_a\| \leq a \ \text{ za sve } \ a \geq 0, \tag{3}$$

i funkcija $a \longmapsto F_a$ je jako neprekidna $[0, +\infty)$.
Navedimo sada neke osobine operatora $F_a, a \geq 0$ (proved in [3]):

i)
$$\lim_{a \to +\infty} \frac{F_a x}{a} = x, \quad x \in X \tag{4}$$

ii)
$$F_a F_b x = F_b F_a x = 2 \int_0^a F_u x du + (b-a) F_a x, \quad x \in X, 0 \leq a \leq b. \tag{5}$$

iii)
$$\begin{aligned} C(t)F_a x = & - \int_0^a \left[(a-u)\cos ut\right]_u' dF_u x = \\ & = \cos at F_a x + \int_0^a \left[(a-u)\cos ut\right]_{uu}'' F_u x du = \\ & = \cos at F_a x + 2t \int_0^a \sin tu F_u x du - \\ & - t^2 \int_0^a (a-u) \cos tu F_u x du, \ a \geq 0, \ t \in \mathbb{R}, \ x \in X. \end{aligned} \tag{6}$$

Iz (4) slijedi da je skup vektora oblika $F_a x, a \geq 0, \ x \in X$ gust u X.
Na ovom skupu je definisan operator A_0 na sljedeći način

$$A_0 F_a x := a F_a x - F_a^2 x, \ x \in X, a \geq 0.$$

Dokazano je ([5]) da se operator A_0 može zatvoriti i njegovo zatvorenje je nazvano pozitivan kvadratni korijen iz $-A$ i označeno sa A_+. Vrijedi (vidjeti [5]):

$$A = -A_+^2 \ \text{ na } \ D(A). \tag{7}$$

O osobinama ovog operatora pogledati radove [5] i [6]. Posmatrajmo funkciju $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ definisanu sa

$$\langle x, y \rangle := \|x\| \lim_{t \searrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \quad x, y \in X. \tag{8}$$

Za nju vrijede sljedeće osobine (vidjeti [7])

a) $\|x\| = \langle x, x \rangle, \ \ x \in X,$

b) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (nejednačina Caushy-Schwarz-Buniakovsky)

c) $\langle ax, y\rangle = \langle x, ay\rangle = a\langle x, y\rangle, \quad a \geq 0,$

d) $\|\langle x, y_1\rangle - \langle x, y_2\rangle\| \leq \|x\| \|y_1 - y_2\| \quad x, y_1, y_2 \in X.$

Iz posljednje osobine lahko se vidi da je funkcija $\langle \cdot, \cdot\rangle$ neprekidna po drugoj komponenti.

Definicija 1.2. Ako u normiranom linearnom prostoru X postoji

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \text{ za svaki } x, y \in X,$$

tada za normu u X kažemo da je Gâteaux-diferencijabilna.

Definicija 1.3. Za normirani linearni prostor X kažemo da je striktno konveksan, ako

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x = ay$$

za neki realni $a \geq 0$ i $x, y \in X$.

Trebaće nam sljedeća teorema (dokazan u [5]).

Teorema 1.1. Neka je X refleksivan, striktno konveksan Banachov prostor sa Gâteaux-diferencijabilnom normom i neka je A infinitezimalni generator ograničene jako neprekidne kosinusne operatorske funkcije $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Tada broj 0 ne pripada rezidualnom spektru operatora A.

2 Ergodičke teoreme

Lema 2.1. Ako je X (kompleksan) Banachov prostor, C(t) ograničena jako neprekidna kosinusna operatorska funkcija sa infinitezimalnim generatorom A, familija operatora $F_a, a \geq 0$ definisana sa (1), A_+ pozitivan kvadratni korijen iz $-A$, operatori $S(T)$, $T > 0$ definisani sa

$$S(T) := \int_0^T C(t)dt, \quad T > 0, \tag{9}$$

tada za sve $x \in X,\ a > 0,\ T > 0$ vrijedi

$$A_+ S(T) F_a x = \sin aT \cdot F_a x + \int_0^a \left[(a-u)\sin Tu\right]''_{uu} F_u x du \tag{10}$$

Dokaz 2.1. Prema definiciji operatora A_+, (6) i (5), za $x \in X,\ a > 0,\ t \in \mathbb{R}$

$$C(t)A_+F_a x = C(t)(aF_a x - F_a^2 x) = aC(t)F_a x - C(t)F_a F_a x =$$

$$= a\cos atF_a x + 2at\int\limits_0^a \sin tuF_u x du - at^2\int\limits_0^a (a-u)\cos tuF_u x du$$

$$-\cos atF_a^2 x - 2t\int\limits_0^a \sin tuF_u F_a x du + t^2\int\limits_0^a (a-u)\cos tuF_u F_a x du =$$

$$= a\cos atF_a x + 2at\int\limits_0^a \sin tuF_u x du - at^2\int\limits_0^a (a-u)\cos tuF_u x du -$$

$$-\cos atF_a^2 x - 2t\int\limits_0^a \sin tu\left[2\int\limits_0^u F_s ds + (a-u)F_u\right] x du +$$

$$+t^2\int\limits_0^a (a-u)\cos tu\left[2\int\limits_0^u F_s ds + (a-u)F_u\right] x du =$$

$$= a\cos atF_a x - \cos atF_a^2 x - 4t\int\limits_0^a \sin tu\left[\int\limits_0^u F_s ds\right] x du +$$

$$+2t\int\limits_0^a u\cdot\sin tuF_u x du + 2at^2\int\limits_0^a \cos tu\left[\int\limits_0^u F_s ds\right] x du -$$

$$-2t^2\int\limits_0^a u\cos tu\left[\int\limits_0^u F_s ds\right] x du - t^2\int\limits_0^a u\cos tu(a-u)F_u x du =$$

$$= a\cos atF_a x + \cos atF_a^2 x - 2\int\limits_0^a \cos tuF_u x du - 2at\int\limits_0^a \sin tuF_u x du +$$

$$+4t\int\limits_0^a u\cdot\sin tuF_u x du - at^2\int\limits_0^a u\cos tuF_u x du + t^2\int\limits_0^a u^2\cos tuF_u x du,$$

jer je, nakon parcijalne integracije,
$-4t\int\limits_0^a \sin tu\left[\int\limits_0^u F_s ds\right] x du = 2\cos atF_a^2 x - 4\int\limits_0^a \cos tuF_u x du,$
$2at^2\int\limits_0^a \cos tu\left[\int\limits_0^u F_s ds\right] x du = at\sin atF_a^2 x - 2at\int\limits_0^a \sin tuF_u x du,$

$$-2t^2\int\limits_0^a u\cos tu\left[\int\limits_0^u F_s ds\right] x du = -\cos atF_a^2 x - ta\sin taF_a^2 x +$$

$$+2\int\limits_0^a \cos tuF_u x du + 2t\int\limits_0^a u\sin tuF_u x du.$$

Dakle, za $x \in X,\ a > 0,\ t \in \mathbb{R}$

$$C(t)A_+F_ax = a\cos atF_ax - 2\int\limits_0^a \cos tuF_uxdu - 2at\int\limits_0^a \sin tuF_uxdu +$$

$$+ 4t\int\limits_0^a u\cdot\sin tuF_uxdu - at^2\int\limits_0^a u\cos tuF_uxdu + t^2\int\limits_0^a u^2\cos tuF_uxdu.$$

Odavde, nakon integraljenja po t u granicama od 0 do $T, T > 0$ dobijamo

$$\int\limits_0^T C(t)A_+F_axdt = aF_ax\int\limits_0^T \cos atdt - 2\int\limits_0^a F_ux\left[\int\limits_0^T \cos tudt\right]du -$$

$$- 2a\int\limits_0^a F_ux\left[\int\limits_0^T t\sin tudt\right]du + 4\int\limits_0^a uF_ux\left[\int\limits_0^T t\sin tudt\right]du -$$

$$- a\int\limits_0^a uF_ux\left[\int\limits_0^T t^2\cos tudt\right]du + \int\limits_0^a u^2F_ux\left[\int\limits_0^T t^2\cos tudt\right]du =$$

$$= \sin aT\cdot F_ax - 2a\int\limits_0^a \frac{1}{u}\sin uT\cdot F_uxdu -$$

$$- 2a\int\limits_0^a F_ux\left[\frac{1}{u^2}\sin uT - \frac{1}{u}T\cos uT\right]du + 4\int\limits_0^a uF_ux\left[\frac{1}{u^2}\sin uT - \frac{1}{u}T\cos uT\right]du -$$

$$- a\int\limits_0^a uF_ux\left[\frac{2}{u^2}T\cos uT + \frac{T^2}{u}\sin uT - \frac{2}{u^3}\sin uT\right]du +$$

$$+ \int\limits_0^a uF_ux\left[\frac{2}{u^2}T\cos uT + \frac{T^2}{u}\sin uT - \frac{2}{u^3}\sin uT\right]du =$$

$$= \sin aT\cdot F_ax - 2T\int\limits_0^a \cos uTF_uxdu -$$

$$- aT^2\int\limits_0^a F_ux\sin uTdu + T^2\int\limits_0^a u\sin uTF_uxdu.$$

Dakle, za $x \in X,\ a > 0,\ T > 0$

$$S(T)A_+F_ax = \sin aT \cdot F_ax - 2T\int_0^a \cos uTF_uxdu - T^2\int_0^a (a-u)\sin TuF_uxdu =$$
$$= \sin aT \cdot F_ax + \int_0^a \left[(a-u)\sin Tu\right]''_{uu} F_uxdu \tag{11}$$

Kako je A_+ zatvoren operator i $C(t)A_+F_ax = A_+C(t)F_ax$ (jer $C(t)$ i F_a komutiraju), to je $A_+S(T)F_ax = S(T)A_+F_ax$ za sve $x \in X,\ a > 0,\ t \in \mathbb{R}$.
Odavde i iz (11) direktno slijedi (10), čime je lema dokazana.

Definišimo operator P sa

$$Px := \lim_{T\to+\infty} \frac{S(T)}{T}x \tag{12}$$

za sve one x za koje limes postoji. Ovdje su operatori $S(T)$ definisani sa (9). Označimo sa $R(P)$ skup slika operatora P,a sa $\mathrm{Ker}(A_+)$ nul-podprostor operatora A_+,
tj. $\mathrm{Ker}(A_+) := \{x \in X | A_+x = 0\}$.

Teorema 2.1. Ako je X (kompleksan) Banachov prostor, $C(t),\ t \in \mathbb{R}$ ograničena jako neprekidna kosinusna operatorska funkcija sa infinitezimalnim generatorom A, A_+ pozitivan kvadratni korijen iz $-A$, operator P definisan sa (12), tada je $R(P) = \mathrm{Ker}(A_+)$.

Dokaz 2.2. Predpostavimo da postoji $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{S(T)}{T}x = \overline{x}$ za neki $x \in X$. Tada, zbog toga što je za svaki $a > 0$ operator A_+F_a ograničen operator, za svaki $a > 0$ postoji $\lim\limits_{T\to+\infty} A_+F_a\frac{S(T)}{T}x$ i jednak je $A_+F_a\overline{x}$.
Odavde i iz $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{S(T)}{T}F_ax = F_a\overline{x}$ i zatvorenosti operatora A_+, slijedi postojanje $\lim\limits_{T\to+\infty} A_+\frac{S(T)}{T}F_ax (= \lim\limits_{T\to+\infty} A_+F_a\frac{S(T)}{T}x = A_+F_a\overline{x})$ za svaki $a > 0$.
Prema (10), za svaki $a > 0$

$$\lim_{T\to+\infty} A_+\frac{S(T)}{T}F_ax =$$
$$= \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{\sin aT}{T}F_ax - 2\int_0^a \cos Tu \cdot F_uxdu - T\int_0^a (a-u)\sin TuF_uxdu\right] =$$
$$(= A_+F_a\overline{x}) \tag{13}$$

Pokažimo da je limes na lijevoj strani od (13) jednak nuli za svaki $a > 0$.
Kako smo utvrdili njegovo postojanje dovoljno je pokazati da vrijedi (14), (15) i

(16), što u daljem i činimo.
Očito, zbog (3) za svaki $a > 0$

$$\frac{\sin aT}{T} F_a x \to 0 \ \ (T \to +\infty). \tag{14}$$

Neka su $a > 0,\ y \in X$ proizvoljni, ali fiksni.
Stavimo $\varphi(u) := \langle y, F_u x \rangle \quad (u \geq 0)$, gdje je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ funkcija definisana sa (8).
Tada je $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(u)$ je neprekidna funkcija po $u \in [0, a]$. Prema Riemannovoj lemi,

$$\int_0^a \cos Tu \varphi(u) du \to 0 \ \ (T \to +\infty). \tag{15}$$

Pokažimo još

$$\begin{aligned} &(C,1)\!-\lim T \int_0^a (a-u) \sin Tu \cdot \varphi(u) du := \\ &:= \frac{1}{M} \int_0^M \left[T \int_0^a (a-u) \sin Tu \cdot \varphi(u) du \right] dT \to 0 \ \ (M \to +\infty). \end{aligned} \tag{16}$$

Očito je

$$\begin{aligned} &\frac{1}{M} \int_0^M \left[T \int_0^a (a-u) \sin Tu \cdot \varphi(u) du \right] dT = \\ &= \int_0^a (a-u) \varphi(u) du \frac{1}{M} \int_0^a T \sin Tu dT = \\ &= -\int_0^a (a-u) \varphi(u) du \frac{\cos Mu}{u} du + \frac{1}{M} \int_0^a (a-u) \frac{\sin Mu}{u^2} \varphi(u) du \end{aligned} \tag{17}$$

(nakon parcijalne integracije).
Kako je funkcija $(a-u)\frac{\varphi(u)}{u}$ neprekidna na $u \in (0, a]$ i

$$\left| (a-u) \frac{\varphi(u)}{u} \right| \leq a \cdot \|y\| \cdot \|x\| \quad \text{na} \ \ u \in [0, a],$$

to je funkcija $(a-u)\frac{\varphi(u)}{u}$ integrabilna na $0 \leq u \leq a$, pa prema Riemannovoj lemi

$$\int_0^a (a-u) \frac{\varphi(u)}{u} \cdot \cos Mu du \to 0 \ \ (M \to +\infty).$$

Za posljednji integral u (17) vrijedi

$$\frac{1}{M}\int_0^a (a-u)\frac{\sin Mu}{u^2}\varphi(u)du = \frac{1}{M}\cdot a\cdot\int_0^a \frac{\sin Mu}{u^2}\varphi(u)du - \frac{1}{M}\int_0^a \sin Mu\cdot\frac{\varphi(u)}{u}du.$$

Zbog integrabilnosti funkcije $\frac{\varphi(u)}{u}$ na $u\in[0,a]$, prema Riemannovoj lemi

$$\int_0^a \sin Mu\cdot\frac{\varphi(u)}{u}du \to 0\ \ (M\to+\infty),$$

a prema L'Hospitalovom pravilu je

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin Mu}{u^2}\varphi(u)du = \lim_{M\to+\infty}\int_0^a \cos Mu\cdot\frac{\varphi(u)}{u}du,$$

ako limes na desnoj strani jednakosti postoji. Ali, kako je funkcija $\frac{\varphi(u)}{u}$ integrabilna na $u\in[0,a]$, prema Riemannovoj lemi, posljednji limes je jednak nuli. Dakle, dokazali smo da je $A_+F_a\overline{x}$ za svaki $a>0$. Otuda je $\lim\limits_{a\to+\infty}A_+\frac{F_a}{a}\overline{x}=0$. Odavde i iz $\frac{F_a}{a}\overline{x}\to\overline{x}\ \ (a\to+\infty)$(prema (4) i zatvorenosti operatora A_+, slijedi

$$\overline{x}\in D(A_+)\ \text{ i }\ A_+\overline{x}=0.$$

Obratno, neka je $\overline{x}\in D(A_+)$ takav da je $A_+\overline{x}=0$. Tada je, prema (7), $A\overline{x}=0$. Ovo povlači $C(t)\overline{x}-\overline{x}\left(=\int\limits_0^t(t-u)C(u)A\overline{x}\right)=0$ za svaki $t\in\mathbb{R}$, pa je

$$C(t)\overline{x}=\overline{x}\ \text{ za svaki }\ t\in\mathbb{R}.$$

Otuda, $\frac{S(T)}{T}\overline{x}\left(=\frac{\int\limits_0^T C(t)\overline{x}dt}{T}\right)=\overline{x}$ za svaki $T>0$, pa je

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{S(T)}{T}x=x,$$

čime je lema dokazana.

Lema 2.2. Neka je X refleksivan, striktno konveksan Banachov prostor sa Gâteaux-diferencijabilnom normom, $C(t)$ ograničena jako neprekidna kosinusna operatorska funkcija sa infinitezimalnim generatorom A, familija operatora $F_a, a\geq 0$ definisana sa (1), A_+ pozitivan kvadratni korijen iz $-A$. Ako 0 ne pripada punktualnom spektru operatora A, tada vrijedi:

i)

$$\frac{F_a}{a}x\to 0\ \text{ kada }\ a\to 0\ \text{ za svaki }\ x\in X; \tag{18}$$

ii)
$$\frac{F_a}{a^2}x \to 0 \text{ kada } a \to 0 \text{ na skupu } R(A_+) \text{ gustom u } X; \tag{19}$$

iii)
$$\frac{F_a}{a^3}x \to 0 \text{ kada } a \to 0 \text{ na skupu } R(A) \text{ gustom u } X; \tag{20}$$

pri čemu smo sa $R(A)$ i $R(A_+)$ označili skupove slika operatora A i A_+ respektivno.

Dokaz 2.3. Prije svega primijetimo sljedeće:
Iz predpostavke da 0 ne pripada punktualnom spektru operatora A i Teoreme 1.1 slijedi da je $R(A)$ operatora A gust u X. Odavde i iz (7) slijedi da je $R(A_+)$ operatora A_+ također gust u X.
Iz definicije operatora A_+ slijedi

$$\text{za } x \in D(A_+), a \geq 0 \;\; F_a A_+ x = aF_a x - F_a^2 x. \tag{21}$$

Odavde, nakon dijeljenja sa $a > 0$, dobijamo

$$\frac{F_a}{a}A_+x = F_a x - \frac{F_a^2 x}{a} \quad \text{za sve } x \in D(A_+) \text{ i } a > 0.$$

Kako $F_a x \to 0$ $(a \to 0)$ $(\forall x \in X)$
i kako $\frac{F_a^2 x}{a} \to 0$ $(a \to 0)$ $(\forall x \in X)$ (jer je prema (3) $\left\|\frac{F_a^2 x}{a}\right\| \leq a\,\|x\|$),
iz posljednje jednakosti, dobijamo

$$\frac{F_a}{a}A_+x \to 0 \; (a \to 0) \;\; (\forall x \in D(A_+)). \tag{22}$$

Prema (3),

$$\left\|\frac{F_a}{a}\right\| \leq 1 \;\; (\forall a > 0). \tag{23}$$

Kako je $R(A_+)$ gust u X, prema Banach-Steinhaus-ovom teoremu, iz (22) i (23) slijedi (18).
Iz (21), dobijamo za $a > 0$

$$\frac{F_a}{a^2}A_+x = \frac{F_a}{a}x - \frac{F_a}{a}\frac{F_a}{a}x \;\; (\forall x \in D(A_+)).$$

Iz (23) i (22), imamo

$$\left\|\frac{F_a}{a}\frac{F_a}{a}x\right\| \leq \left\|\frac{F_a}{a}x\right\| \to 0 \; (a \to 0) \;\; \text{za } x \in D(A_+).$$

Zbog ovoga i (18) iz posljednje jednakosti slijedi (19).
Konačno, iz (21) dobijamo za $a > 0$

$$\frac{F_a}{a^3}A_+x = \frac{F_a}{a^2}x - \frac{F_a}{a}\frac{F_a}{a^2}x \;\; (\forall x \in D(A_+)).$$

Odavde, imamo

$$\frac{F_a}{a^3}A_+^2x = \frac{F_a}{a^2}A_+x - \frac{F_a}{a}\frac{F_a}{a^2}A_+x \quad (\forall x \in D(A_+^2)).$$

Iz (23) i (19) slijedi

$$\left\|\frac{F_a}{a}\frac{F_a}{a^2}A_+x\right\| \leq \left\|\frac{F_a}{a^2}A_+x\right\| \to 0 \ (a \to 0) \ \text{ za } x \in D(A_+^2).$$

Zbog toga i (19) iz posljednje jednakosti dobijamo (20).
Dokaz leme je završen.

Teorema 2.2. Neka je X refleksivan, striktno konveksan Banachov prostor sa Gâteaux-diferencijabilnom normom, $C(t)$ jako neprekidna kosinusna operatorska funkcija sa infinitezimalnim generatorom A i familija operatora $F_a, a \geq 0$ definisana sa (1). Ako 0 ne pripada punktualnom spektru operatora A, tada postoji $(C,1) - \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{S(T)}{T}x = x$ i jednak je 0 za svako $x \in X$.

Dokaz 2.4. Iz (6), lako se dobija da za sve $x \in X, a > 0, T > 0$ vrijedi:

$$\frac{S(T)}{T}F_ax = \frac{1}{T}\int_0^T \cos aTF_axdt + \frac{1}{T}\int_0^a F_ux\left\{\int_0^T [(a-u)\cos ut]''_{uu}\,dt\right\}du =$$

$$= \frac{\sin aT}{aT}F_ax + \int_0^a \left[(a-u)\frac{\sin uT}{uT}\right]''_{uu} F_uxdu.$$

Otuda, za sve $x \in X, a > 0, T > 0$ imamo

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{S(t)}{t}F_axdt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\sin at}{at}dtF_ax + \frac{1}{T}\int_0^a \left[(a-u)\int_0^T \frac{\sin ut}{ut}dt\right]''_{uu} F_uxdu. \quad (24)$$

Kako je, prema (23), $\left\|\frac{F_a}{a}x\right\| \leq \|x\| \quad (\forall a > 0)$ i kako je $\int\limits_0^\infty \frac{\sin at}{at}dt = \frac{\pi}{2}$ za $a > 0$, to očito

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\sin at}{at}dtF_ax \to 0 \ \ (T \to +\infty).$$

Za drugi sabirak na desnoj strani od (24), vrijedi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{T}\int_0^a \left[(a-u)\int_0^T \frac{\sin ut}{ut}dt\right]''_{uu} F_uxdu = \left|\ ut = \tau\ \right| = \\ &= \frac{1}{T}\int_0^a \left[\frac{a-u}{u}\int_0^{uT} \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\right]''_{uu} \cdot F_uxdu. \end{aligned} \quad (25)$$

Kako je

$$\left[\frac{a-u}{u}\int\limits_0^{uT}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\right]''_{uu}=\frac{2a}{u^3}\int\limits_0^{uT}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau-\frac{3a}{u^3}\sin uT+$$
$$+\frac{\sin uT}{u^2}-T\frac{\cos uT}{u}+aT\frac{\cos uT}{u^2},$$

to iz (25) dobijamo

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{T}2a\int\limits_0^a\frac{F_ux}{u^3}\left[\int\limits_0^{uT}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\right]du-\frac{1}{T}3a\int\limits_0^a\frac{F_ux}{u^3}\cdot\sin uTdu+\\&+\frac{1}{T}\int\limits_0^a\frac{F_ux}{u^2}\cdot\sin uTdu-\int\limits_0^a\frac{F_ux}{u}\cdot\cos uTdu+a\int\limits_0^a\frac{F_ux}{u^2}\cdot\cos uTdu\end{aligned}\tag{26}$$

Neka je $x\in R(A)$ prozvoljan, ali fiksan.
Stavimo

$$\varphi(u):=F_ux,\quad u\in[0,a]\,.$$

Funkcije $\frac{\varphi(u)}{u}$, $\frac{\varphi(u)}{u^2}$ i $\frac{\varphi(u)}{u^3}$ su neprekidne na $u\in[0,a]\,.$
Prema Lemi 2.2 za svaki $\epsilon>0$, možemo naći $\delta>0$ takav da je $\delta^2\leq\frac{1}{a}$ i da vrijedi

$$\left\|\frac{F_ux}{u}\right\|<\epsilon,\ \left\|\frac{F_ux}{u^2}\right\|<\epsilon\ \left\|\frac{F_ux}{u^3}\right\|<\epsilon\ \text{ za }\ u\in[0,\delta)\,.\tag{27}$$

Otuda su funkcije $\frac{\varphi(u)}{u}$, $\frac{\varphi(u)}{u^2}$ i $\frac{\varphi(u)}{u^3}$ apsolutno integrabilne na $u\in[0,a]\,.$
Zbog toga i zato što je $|\sin uT|\leq 1$ za svako $u\in[0,a]$ i $T>0$, drugi i treći sabirak na desnoj strani od (26) teži nuli kada $T\to+\infty$.
Pokažimo da i prvi sabirak na desnoj strani od (26) također teži nuli kada $T\to+\infty$. Zaista,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\cdot 2a\int\limits_0^a\frac{F_ux}{u^3}\left[\int\limits_0^{uT}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\right]du=&\frac{1}{T}\cdot 2a\int\limits_0^\delta\frac{F_ux}{u^3}\left[\int\limits_0^{uT}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\right]du+\\&+\frac{1}{T}\cdot 2a\int\limits_\delta^a\frac{F_ux}{u^3}\left[\int\limits_0^{uT}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\right]du=I_1+I_2.\end{aligned}$$

Zbog $\delta^2\leq\frac{1}{a}$ i zbog (27) i $\left|\frac{\sin\tau}{\tau}\right|\leq 1\ \ (\forall\tau)$ je očito $|I_1|<a\cdot\delta^2\cdot\epsilon\leq\epsilon$.
Zbog apsolutne integrabilnosti funkcije $\frac{\varphi(u)}{u^3}$ na segmentu $[\delta,a]$ i zbog toga što je $\frac{1}{T}\int\limits_0^{uT}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$, pri konstantnom $T(>0)$, integrabilna po $u\in[\delta,a]$ i zbog toga što

$\frac{1}{T}\int\limits_0^{uT} \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau \to 0 \ \ (T \to +\infty)$ ravnomjerno po $u \in [\delta, a]$, vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{T\to+\infty} I_2 &= \lim_{T\to+\infty} 2a \cdot \int\limits_\delta^a \frac{F_u x}{u^3}\left[\frac{1}{T}\int\limits_0^{uT}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\right]du = \\ &= 2a\int\limits_\delta^a \frac{F_u x}{u^3}\left[\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^{uT}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\right]du = 0.\end{aligned}$$

Ovim smo pokazali da za svaki $x \in R(A)$ i $a > 0$ postoji $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{S(t)}{t}F_a x dt$ i jednak je nuli. Za $a = 0$ je očito.
Iz predpostavke da 0 ne pripada punktualnom spektru od A i Teoreme 1.1 slijedi da je skup $R(A)$ gust u X. Kako je funkcija $C(t)$ ograničena i vrijedi (3), to je $\left\|\frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{S(t)}{t}dtF_a x\right\| \leq a\|x\|$ za svaki $x \in X$ i $a \geq 0$, tj. za svaki $a \geq 0$ operatori $\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{S(t)}{t}dtF_a\right\}_{T>0}$ su ravnomjerno ograničeni.
Otuda, prema Banach-Steinhaus-ovoj teoremi

$$\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{S(t)}{t}dt\right)(F_a x) \to 0 \ \ (T \to +\infty)\ (\forall x \in X \text{ i } a \geq 0).$$

Odavde i zbog toga što je i skup $\bigcup\limits_{a\geq 0} F_a[X]$ gust u X i operatori $\left\{\frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{S(t)}{t}dt\right\}_{T>0}$ ravnomjerno ograničeni, ponovo prema Banach-Steinhaus-ovoj teoremi, slijedi

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{S(t)}{t}dt \to 0 \ \ (T \to +\infty)\ (\forall x \in X),$$

čime je teorema dokazana.

U [5] je dokazana sljedeća teorema (vidi [5] Teorema 7.)

Teorema 2.3. Neka je X (kompleksan) refleksivan i striktno konveksan Banachov prostor sa Gâteaux-diferencijabilnom normom i $C(t)$ ograničena jako neprekidna kosinusna operatorska funkcija sa infinitezimalnim generatorom A. Ako tačka 0 pripada punktualnom spektru i ako je nul-podprostor operatora A označen sa L, tada postoji podprostor M prostora X takav da je X direktna suma podprostora L i M prostora X za koju vrijedi

i) $C(t)x = x \ \ (\forall x \in L, \forall t \in \mathbb{R})$;

ii) podprostor M je invarijantan relativno u odnosu na sve opeartore $C(t),\ t \in \mathbb{R}$;

iii) ako posmatramo funkciju $C(t)$ i njen generator A na M onda tačka 0 ne pripada punktualnom spektru operatora A.

Iz navedene Teoreme i upravo dokazanih Teorema 2.1 i 2.2 i zbog $\mathrm{Ker}(A_+) = L$. (vidi [6] Remark 1.), kao direktnu posljedicu dobijamo sljedeću teoremu.

Teorema 2.4. Ako je X refleksivan, striktno konveksan (kompleksan) Banach-ov prostor sa Gâteaux-diferencijabilnom normom, $C(t)$ jako neprekidna kosinusna operatorska funkcija sa infinitezimalnim generatorom A, A_+ pozitivan kvadratni korijen iz $-A$, tada je operator P_1 definisan sa

$$P_1 : (C,1) - \lim_{T \to +\infty} \frac{S(T)}{T} x, \quad x \in X, \quad S(T) = \int_0^T C(t)dt, \quad T > 0,$$

ograničen linearan, gdje su operatori $S(T),\ T > 0$ definisan sa (9) projektor prostora X na $\mathrm{Ker}(A_+)$.

Literatura

[1] Hill E.,Philips R.S.:Functional Analysis and Semigroups, Amer. Math. Soc. Vol. XXXI, Providence, 1957.

[2] Shaw. S.-Y.: Mean and pointwise ergodic theorems fot cosine operator functions, Math. J. Okayama Univ. 27 (1985), 197-203.

[3] Radić M., Vajzović F.: On the Bounded Cosine Operator Function in Banach Space, Mat. Vesnik, 39 (1987), 187-204.

[4] Vajzović F., Radić M.: Two Mean Ergodic Theorems for Cosine Operator Functions and Semigroups, Glas. Mat.Vol 24(44) (1989), 305-321.

[5] šahović A., Vajzović F.: Cosine Operator Functions and Hilbert Transforms, NSJOM, Vol. 35., No. 2. (2005), 41-55.

[6] Vajzović F., šahović A.: Cosine Operator Functions and Hilbert Transforms II, Proc. III congress of mathematicians of Macedonia, Struga, Macedonia (2005), 347-356.

[7] Tapia R.A.: A Charecterization of Inner Product Spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 41,No 2 (1973), 569-574.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Numeričko određivanje svojstvenih vrijednosti Sturm-Liouvilleove jednačine sa konstantnim kašnjenjem

dr. Milenko Pikula
Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Filozofski fakultet Pale,
mr. Elmir Čatrnja
Univerzitet "Džemal Bijedić" Mostar, Nastavnički fakultet, elmir.catrnja@unmo.ba

Apstrakt

Posljednjih godina objavljen je veliki broj radova koji se bave Sturm-Liouvilleovim problemima sa kašnjenjem, kao i obrnutim Sturm-Liouvilleovim problemima sa kašnjenjem, u kojima se mogu naći i rezultati vezani sa asimptotiku svojstvenih vrijednosti pripadajućeg diferencijalnog operatora. Međutim, određivanje svojstvenih vrijednosti klasične Sturm-Liouvilleove jednačine nije nimalo trivijalan zadatak, pa samim time se postavlja pitanje kako odrediti svojstvene vrijednosti Sturm-Liouvilleovog problema sa kašnjenjem.

U ovom radu navedeni su poznati rezultati za neke metode diskretizacije kod klasičnog problema, a zatim je izvršena potrebna modifikacija navedenih metoda u svrhu njihove primjene na približno određivanje prvih nekoliko svojstvenih vrijednosti Sturm-Liouvilleovog problema sa konstantnim kašnjenjem. Pri tome su navedeni i uslovi koje Sturm-Liouvilleova jednačina sa kašnjenjem treba ispunjavati. Na kraju smo za dvije Sturm-Liouvilleove jednačine sa kašnjenjem približno odredili prvih nekoliko svojstvenih vrijednosti, te izvršili poređenje sa ranije poznatim asimptotskim relacijama. Važno je napomenuti da su u rad uvrštene i sugestije koje su proistakle iz diskusije tokom Treće matematičke konferencije Republike Srpske.

1 Uvod

Sturm-Liovilleov problem sastoji se u određivanju spektra diferencijalne jednačine

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{1}$$

uz zadane granične uslove, tj. u određivanju onih vrijednosti λ za koje gornja jednačina ima netrivijalna rješenja. U opštem slučaju funkcija $q(x)$ je kompleksna funkcija prostora $L_1[0, \pi]$ i naziva se potencijal. Više o Sturm-Liovilleovim problema se može naći u [3].

Poznato je (npr. iz [2]) da kada je $q(x) \in L_1[0, \pi]$ i $y(0) = y(\pi) = 0$ granični uslovi, da svojstvene vrijednosti gornjeg problema imaju asimptotsko ponašanje

$$\lambda_n = n^2 + \frac{\omega}{\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty),$$

gdje je $\omega = \int\limits_0^\pi q(x)dx$.

Imajući ovo u vidu, da bi približno odredili spektar moguće je naći nekoliko prvih svojstvenih vrijednosti, a ostatak spektra aproksimirati gornjom asimptotskom relacijom.

Najjednostavniji metod za približno određivanje prvih nekoliko članova spektra je takozvani matrični metod koji se sastoji od prevođenja gornjeg problema u sistem od konačno mnogo jendačina način naveden ispod. Napomenimo da ovaj postupak daje svojstvene vrijednosti uz granični uslov $y(0) = y(\pi) = 0$.

1.1 Matrični metod

Ovdje ćemo opisati postupak koji se može naći u npr. [4]. Neka je data Sturm-Liouvilleova jednačina 1, pri čemu je $q(x)$ realna neprekidna funkcija bez oscilacija i neka su granični uslovi $y(0) = y(\pi) = 0$. Izvršimo podjelu segmenta $[0, \pi]$ na $N \in \mathbb{N}$ jednakih dijelova tačkama $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = \pi$, tako da je $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, gdje je $h = \frac{\pi}{N}$. Sada se gornja jednačina može posmatrati kao sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
-y''(x_0) + q(x_0)y(x_0) &= \lambda y(x_0) \\
-y''(x_1) + q(x_1)y(x_1) &= \lambda y(x_1) \\
&\vdots \\
-y''(x_N) + q(x_N)y(x_N) &= \lambda y(x_N),
\end{aligned}$$

tj. zbog graničnih uslova $y(x_0) = y(0) = 0$ i $y(\pi) = y(x_N) = 0$

$$\begin{aligned}
-y''(x_1) + q(x_1)y(x_1) &= \lambda y(x_1) \\
-y''(x_2) + q(x_2)y(x_2) &= \lambda y(x_2) \\
&\vdots \\
-y''(x_{N-1}) + q(x_{N-1})y(x_{N-1}) &= \lambda y(x_{N-1}).
\end{aligned}$$

Uzimajući da je $y''(x_i) \approx \frac{1}{h^2}(y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}))$ i uvrštavajući u gornji sistem dobijamo

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{h^2}(y(x_0) - 2y(x_1) + y(x_2)) + q(x_1)y(x_1) &= \lambda y(x_1) \\
-\frac{1}{h^2}(y(x_1) - 2y(x_2) + y(x_3)) + q(x_2)y(x_2) &= \lambda y(x_2) \\
&\vdots \\
-\frac{1}{h^2}(y(x_{N-2}) - 2y(x_{N-1}) + y(x_N)) + q(x_{N-1})y(x_{N-1}) &= \lambda y(x_{N-1}).
\end{aligned}$$

što nakon sređivanja svodimo na matričnu jednačinu

$$AY = \lambda Y,$$

pa se određivanje spektra se svodi na određivanje svojstvenih vrijednosti matrice $A = \frac{1}{h^2}M + Q$, gdje je

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

a

$$Q = \begin{pmatrix} q(x_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q(x_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q(x_{N-2}) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & q(x_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Pri tome je nepoznata matrica $Y = (y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_{N-1}))^T$.

Greška dobivena primjenom ove metode brzo raste sa porastom svojstvenih vrijednosti i može se koristi samo za dobijanje prvih nekoliko svojstvenih vrijednosti. Naime u [4] navedena je procjena greške koja je reda $O(n^4h^2)$.

Poboljšanje metode dobija se korištenjem Numerovog metoda za jednačinu $y'' = f(x, y)$, pri čemu je greška reda $O(n^6h^4)$. Kod Numerovog metoda se uzima

$$y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}) = \frac{h^2}{12}(f_{i-1} + 10f_i + f_{i+1}),$$

gdje je $f_i = f(x_i, y(x_i))$, pa se gornji sistem svodi na matričnu jednačinu

$$AY = \lambda BY,$$

gdje je $A = \frac{1}{h^2}M + BQ$ i $B = I - \frac{1}{12}M$, pri čemu su matrice Q i M matrice korištene i kod metode centriranih razlika, a rješavanje Sturm-Liouvilleovog problema na određivanje generalizovanih svojstvenih vrijednosti para matrica (A, B).

Metoda korekcije greške poboljšava grešku i to za metodu centriranih razlika na $O(nh^2)$, a za Numerovu metodu na $O(n^3h^4)$. Ova metoda zasniva se na rezultatu koji govori da greška kod navedenih metoda ne zavisi u velikoj mjeri od potencijala [1]. Dakle, za $q(x) \equiv 0$ moguće je naći tačne svojstvene vrijednosti, a zatim na osnovu numerički dobijenih svojstvenih vrijednosti, moguće je odrediti grešku svake svojstvene vrijednosti. Ovu grešku zatim ispravljamo kod svojstvenih vrijednosti za zadani potencijal.

2 Sturm-Liouvilleov problem sa kašnjenjem

U posljednje vrijeme veliki broj istraživača, među kojima se na našim prostorima može spomenuti dr. Milenko Pikula i saradnici, se bavi tzv. Sturm-Liovilleov problemom sa pomakom, što predstavlja izuzetno složenu problematiku. Pri tome se posmatra diferencijalna jednačina

$$-y''(x) + q(x)y(\alpha(x)) = \lambda y(x), \tag{2}$$

gdje $\alpha(x)$ predstavlja funkciju pomaka. Ako je $\alpha(x) > x$ govorimo o preticanju, a $\alpha(x) < x$ govorimo o kašnjenju. U zavisnosti od oblika funkcije $\alpha(x)$ vrši se dalja klasifikacija kašnjenju i to:

- $\alpha(x) = x - \tau \ \ (0 \leq \tau \leq \pi)$ - konstantno kašnjenje,
- $\alpha(x) = \alpha \cdot x \ \ (0 < \alpha < 1)$ - homogeno kašnjenje,
- $\alpha(x) = x - \tau(x)\ (0 < \tau(x) < x, 0 < \tau'(x) < 1))$ - promjenjivo kašnjenje,
- $\alpha(x)\ (0 < \alpha'(x) < 1)$ - opšte kašnjenje.

Postavlja pitanje kako odrediti spektar ovakvih problema. U nastavku rada izvršili smo modifikaciju prethodno navedenog postupka za određivanje spektra za slučaj $\alpha(x) = x - \tau$, $\tau > 0$, tj. za slučaj konstantnog kašnjenja, pri Dirichletovim graničnim uslovima $y(0) = y(\pi) = 0$.

2.1 Modifikacija matričnog metoda

Stavljajući $\alpha(x) = x - \tau$, $\tau > 0$ u jednačinu (2) dobijamo

$$-y''(x) + q(x)y(x - \tau) = \lambda y(x).$$

Posmatraćemo ovu jednačinu uz granične uslove $y(0) = y(\pi) = 0$. Također ćemo staviti da je $q(x) \equiv 0$ za $x \leq \tau$ i da je $q(x)$ realna neprekidna funkcija bez oscilacija.

Za kašnjenje τ ćemo postaviti i dodatni uslov na sljedeći način. Neka je N broj podjela segmenta $[0, \pi]$. Tada je $h = \frac{\pi}{N}$ mjera intervala. Neka je τ takvo da je $\tau = k \cdot h$ za neko $k \in \{0, \dots, N\}$. Primjenjujući isti ideju kao kod klasičnog problema uzimajući da je

$$x_i - \tau = ih - kh = (i - k)h = x_{i-k},$$

dobijamo sistem

$$\begin{aligned} -y''(x_0) + q(x_0)y(x_{0-k}) &= \lambda y(x_0) \\ -y''(x_1) + q(x_1)y(x_{1-k}) &= \lambda y(x_1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-y''(x_i) + q(x_i)y(x_{i-k}) &= \lambda y(x_i), \\
&\vdots \\
-y''(x_{N-1}) + q(x_{N-1})y(x_{N-k-1}) &= \lambda y(x_{N-1}) \\
-y''(x_N) + q(x_N)y(x_{N-k}) &= \lambda y(x_N).
\end{aligned}
$$

Izrazi $q(x_i)y(x_{i-k})$ za koje je $i-k \leq 0$ su jednaki nuli zbog $q(x) \equiv 0$ za $x \leq \tau$. Nakon što smo zbog $y(0) = 0$ i $y(\pi) = 0$ izbacili prvu i posljednju jednačinu konačno dobijamo

$$
\begin{aligned}
-y''(x_1) &= \lambda y(x_1) \\
&\vdots \\
-y''(x_{k+1}) + q(x_{k+1})y(x_1) &= \lambda y(x_{k+1}) \\
&\vdots \\
-y''(x_i) + q(x_i)y(x_{i-k}) &= \lambda y(x_i) \quad (i > k) \\
&\vdots \\
-y''(x_{N-1}) + q(x_{N-1})y(x_{N-k-1}) &= \lambda y(x_{N-1})
\end{aligned}
$$

Sada, analogno klasičnom slučaju vidimo da je matrica Q kvadratna matrica reda $N-1$ sljedećeg izgleda

$$
Q = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
q(x_{k+1}) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & q(x_{k+2}) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & q(x_{N-k-2}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & q(x_{N-k-1}) & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}.
$$

Pri tome je prvih k redova i zadnjih k kolona sastavljeno od samih nula.

Matricu M određujemo kao i u prethodnom slučaju, pa je matrica M je tridijagonalna kvadratna matrica formata $N-1$ oblika

$$
M = \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}.
$$

Dakle, kao i kod klasičnog slučaja Sturm-Liouvilleova jednačina se svodi na sistem jednačina, tj. na matričnu jednačinu

$$AY = \lambda Y,$$

gdje je nepoznata matrica $Y = (y(x_1), y(x_2), \ldots, y(x_{N-1})^T$, a problem određivanja svojstvenih vrijednosti Sturm-Liovulleovog problema sa kašnjenjem svodi se na određivanje svojstvenih vrijednosti matrice A.

Također, uvodeći oznake uvedene kod klasičnog problema, dobijamo generalizovanu matričnu jednačinu za Numerov metod

$$AY = \lambda BY,$$

i problem određivanja svojstvenih vrijednosti Sturm-Liovulleove jednačine sa kašnjenjem se svodi na određivanje generalizovanih svojstvenih vrijednosti para matrica (A, B).

3 Numerički primjeri

Za određivanje spektra napisali smo program u Javi koji za dati potencijal $q(x)$ koji je zadan kao eksplicitna funkcija i kašnjenje τ približno izračunava spektar. Pri tome su korištene java biblioteke: Matrix Toolkits for Java (MTJ v0.9.14.) [6], koji je korišten za manipulaciju matricama, te Simple Mathematical Expression Parser for Java (exp4j v0.3.11) [7], koji je korišten za računanje vrijednosti funkcije potencijala.

Isprogramirali smo Numerov metod i Numerov metod sa korekcijom greške.

Ovdje ćemo koristeći se ovim alogoritmom odrediti dio spektara za potencijale $q_1(x) = e^x$ i $q_2(x) = 1/x$. U oba slučaja spektar ćemo odrediti za dva kašnjenja $\tau_1 = 64 \cdot \frac{\pi}{1000} \approx 0,2$ i $\tau_2 = 7 \cdot \frac{\pi}{1001} \approx 0,022$. Da bi mogli koristi algoritam odgovarajuće podjele će biti $N_{11} = 125$, $N_{12} = 500$ za prvo kašnjenje i $N_{21} = 143$, $N_{22} = 572$ za kašnjenje τ_2.

Pored dobijenih vrijednosti za svojstvene vrijednosti navedene su asimptotske vrijednosti svojstvenih vrijednosti koja se može naći u [5] koju je u svojoj doktorskoj disertaciji izveo Vladmir Vladičić, a koje za potencijal iz L_2 imaju sljedeći oblik

$$\lambda_n \approx n^2 + \frac{\cos(\tau n)}{\pi} \int_{\tau}^{\pi} q(t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{\tau}^{\pi} q(t)\cos(2t - \tau)dt \;\; (n \to \infty).$$

3.1 Numerički primjer 1

U prvom numeričkom primjeru posmatrali smo potencijal $q(x) = e^x$. U Tabeli 1 smo naveli četrnaest svojstvenih vrijednosti do kojih smo došli primjenom Numerovog metoda, i to za podjele od $N = 125$ i $N = 500$ bez i sa primjenom korekcije greške (KG), za kašnjenje τ_1.

n	$N_{11} = 125$	$N_{11} = 125$ KG	$N_{12} = 500$	$N_{12} = 500$ KG	ASIM. V.
1	5,2534	5,2534	5,2534	5,2534	64,3482
2	10,6326	10,6326	10,6326	10,6326	10,0467
3	16,6400	16,6400	16,6401	16,6401	14,9142
4	23,2442	23,2442	23,2451	23,2451	21,1189
5	30,6904	30,6905	30,6934	30,6934	29,0453
6	39,6542	39,6543	39,6596	39,6596	38,7927
7	50,6440	50,6442	50,6511	50,6511	50,4263
8	63,8006	63,8011	63,8088	63,8088	64,0064
9	79,1473	79,1482	79,1562	79,1562	79,5921
10	96,6979	96,6996	96,7072	96,7073	97,2410
15	218,0376	218,0567	218,0570	218,0571	218,1266
20	395,5360	395,6434	395,6310	395,6314	395,4898
30	905,4019	906,6400	906,6290	906,6337	906,7274
40	1591,6309	1598,6921	1598,6992	1598,7258	1598,7442

Tabela 1: Dio spektra za potencijal $q(x) = e^x$ i kašnjenje $\tau_1 \approx 0,2$

U Tabeli 2 smo naveli četrnaest svojstvenih vrijednosti do kojih smo došli primjenom gore navedenog algoritma, i to za podjele od $N = 143$ i $N = 572$ bez i sa primjenom korekcije greške (KG), za kašnjenje τ_2.

n	$N_{21} = 143$	$N_{21} = 143$ KG	$N_{22} = 572$	$N_{22} = 572$ KG	ASIM. V.
1	4,9306	4,9306	4,9306	4,9306	4,5188
2	10,1022	10,1022	10,1022	10,1022	10,3639
3	16,0913	16,0913	16,0913	16,0913	15,8583
4	23,3370	23,3370	23,3371	23,3371	22,9597
5	32,3203	32,3203	32,3205	32,3205	31,9859
6	43,2565	43,2566	43,2569	43,2569	42,9868
7	56,1944	56,1945	56,1950	56,1950	55,9754
8	71,1389	71,1392	71,1399	71,1399	70,9565
9	88,0879	88,0884	88,0893	88,0893	87,9320
10	107,0389	107,0398	107,0410	107,0410	106,9027
15	231,7766	231,7877	231,7904	231,7905	231,6992
20	406,4165	406,4791	406,4838	406,4840	406,4108
30	904,9310	905,6504	905,6586	905,6613	905,6049
40	1600,4667	1604,5570	1604,5601	1604,5757	1604,5299

Tabela 2: Dio spektra za potencijal $q(x) = e^x$ i kašnjenje $\tau_2 \approx 0,022$

3.2 Numerički primjer 2

U prvom numeričkom primjeru posmatrali smo potencijal $q(x) = \frac{1}{x}$. U Tabeli 3 smo naveli četrnaest svojstvenih vrijednosti do kojih smo došli primjenom gore navedenog algoritma, i to za podjele od $N = 50$ i $N = 500$ bez i sa primjenom korekcije greške (KG), za kašnjenje τ_1.

n	$N_{11} = 125$	$N_{11} = 125$ KG	$N_{12} = 500$	$N_{12} = 500$ KG	ASIM. V.
1	1,6618	1,6618	1,6618	1,6618	1,4206
2	4,7813	4,7813	4,7814	4,7814	4,7187
3	9,7724	9,7724	9,7727	9,7727	9,7071
4	16,6944	16,6945	16,6949	16,6949	16,6267
5	25,5713	25,5713	25,5720	25,5720	25,5059
6	36,4171	36,4172	36,4181	36,4181	36,3578
7	49,2429	49,2431	49,2443	49,2443	49,1919
8	64,0585	64,0589	64,0603	64,0603	64,0168
9	80,8728	80,8737	80,8752	80,8752	80,8405
10	99,6940	99,6957	99,6972	99,6972	99,6709
15	224,1250	224,1441	224,1443	224,1444	224,1445
20	399,3126	399,4201	399,4170	399,4175	399,4300
30	899,6003	900,8385	900,8324	900,8372	900,8409
40	1592,7873	1599,8485	1599,8289	1599,8556	1599,8470

Tabela 3: Dio spektra za potencijal $q(x) = \frac{1}{x}$ i kašnjenje $\tau_1 \approx 0,2$

U Tabeli 4 smo naveli četrnaest svojstvenih vrijednosti do kojih smo došli primjenom gore navedenog algoritma, i to za podjele od $N = 50$ i $N = 500$ bez i sa primjenom korekcije greške (KG), za kašnjenje τ_2. .

Primijetimo da su sve dobijene svojstvene vrijednosti bile realne. Prilikom numeričkog rješavanja svi imaginarni dijelovi svojstvenih vrijednosti su bili jednaki nuli. Dakle, dobijeni dio spektra je bio realan.

Također, možemo primijetiti da sa podjelama $N_1 2$, tj. $N_2 2$ za prvih 20 svojstvenih vrijednosti imamo tačnost do 3 decimalna mjesta, jer se vrijednosti dobijene bez i sa korekcijom greške ne razlikuju na tri decimalna mjesta.

4 Zaključak

U ovom radu dat pregled Sturm-Liouvilleovih jednačina sa kašnjenjem i pregled metoda za određivanje svojstvenih vrijednosti. Također je naveden i algoritam za određivanje svojstvenih vrijednosti Sturm-Liouvilleovih jednačina sa kašnjenjem. U numeričkom dijelu dati su rezultati dobiveni korištenjem napisanog programa za numeričko određivanje svojstvenih vrijednosti.

Ovaj rad predstavlja samo jedan mali dio projekta čiji je cilj izrada programa za numeričko rješavanje Sturm-Liouvilleovog problema sa kašnjenjem i za druge

n	$N_{21} = 143$	$N_{21} = 143$ KG	$N_{22} = 572$	$N_{22} = 572$ KG	ASIM. V.
1	1,7225	1,7225	1,7225	1,7225	1,7896
2	4,9451	4,9451	4,9451	4,9451	5,1717
3	10,0720	10,0720	10,0721	10,0721	10,2724
4	17,1567	17,1567	17,1570	17,1570	17,3288
5	26,2183	26,2183	26,2188	26,2188	26,3663
6	37,2651	37,2651	37,2659	37,2659	37,3929
7	50,3016	50,3018	50,3028	50,3028	50,4125
8	65,3305	65,3308	65,3321	65,3321	65,4269
9	82,3533	82,3539	82,3556	82,3556	82,4375
10	101,3712	101,3722	101,3744	101,3744	101,4448
15	226,4029	226,4140	226,4191	226,4192	226,4484
20	401,3384	401,4010	401,4099	401,4102	401,4137
30	900,5525	901,2718	901,2894	901,2922	901,2669
40	1596,9565	1601,0468	1601,0660	1601,0816	1601,0428

Tabela 4: Dio spektra za potencijal $q(x) = \frac{1}{x}$ i kašnjenje $\tau_2 \approx 0,022$

granične uslove. Također za preciznije određivanje spretra porebno je izvršiti i implementaciju drugih numeričkih metoda. Glavni problem ostaje rješavanje obrnutog problema, tj. na osnovu datog spektra odrediti kašnjenje, a zatim i nepoznati potencijal. Teoretsko rješenje ovog problema moze se naći u [2] i dosta inovativnije i bolje, koristeći metodu Fourierovih redova, u [5].

Literatura

[1] Alan L. Andrew, Asymptotic correction of Numerov's eigenvalue estimates with natural boundary conditions, Journal of Computational and Applied Mathematics 125 (2000) 359-366

[2] Elmir Čatrnja, Obrnuti problemi sa promjenjivim kašnjenjem na segmentu, magistarski rad, Filozoski fakultet Pale, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, 2011.

[3] G. Freiling and V. Yurko, Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, NOVA Science Publishers, New York, 2001

[4] V. Ledoux, The numerical solution of Sturm-Liouville and Schrödinger eigenvalue problems, Lectures series International Francqui chair for Exact Sciences 2006-2007 (Henk Van der Vorst)

[5] Vladimir Vladičić, Primjena Fourijevih redova u inverznom problemu jednačina sa kašnjenjem, doktorska disertacija, Filozoski fakultet Pale, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, 2013.

[6] http://code.google.com/p/matrix-toolkits-java/

[7] http://www.objecthunter.net/exp4j/index.html

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6 i 7 juni 2014. godine

Pitagorine trojke

Bernadin Ibrahimpašić
Univerzitet u Bihaću, Pedagoški fakultet
bernadin@bih.net.ba

Stručni rad

Apstrakt

Uređenu trojku prirodnih brojeva (a, b, c) zovemo Pitagorina trojka ako su a i b katete, a c hipotenuza nekog pravouglog trougla. U ovom članku ćemo navesti neke važne osobine Pitagorinih trouglova i opisati algoritam za generisanje Pitagorinih trojki.

Pitagora, koji je rođen na grčkom otoku Samosu (oko 582. godine pr.n.e. – oko 496. godine pr.n.e.), se smatra prvim "pravim" matematičarem. Uz njegovo ime se najčešće veže Pitagorin teorem koji kaže da je površina kvadrata konstruisanog nad hipotenuzom pravouglog trougla, jednaka zbiru površina kvadrata konstrusanih nad njegovim katetama. Pitagorin teorem se može iskazati i u obliku da je kvadrat dužine hipotenuze pravouglog trougla jednak zbiru kvadrata dužina kateta tog trougla. Pitagora nije prvi otkrio Pitagorin teorem, koji je bio poznat još Babiloncima oko 1000 godina prije Pitagore, nego ga je prvi dokazao i zbog toga se i naziva tako. Pitagora je došao do saznanja da za neparan prirodan broj $k > 1$, formule $a = k$, $b = (k^2 - 1)/2$ i $c = (k^2 + 1)/2$ daju dužine stranica pravouglog trougla. Do sličnog zaključka je došao i Platon koji je dao formule u obliku $a = 2k$, $b = k^2 - 1$ i $c = k^2 + 1$. Međutim, pokazalo se da te formule ne daju sve moguće vrijednosti za dužine stranica pravouglog trougla, jer se pomoću njih npr. ne dobija pravougli trougao čije su dužine stranica jednake 20, 21 i 29.

1 Uvod

Definicija 1.1. Uređenu trojku prirodnih brojeva (a, b, c) zovemo *Pitagorina trojka* ako su a i b katete, a c hipotenuza nekog pravouglog trougla, tj. ako vrijedi

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ako su a, b, c relativno prosti brojevi, onda kažemo da je (a, b, c) *primitivna Pitagorina trojka*.

Napomena 1.1. Trougao čije su dužine stranica Pitagorina trojka se naziva *Pitagorin trougao*, a trougao čije su dužine stranica primitivna Pitagorina trojka se naziva *primitivni Pitagorin trougao*.

Napomenimo da su svake dvije dužine stranica primitivnog Pitagorinog trougla relativno prosti brojevi, tj. vrijedi $\mathrm{nzd}(a,b)=\mathrm{nzd}(a,c)=\mathrm{nzd}(b,c)=1$. Kada bi bilo npr. $\mathrm{nzd}(a,b)=d>1$, tada bismo imali

$$a=da_1,\ b=db_1 \quad \Rightarrow \quad c^2=(da_1)^2+(db_1)^2=d^2(a_1^2+b_1^2),$$

što bi značilo da $d^2|c^2$, tj. $d|c$, iz čega bi slijedilo $\mathrm{nzd}(a,b,c)=d>1$, što je kontradikcija. Analogno se pokaže i za ostala dva para.

Očito je da su u svakom primitivnom Pitagorinom trouglu dužine kateta različite parnosti, iz čega slijedi i da je dužina hipotenuze neparan broj.

Kada bi a i b bili parni brojevi, onda bi i njihovi kvadrati bili parni brojevi, pa i zbir njihovih kvadrata a^2+b^2 bi također bio paran broj, tj. c^2 bi bio paran broj. Kako je jedino kvadrat parnog broja paran broj, to bi i c morao biti paran broj, ali u tom slučaju uređena trojka (a,b,c) ne bi bila primitivna, jer bi tada bilo $\mathrm{nzd}(a,b,c)\geq 2$.

Kada bi a i b bili neparni brojevi, npr. $a=2m-1$ i $b=2n-1$, gdje su m i n prirodni brojevi, imali bismo

$$a^2+b^2=4(m^2+n^2-m-n)+2\equiv 2 \pmod 4.$$

Međutim, zbog neparnosti od a i b, morao bi biti $c=2k, k\in\mathbb{N}$ paran, a kako bi u tom slučaju bilo

$$c^2=4k^2\equiv 0 \pmod 4,$$

to bismo imali kontradikciju.

Ako sve članove Pitagorine trojke (a,b,c) pomnožimo prirodnim brojem k, dobijamo trojku (ka,kb,kc) za koju vrijedi

$$(ka)^2+(kb)^2=k^2(a^2+b^2)=k^2c^2=(kc)^2.$$

Zaključujemo da ako je (a,b,c) Pitagorina trojka, onda je i (ka,kb,kc) također Pitagorina trojka, za svaki prirodan broj k. Takve Pitagorine trojke se nazivaju *slične Pitagorine trojke*.

2 Generisanje Pitagorinih trojki

Važan korak u proučavanju Pitagorinih trojki je određivanje formula koje generišu rješenja jednačine $a^2+b^2=c^2$.

Teorema 2.1. Sve primitivne Pitagorine trojke (a,b,c), u kojima je b paran, su dane formulama

$$a=m^2-n^2, \qquad b=2mn, \qquad c=m^2+n^2,$$

gdje je $m>n$, a m i n su relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti. Svaka primitivna Pitagorina trojka, dobijena na ovaj način, se pojavljuje samo jednom.

Dokaz 2.1. Jednačinu $a^2 + b^2 = c^2$ možemo napisati u obliku

$$b^2 = (c + a)(c - a).$$

Neka je b paran, tj. oblika $b = 2z$. Tada su a i c neparni, pa su brojevi $c + a$ i $c - a$, kao zbir i razlika dva neparna broja, parni brojevi. Zato postoje prirodni brojevi x i y takvi da je

$$c + a = 2x, \qquad c - a = 2y.$$

Pokažimo da su brojevi x i y relativno prosti. U tu svrhu pretpostavimo da nisu, tj. da je $\mathrm{nzd}(x, y) = d > 1$. Tada je d zajednički djelilac od $c + a = 2x$ i $c - a = 2y$, pa imamo da

$$d^2 | (c + a)(c - a) = c^2 - a^2 = b^2,$$

iz čega slijedi da $d|b$. Kako je $a = x - y$ i $c = x + y$ to zaključujemo da $d|a$ i $d|c$, što je u suprotnosti s činjenicom da su a, b i c relativno prosti. Zato zaključujemo da su x i y relativno prosti.

Sada je

$$4z^2 = b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) = 2x \cdot 2y = 4xy \quad \Rightarrow \quad z^2 = xy.$$

Dobili smo da je proizvod dva relativno prosta prirodna broja x i y kvadrat prirodnog broja z, pa slijedi da postoje relativno prosti prirodni brojevi m i n takvi da je $x = m^2$ i $y = n^2$.

Sada je

$$a = m^2 - n^2, \qquad c = m^2 + n^2, \qquad b = 2mn.$$

Kako je $a = m^2 - n^2$ neparan, to brojevi m i n moraju biti različite parnosti.

Provjerimo sada da dobijene vrijednosti za a, b i c zadovoljavaju jednačinu $a^2 + b^2 = c^2$.

$$a^2 + b^2 = \left(m^2 - n^2\right)^2 + (2mn)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = \left(m^2 + n^2\right)^2 = c^2.$$

Još nam ostaje za provjeriti da su a, b i c relativno prosti. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\mathrm{nzd}(a, c) = d > 1$. Tada je d neparan (jer su a i c neparni) i vrijedi

$$d | (c + a) = \left(m^2 + n^2\right) + \left(m^2 - n^2\right) = 2m^2$$

i

$$d | (c - a) = \left(m^2 + n^2\right) - \left(m^2 - n^2\right) = 2n^2.$$

Međutim, ovo je u kontradikciji s pretpostavkom da su m i n, pa samim tim i m^2 i n^2, relativno prosti.

Na kraju trebamo još pokazati da se svaka primitivna Pitagorina trojka, dobijena na ovaj način, pojavljuje samo jednom. Kako je

$$2m^2 = c + a \qquad \text{i} \qquad 2n^2 = c - a,$$

to vidimo da su m i n potpuno određeni s a i c. Kako je razlomak

$$\frac{m}{n} = \frac{2m^2}{2mn} = \frac{c+a}{b}$$

potpuno skraćen, jer su m i n relativno prosti, to zaključujemo da svaki izbor m i n daje novu primitivnu Pitagorinu trojku.

$\square$

Ukoliko, za razliku od prethodnog dokaza, polaznu jednačinu $a^2 + b^2 = c^2$ transformiramo u jednačinu

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b),$$

gdje je b paran broj, onda na sličan način možemo dokazati i sljedeću tvrdnju.

Teorema 2.2. Sve primitivne Pitagorine trojke (a, b, c), u kojima je b paran, su dane formulama

$$a = kl, \qquad b = \frac{k^2 - l^2}{2}, \qquad c = \frac{k^2 + l^2}{2},$$

gdje je $k > l$, a k i l su neparni relativno prosti prirodni brojevi. Svaka primitivna Pitagorina trojka, dobijena na ovaj način, se pojavljuje samo jednom.

Uzimajući u obzir sve do sada rečeno, dobijamo formule pomoću kojih generišemo sve Pitagorine trojke.

Teorema 2.3. Sve Pitagorine trojke (a, b, c) su dane identitetom

$$\left[d(m^2 - n^2)\right]^2 + (2dmn)^2 = \left[d(m^2 + n^2)\right]^2,$$

gdje su $d, m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, $\mathrm{nzd}(m, n) = 1$, te m i n različite parnosti.

3 Osobine Pitagorinih trojki

Navest ćemo sada neke osobine Pitagorinih i primitivnih Pitagorinih trouglova, čiji se dokazi mogu pronaći u [4].

Kako su dužine stranica Pitagorinog trougla prirodni brojevi, to su obim i površina, te poluprečnik upisane kružnice također prirodni brojevi.

Za svaki prirodan broj $n > 2$ postoji Pitagorin trougao kome jedna stranica ima dužinu n.

Postoji tačno 50 Pitagorinih trouglova s dužinama stranica manjim od 100, kojima je dužina druge stranice paran broj.

U svakom Pitagorinom trouglu je bar jedna stranica djeljiva s 3, bar jedna djeljiva s 4 i bar jedna djeljiva s 5. Direktna posljedica toga je da ne postoji Pitagorin trougao čije su dužine svih stranica prosti brojevi, jer je bar jedna djeljiva s 4.

Ne postoji Pitagorin trougao čije su bar dvije dužine stranica kvadrati prirodnih brojeva.

Neka je n prirodan broj. Tada postoji Pitagorin trougao čija hipotenuza ima dužinu n ako i samo ako n ima bar jedan prosti faktor oblika $4k + 1$.

Za svaki prirodan broj n postoji:

- n Pitagorinih trouglova čije su dužine hipotenuza uzastopni prirodni brojevi,
- bar n Pitagorinih trouglova s jednakom dužinom jedne katete,
- bar n primitivnih Pitagorinih trouglova s jednakom dužinom jedne katete,
- bar n Pitagorinih trouglova s jednakom dužinom hipotenuze,
- bar n Pitagorinih trouglova s jednakim obimom,
- n Pitagorinih trouglova s različitom dužinom hipotenuze a jednakom površinom.

Postoji beskonačno mnogo primitivnih Pitagorinih trouglova kod kojih je dužina:

- hipotenuze kvadrat prirodnog broja,
- jedne katete kvadrat prirodnog broja,
- jedne katete kvadrat parnog prirodnog broja.

Ne postoji Pitagorin trougao kod kojeg su dužine bar dvije stranice kvadrati prirodnih brojeva, niti postoji Pitagorin trougao čija je površina potpun kvadrat.

Ne postoji Pitagorin trougao čije su dužine jedne katete i hipotenuze jednake dužinama kateta drugog Pitagorinog trougla.

4 Primjeri

Zadatak 4.1. Odrediti sve Pitagorine trojke čiji su članovi tri uzastopna prirodna broja.

Rješenje: Neka je $(n-1, n, n+1)$, gdje je $n > 1$ prirodan broj, tražena Pitagorina trojka. Tada iz uslova

$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$$

dobijamo da je $n^2 = 4n$, iz čega slijedi da je $n = 4$. Zaključujemo da je $(3, 4, 5)$ jedina Pitagorina trojka s traženim svojstvom.

$\diamondsuit$

Zadatak 4.2. Odrediti sve Pitagorine trojke čiji su članovi tri uzastopna člana aritmetičkog niza.

Rješenje: Neka je $(n-k, n, n+k)$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k$, tražena Pitagorina trojka. Tada, kao i u prethodnom zadatku, iz uslova

$$(n-k)^2 + n^2 = (n+k)^2$$

dobijamo da je $n^2 = 4kn$, iz čega slijedi da je $n = 4k$. Zaključujemo da su tražene Pitagorine trojke oblika $(3k, 4k, 5k)$, gdje je k prirodan broj.

$\diamondsuit$

Prije nego što uradimo nekoliko zadataka u kojima ćemo pokazati kako se generišu Pitagorini trouglovi, kojima je zadana dužina jedne stranice, navest ćemo nekoliko tvrdnji koje nam olakšavaju kompletan postupak.

Propozicija 4.1. Ako je $\text{nzd}(x, y) = 1$, onda su svi neparni prosti faktori od $x^2 + y^2$ oblika $4k + 1$.

Propozicija 4.2. Neka su x i y cijeli brojevi. Tada vrijedi

$$x^2 + y^2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod 4, & \text{ako i samo ako su } x \text{ i } y \text{ parni,} \\ 1 \pmod 4, & \text{ako i samo ako su } x \text{ i } y \text{ različite parnosti,} \\ 2 \pmod 4, & \text{ako i samo ako su } x \text{ i } y \text{ neparni.} \end{cases}$$

Propozicija 4.3. Neka su x i y cijeli brojevi. Tada vrijedi

$$x^2 - y^2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod 4, & \text{ako i samo ako su } x \text{ i } y \text{ iste parnosti,} \\ 1 \pmod 4, & \text{ako i samo ako je } x \text{ neparan i } y \text{ paran,} \\ 3 \pmod 4, & \text{ako i samo ako je } x \text{ paran i } y \text{ neparan.} \end{cases}$$

Zadatak 4.3. Odrediti sve Pitagorine trouglove kojima je dužina jedne stranice jednaka 45.

Rješenje: Sve Pitagorine trojke, prema Teoremu 2.3, dane su identitetom

$$\left[d(m^2 - n^2)\right]^2 + (2dmn)^2 = \left[d(m^2 + n^2)\right]^2,$$

gdje su d, m i n prirodni brojevi takvi da su m i n relativno prosti, različite parnosti i vrijedi da je $m > n$. Kako je dužina jedne stranice 45 neparan broj, to ne može biti druga stranica čija je dužina $2dmn$. Iz činjenice da $d|45$ slijedi da je $d \in \{1, 3, 5, 9, 15\}$, dok se slučaj $d = 45$ može zanemariti. Kada bi bilo $d = 45$, imali bismo da je $m^2 - n^2 = 1$ ili $m^2 + n^2 = 1$, što nema rješenja u prirodnim brojevima. Ispitajmo sve mogućnosti za d.

$d = 1$

Imamo da je $45 : 1 = 45$, a kako je $45 \equiv 1 \pmod 4$, to jednačina $m^2 + n^2 = 45$ možda ima rješenja koja zadovoljavaju uslove Teorema 2.3. Međutim, kako $3|45$, to prema Propoziciji 4.1 jednačina $m^2 + n^2 = 45$ ne može imati rješenja. Napomenimo kako smo to mogli zaključiti i direktnom provjerom svih mogućnosti za m i n. Kako mora biti $\sqrt{45} > m > n > 0$, $\text{nzd}(m, n) = 1$, te kako m i n moraju biti različite parnosti, to su mogući parovi (m, n) sljedeći: $(6,5)$, $(6,1)$, $(5,4)$, $(5,2)$, $(4,3)$, $(4,1)$, $(3,2)$ i $(2,1)$. Uvrštavanjem u jednačinu vidimo da jednačina $m^2 + n^2 = 45$ nema rješenja među navedenim parovima.

Pogledajmo sada jednačinu $m^2 - n^2 = 45$. Kako je

$$45 = 45 \cdot 1 = 15 \cdot 3 = 9 \cdot 5,$$

to imamo za riješiti sljedeća tri sistema.

$$\begin{array}{rcl} m+n &=& 45 \\ m-n &=& 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} m+n &=& 15 \\ m-n &=& 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} m+n &=& 9 \\ m-n &=& 5 \end{array}$$

Rješenja $(23, 22)$ prvog sistema i $(7, 2)$ trećeg sistema zadovoljavaju potrebne uslove, dok rješenje drugog sistema $(9, 6)$ ne zadovoljava potrebne uslove, jer je $\text{nzd}(9, 6) = 3 \neq 1$. Ova dva rješenja nam generišu dvije Pitagorine trojke.

$(m, n) = (23, 22)$

$$\begin{array}{rcl} d(m^2 - n^2) &=& 1 \cdot (23^2 - 22^2) = 45 \\ 2dmn &=& 2 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 22 = 1012 \\ d(m^2 + n^2) &=& 1 \cdot (23^2 + 22^2) = 1013 \quad \Rightarrow \quad (45, 1012, 1013) \end{array}$$

$(m, n) = (7, 2)$

$$\begin{array}{rcl} d(m^2 - n^2) &=& 1 \cdot (7^2 - 2^2) = 45 \\ 2dmn &=& 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2 = 28 \\ d(m^2 + n^2) &=& 1 \cdot (7^2 + 2^2) = 53 \quad \Rightarrow \quad (45, 28, 53) \end{array}$$

$d = 3$

Sada je $45 : 3 = 15$, a kako je $15 \equiv 3 \pmod 4$, to prema Propoziciji 4.2 jednačina $m^2 + n^2 = 15$ nema rješenja.

Pogledajmo jednačinu $m^2 - n^2 = 15$. Kako je

$$15 = 15 \cdot 1 = 5 \cdot 3,$$

to imamo za riješiti dva sistema.

$$\begin{array}{rcl} m+n &=& 15 \\ m-n &=& 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} m+n &=& 5 \\ m-n &=& 3 \end{array}$$

Rješenje prvog sistema je $(8, 7)$ a drugog $(4, 1)$ i oba zadovoljavaju potrebne uslove, te generišu dvije nove Pitagorine trojke.

$(m, n) = (8, 7)$

$$\begin{array}{rcl} d(m^2 - n^2) &=& 3 \cdot (8^2 - 7^2) = 45 \\ 2dmn &=& 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 = 336 \end{array}$$

$$d(m^2+n^2) = 3\cdot(8^2+7^2) = 339 \quad \Rightarrow \quad (45, 336, 339)$$

$(m,n) = (4,1)$

$$\begin{aligned} d(m^2-n^2) &= 3\cdot(4^2-1^2) = 45 \\ 2dmn &= 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1 = 24 \\ d(m^2+n^2) &= 3\cdot(4^2+1^2) = 51 \quad \Rightarrow \quad (45, 24, 51) \end{aligned}$$

$d = 5$

U ovom i u svim narednim slučajevima ponavljamo postupak kao u prethodna dva slučaja. Kako je $45:5 = 9 \equiv 1 \pmod 4$, to jednačina $m^2+n^2 = 9$ možda ima rješenja, ali kako $3|9$, to ona ne može imati rješenja.

Pogledamo li jednačinu $m^2-n^2 = 9 = 9\cdot 1$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned} m+n &= 9 \\ m-n &= 1 \end{aligned}$$

čije je rješenje $(5,4)$. Slučaj $9 = 3\cdot 3$ ne uzimamo u obzir jer je $m+n \neq m-n$.

$(m,n) = (5,4)$

$$\begin{aligned} d(m^2-n^2) &= 5\cdot(5^2-4^2) = 45 \\ 2dmn &= 2\cdot 5\cdot 5\cdot 4 = 200 \\ d(m^2+n^2) &= 5\cdot(5^2+4^2) = 205 \quad \Rightarrow \quad (45, 200, 205) \end{aligned}$$

$d = 9$

$45:9 = 5 \equiv 1 \pmod 4 \quad \Rightarrow \quad$ Jednačina $m^2+n^2 = 5$ možda ima rješenja. Mogući par (m,n) je $(2,1)$ i on predstavlja rješenje jednačine $m^2+n^2 = 5$.

$(m,n) = (2,1)$

$$\begin{aligned} d(m^2-n^2) &= 9\cdot(2^2-1^2) = 27 \\ 2dmn &= 2\cdot 9\cdot 2\cdot 1 = 36 \\ d(m^2+n^2) &= 9\cdot(2^2+1^2) = 45 \quad \Rightarrow \quad (27, 36, 45) \end{aligned}$$

Pogledamo li jednačinu $m^2-n^2 = 5 = 5\cdot 1$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned} m+n &= 5 \\ m-n &= 1 \end{aligned}$$

čije je rješenje $(3,2)$.

$(m,n) = (3,2)$

$$\begin{aligned} d(m^2-n^2) &= 9\cdot(3^2-2^2) = 45 \\ 2dmn &= 2\cdot 9\cdot 3\cdot 2 = 108 \\ d(m^2+n^2) &= 9\cdot(3^2+2^2) = 117 \quad \Rightarrow \quad (45, 108, 117) \end{aligned}$$

$d = 15$

$45:15 = 3 \equiv 3 \pmod 4 \quad \Rightarrow \quad$ Jednačina $m^2+n^2 = 3$ nema rješenja.

Pogledamo li jednačinu $m^2-n^2 = 3 = 3\cdot 1$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned} m+n &= 3 \\ m-n &= 1 \end{aligned}$$

čije je rješenje $(2,1)$.

$(m,n)=(2,1)$

$$\begin{aligned} d(m^2-n^2) &= 15\cdot(2^2-1^2)=45 \\ 2dmn &= 2\cdot 15\cdot 2\cdot 1 = 60 \\ d(m^2+n^2) &= 15\cdot(2^2+1^2)=75 \quad \Rightarrow \quad (45,60,75) \end{aligned}$$

Na kraju zaključujemo da postoji 8 Pitagorinih trouglova kod kojih je dužina jedne stranice jednaka 45.

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (45,1012,1013),(45,28,53),(45,336,339),(45,24,51), \\ &\quad\ (45,200,205),(27,36,45),(45,108,117),(45,60,75) \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Zadatak 4.4. Odrediti sve Pitagorine trouglove kojima je dužina jedne stranice jednaka 50.

Rješenje: Kako $d|50$ to slijedi da je $d\in\{1,2,5,10,25\}$, dok se slučaj $d=50$ zanemaruje. Kako je 50 paran broj, to može predstavljati dužinu svake stranice Pitagorinog trougla.

$d=1$

$50:1=50\equiv 2 \pmod 4 \quad\Rightarrow\quad$ Jednačina $m^2+n^2=50$ nema rješenja prema Propoziciji 4.2, jer su m i n različite parnosti pa suma njihovih kvadrata mora biti neparan broj.

Pogledamo li jednačinu $2mn=50$, tj. $mn=25$, a kako je $25=25\cdot 1=5\cdot 5$, vidimo da ni ona nema rješenja koja zadovoljavaju potrebne uslove.

Pogledamo li jednačinu $m^2-n^2=50$ vidimo da, prema Propoziciji 4.3, ni ona ne može imati rješenja u prirodnim brojevima, jer su brojevi m i n različite parnosti pa razlika njihovih kvadrata ne može biti paran broj.

$d=2$

$50:2=25\equiv 1 \pmod 4 \quad\Rightarrow\quad$ Jednačina $m^2+n^2=25$ možda ima rješenja. Mogući parovi (m,n) su: $(4,3)$, $(4,1)$, $(3,2)$ i $(2,1)$. Direktnom provjerom vidimo da je $(4,3)$ rješenje jednačine $m^2+n^2=25$.

$(m,n)=(4,3)$

$$\begin{aligned} d(m^2-n^2) &= 2\cdot(4^2-3^2)=14 \\ 2dmn &= 2\cdot 2\cdot 4\cdot 3=48 \\ d(m^2+n^2) &= 2\cdot(4^2+3^2)=50 \quad\Rightarrow\quad (14,48,50) \end{aligned}$$

Pogledamo li jednačinu $2mn=25$ vidimo da ona nema rješenja.

Pogledamo li jednačinu $m^2-n^2=25=25\cdot 1=5\cdot 5$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned} m+n &= 25 \\ m-n &= 1 \end{aligned}$$

čije je rješenje $(13,12)$. Slučaj $5\cdot 5$ ne razmatramo, jer je $m+n\neq m-n$.

$(m,n)=(13,12)$

$$\begin{aligned} d(m^2-n^2) &= 2\cdot(13^2-12^2)=50 \\ 2dmn &= 2\cdot 2\cdot 13\cdot 12=624 \\ d(m^2+n^2) &= 2\cdot(13^2+12^2)=626 \quad \Rightarrow \quad (50,624,626) \end{aligned}$$

$d=5$

$50:5=10\equiv 2 \pmod 4 \quad \Rightarrow \quad$ Jednačina $m^2+n^2=10$ nema rješenja.

Jednačina $2mn=10$, tj. $mn=5$, nema rješenja, jer su m i n različite parnosti, a iz istog razloga ni jednačina $m^2-n^2=10$ nema rješenja.

$d=10$

$50:10=5\equiv 1 \pmod 4 \quad \Rightarrow \quad$ Jednačina $m^2+n^2=5$ možda ima rješenje. Jedini mogući par je $(2,1)$ i on jeste njeno rješenje.

$(m,n)=(2,1)$

$$\begin{aligned} d(m^2-n^2) &= 10\cdot(2^2-1^2)=30 \\ 2dmn &= 2\cdot 10\cdot 2\cdot 1=40 \\ d(m^2+n^2) &= 10\cdot(2^2+1^2)=50 \quad \Rightarrow \quad (30,40,50) \end{aligned}$$

Jednačina $2mn=5$ nema rješenja, a iz jednačine $m^2-n^2=5=5\cdot 1$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned} m+n &= 5 \\ m-n &= 1 \end{aligned}$$

čije je rješenje $(3,2)$.

$(m,n)=(3,2)$

$$\begin{aligned} d(m^2-n^2) &= 10\cdot(3^2-2^2)=50 \\ 2dmn &= 2\cdot 10\cdot 3\cdot 2=120 \\ d(m^2+n^2) &= 10\cdot(3^2+2^2)=130 \quad \Rightarrow \quad (50,120,130) \end{aligned}$$

$d=25$

$50:25=2\equiv 2 \pmod 4 \quad \Rightarrow \quad$ Jednačine $m^2+n^2=2$, $2mn=2$ i $m^2-n^2=2$ nemaju rješenja.

Na kraju zaključujemo da postoje 4 Pitagorina trougla kod kojih je dužina jedne stranice jednaka 50.

$$(x,y,z) \;=\; (14,48,50),(50,624,626),(30,40,50),(50,120,130)$$

$\diamondsuit$

Napomena 4.1. Kako prema Propoziciji 4.2 i Propoziciji 4.3, zbog različite parnosti od m i n, suma m^2+n^2 i razlika m^2-n^2 moraju biti neparni brojevi, to smo mogli izbjeći provjeru rješivosti jednačina $m^2+n^2=50/d$ i $m^2-n^2=50/d$ za $d=1,5,25$.

Zadatak 4.5. Odrediti sve primitivne Pitagorine trouglove kojima je dužina jedne stranice jednaka 85.

Rješenje: Sve primitivne Pitagorine trojke, prema Teoremu 2.1, dane su identitetom

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2,$$

gdje su d,m i n prirodni brojevi takvi da su m i n relativno prosti, različite parnosti i vrijedi da je $m>n$. Kako je dužina jedne stranice 85 neparan broj, to ne može biti druga stranica čija je dužina $2mn$. Iz činjenice da je $85\equiv 1 \pmod 4$, slijedi da jednačina $m^2+n^2=85$ možda ima rješenja koja zadovoljavaju uslove Teorema 2.1. Provjerimo li sve mogućnosti za m i n dobijamo da su njena rješenja $(9,2)$ i $(7,6)$.

$(m,n)=(9,2)$

$$\begin{aligned} m^2-n^2 &= 9^2-2^2=77 \\ 2mn &= 2\cdot 9\cdot 2=36 \\ m^2+n^2 &= 9^2+2^2=85 \quad \Rightarrow \quad (77,36,85) \end{aligned}$$

$(m,n)=(7,6)$

$$\begin{aligned} m^2-n^2 &= 7^2-6^2=13 \\ 2mn &= 2\cdot 7\cdot 6=84 \\ m^2+n^2 &= 7^2+6^2=85 \quad \Rightarrow \quad (13,84,85) \end{aligned}$$

Pogledajmo sada jednačinu $m^2-n^2=85$. Kako je

$$85=85\cdot 1=17\cdot 5,$$

to trebamo riješiti dva sistema.

$$\begin{aligned} m+n &= 85 \\ m-n &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} m+n &= 17 \\ m-n &= 5 \end{aligned}$$

Rješenja $(43,42)$ prvog sistema i $(11,6)$ drugog sistema zadovoljavaju potrebne uslove.

$(m,n)=(43,42)$

$$\begin{aligned} m^2-n^2 &= 43^2-42^2=85 \\ 2dmn &= 2\cdot 43\cdot 42=3612 \\ m^2+n^2 &= 43^2+42^2=3613 \quad \Rightarrow \quad (85,3612,3613) \end{aligned}$$

$(m,n) = (11,6)$

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= 11^2 - 6^2 = 85 \\ 2dmn &= 2 \cdot 11 \cdot 6 = 132 \\ m^2 + n^2 &= 11^2 + 6^2 = 157 \quad \Rightarrow \quad (85, 132, 157) \end{aligned}$$

Na kraju zaključujemo da postoje 4 primitivna Pitagorina trougla kod kojih je dužina jedne stranice jednaka 85.

$$(x,y,z) \;=\; (36,77,85), (13,84,85), (85,3612,3613), (85,132,157)$$

$\diamondsuit$

Zadatak 4.6. Odrediti sve primitivne Pitagorine trouglove kojima je dužina jedne stranice jednaka 100.

Rješenje: Kako je 100 paran broj, to onda predstavlja dužinu druge stranice, pa imamo za riješiti jednačinu $2mn = 100$, tj. $mn = 50$. Kako je

$$50 = 50 \cdot 1 = 25 \cdot 2 = 10 \cdot 5,$$

to su $(50,1)$ i $(25,2)$ njena rješenja koja zadovoljavaju potrebne uslove, dok $(10,5)$ nije zadovoljavajuće rješenje, jer je $\mathrm{nzd}(10,5) = 5 \neq 1$.

$(m,n) = (50,1)$

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= 50^2 - 1^2 = 2499 \\ 2mn &= 2 \cdot 50 \cdot 1 = 100 \\ m^2 + n^2 &= 50^2 + 1^2 = 2501 \quad \Rightarrow \quad (2499, 100, 2501) \end{aligned}$$

$(m,n) = (25,2)$

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= 25^2 - 2^2 = 621 \\ 2mn &= 2 \cdot 25 \cdot 2 = 100 \\ m^2 + n^2 &= 25^2 + 2^2 = 629 \quad \Rightarrow \quad (621, 100, 629) \end{aligned}$$

Na kraju zaključujemo da postoje 2 primitivna Pitagorina trougla kod kojih je dužina jedne stranice jednaka 100.

$$(x,y,z) \;=\; (2499,100,2501), (621,100,629)$$

$\diamondsuit$

Literatura

[1] H. Dubner, T. Forbes: *Prime Pythagorean triangles*, Journal of Integer Sequences, Vol. 4(2001)

[2] A. Duraković, B. Ibrahimpašić:, *Pellove jednačine i Pitagorine trojke*, MAT–KOL **2**, Vol XX(2014), 59–68.

[3] B. Ibrahimpašić: *Uvod u teoriju brojeva*, Pedagoški fakultet, Bihać, 2014.

[4] W. Sierpinski: *Pythagorean Triangles*, Dover Publications Inc., New York, 2003.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Fuzzy višeznačne zavisnosti i formule u fuzzy modelu relacionih baza podataka

Nedžad Dukić
Univerzitet u Sarajevu, PMF, Odsjek za matematiku
ndukic@pmf.unsa.ba

Ilija Lalović
Univerzitet u Banjoj Luci, PMF, SP matematika i informatika
ilalovich@yahoo.com

Pregledni rad

Apstrakt

Probleme izvodjenja posljedica iz fuzzy višeznačnih zavisnosti u fuzzy relacionoj bazi podataka svodimo na odgovarajuće probleme sa fuzzy formulama koje se rješavaju korištenjem principa rezolucije. Definisaćemo istinitosnu vrijednost atributa za datu šemu fuzzy relacione baze podataka, a zatim ćemo fuzzy zavisnostima pridružiti odgovarajuće fuzzy formule. Dokazujemo da ako vrijedi fuzzy višeznačna zavisnost, onda je njoj pridružena fuzzy formula zadovoljiva i obrnuto. Takodje pokazujemo, ako iz skupa fuzzy zavisnosti slijede druge zavisnosti, onda iz skupa fuzzy formula koje im odgovaraju slijedi i zadovoljivost fuzzy formula koje odgvaraju tim drugim zavisnostima.

1 Uvod

U uvodnoj sekciji kratko, na intuitivnom nivou, opisujemo oblast našeg istraživanja i naše ciljeve, a zatim uvodimo pojmove, terminologiju i oznake fuzzy logike koje ćemo koristiti.

1.0 Kratak prikaz rada

Teoriju fuzzy skupova i fuzzy logiku uveo je L. Zadeh [17]. U fuzzy relacionim bazama podataka [2, 4, 8, 16] ove teorije daju matematički aparat za reprezentovanje i manipulisanje sa neodredjenim i nejasnim informacijama. Termini "neodredjena" i "nejasna" informacija ne znače da su podaci pogrešni, već da njihove precizne vrijednosti nisu poznate. Postoji više formalizama za predstavljanje nepreciznih informacija koji uključuju fuzzy membership vrijednost [3], relaciju sličnosti [2, 14] i moguću distribuciju [13].

Fuzzy višeznačne zavisnosti, kao i fuzzy zavisnosti podataka uopšte, daju formalan mehanizam za izražavanje osobina koje se očekuju od memorisanih podataka. Ako je poznato da fuzzy baza podataka zadovoljava skup fuzzy višeznačnih zavisnosti, onda se ta informacija može iskoristiti za poboljšanje šeme dizajna, za zaštitu podataka sprečavanjem pogrešnih abdejtovanja ili za poboljšanje performansi.

Problem izvodjenja logičkih posljedica iz datog skupa fuzzy višeznačnih zavisnosti u okviru date aksiomatizacije u fuzzy relacionim bazama podataka je odlučiv, ali je problem tačne karakterizacije složenosti tog izvodjenja još uvijek otvoren. Ne postoji algoritam koji bi, u opštem slučaju, polazeći od aksioma, na svakom koraku odabrao odgovarajuće činjenice i došao do rješenja, a takodje ne postoji neka globalna strategija koja bi davala valjane rezultate, nezavisne od polaznog skupa fuzzy višeznačnih zavisnosti u fuzzy relacionom modelu baze podataka.

U ovom radu nam je primarni cilj uspostavljanje veze izmedju teorije fuzzy višeznačne zavisnosti i jednog fragmenta fuzzy logike. Pokazaćemo da ako relacija r zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost, onda je i istinitosna vrijednost pripadne fuzzy formule veća od 0.5 i obrnuto. Na osnovu toga rezultata uspostavljamo ekvivalentnost jednog dijela fuzzy logike i fuzzy višeznačne zavisnosti

Nakon što je uspostavljena ova ekvivalentnost, moguće je primijeniti pravila izvodjenja u fuzzy logici na račun fuzzy višeznačnih zavisnosti, koristeći princip rezolucije. Korištenje logičkog programiranja za adaptaciju algoritama klasičnih baza podataka, koji utvrdjuju da li važi ili ne neka višeznačna zavisnost u bazama podataka, takodje je jedna od mogućih primjena naših rezultata.

U literaturi je poznato više različitih definicija fuzzy višeznačnih zavisnosti, a takodje i više različitih definicija fuzzy implikacije. Odnos naših rezultata prema teorijama koje prihvataju pomenute definicije je predmet naših daljih istraživanja.

1.1 Fuzzy logika

Fuzzy logika [1,6,7,11] je zasnovana na konceptu fuzzy skupova i simboličke logike. Logički operatori konjukcije, disjunkcije i negacije definišu se na sljedeći način:

(a) $x_1 \wedge x_2 = min(x_1, x_2)$

(b) $x_1 \vee x_2 = max(x_1, x_2)$

(c) $\neg x = 1 - x$

gdje su x, x_i, $(i \in \{1, 2\})$, promjenljive sa vrijednostima iz intervala realnih brojeva $[0, 1]$.

Fuzzy formule su funkcije sa $[0, 1]^n$ u interval realnih brojeva $[0, 1]$. Definišemo ih induktivno, pomoću sljedećih pravila:

(a) 0 i 1 su fuzzy formule

(b) Fuzzy promjenljiva x_i, $i \in \mathbb{N}$ je fuzzy formula

(c) Ako je f fuzzy formula, tada je i $\neg f$ fuzzy formula

(d) Ako su f i g fuzzy formule, tada su i $f \wedge g$ i $f \vee g$ fuzzy formule

(e) Nema drugih fuzzy formula.

Istinitosna vrijednost formule u fuzzy logici može biti bilo koji realan broj iz intervala $[0, 1]$. Neka je $T(S)$ istinitosna vrijednost formule S. Tada, prema [9], važi:

(i) $T(S) = T(A)$, ako je $S = A$ i A je atomična formula

(ii) $T(S) = 1 - T(R)$, ako je R fuzzy formula i $S = \neg R$

(iii) $T(S) = min\{T(S_1), T(S_2)\}$, ako su S_1, S_2 fuzzy formule i $S = S_1 \wedge S_2$

(iv) $T(S) = max\{T(S_1), T(S_2)\}$, ako su S_1, S_2 fuzzy formule i $S = S_1 \vee S_2$

(v) $T(S) = inf\{T(B) : x \in D\}$, gdje je $S = (\forall x)B(x)$, a D je domen promjenljive x

(vi) $T(S) = sup\{T(B) : x \in D\}$, gdje je $S = (\exists x)B(x)$, a D je domen promjenljive x

Ako je domen $D = \{a_1, \ldots, a_n\}$ konačan, tada (v) i (vi) postaju

(v') $T(S) = T(B(a_1)) \wedge \ldots \wedge T(B(a_n))$, ako je $S = (\forall x)(B(x))$

(vi') $T(S) = T(B(a_1)) \vee \ldots \vee T(B(a_n))$, ako je $S = (\exists x)(B(x))$

1.2 Zadovoljivost formula fuzzy logike

Definicija 1.1. (vidjeti [9]) Fuzzy formula $f \in \mathcal{F}$, gdje je $\mathcal{F}$ skup fuzzy formula, je zadovoljiva u interpretaciji $\mathcal{I}$ ako je $T(f) \geq 0.5$ u $\mathcal{I}$.
Fuzzy formula $f \in \mathcal{F}$ je protivrječna u interpretaciji $\mathcal{I}$ ako je $T(f) < 0.5$ u $\mathcal{I}$.
Fuzzy formula f je nezadovoljiva ako je protivrječna u svim interpretacijama. $\square$

Standardne normalne forme formula fuzzy logike i logičke posljedice formula definišemo na uobičajeni način.

Definicija 1.2. Fuzzy formula f je u konjunktivnoj (disjunktivnoj) normalnoj formi ako je

$$f = C_1 \wedge \ldots \wedge C_p,\ (p \in \mathbb{N}),\ \text{gdje su } C_i \text{ disjunkti.}$$

$$(f = C_1 \vee \ldots \vee C_p,\ (p \in \mathbb{N}),\ \text{gdje su } C_i \text{ konjunkti. }) \quad \square$$

Definicija 1.3. Fuzzy formula $g \in \mathcal{F}$, gdje je $\mathcal{F}$ skup fuzzy formula, je logička posljedica fuzzy formule $f \in \mathcal{F}$, ako je formula $f \wedge \neg g$ nezadovoljiva, tj. ako je $T(f \wedge \neg g) < 0.5$. $\square$

1.3 Rezolventa u fuzzy logici

U definiciji rezolvente slijedimo [9]. U primjenama ćemo definiciju prilagoditi aktuelnim potrebama.

Definicija 1.4. Neka su $D_1 : L_1 \vee D_1^{'}$ i $D_2 : L_2 \vee D_2^{'}$ dva disjunkta, a L_1 i L_2 dva suprotna literala, to jest, $L_2 = \neg L_1$ i neka $D_1^{'}$ i $D_2^{'}$ ne sadrže nijedan suprotan par literala. Tada se disjunkt $D_1^{'} \vee D_2^{'}$ naziva rezolventa disjunkta D_1 i D_2, sa ključnom riječi L_1. $\square$

2 Fuzzy višeznačne zavisnosti i pravila izvodjenja

Pored funkcionalnih zavisnosti podataka postoji više mogućih vrsta zavisnosti, od kojih se višeznačne zavisnosti najčešće pojavljuju u realnim situacijama.

2.1 Relacija sličnosti i stepen bliskosti n-torki

U radu koristimo fuzzy relacioni model baza podataka, zasnovan na relaciji sličnosti. Ovaj model nije proširenje klasičnog modela realcionih baza podataka, već njegovo uopštenje, jer dozvoljava skup vrijednosti za neki atribut, umjesto atomičnih vrijednosti, a takodje i koncept jednakosti zamjenjuje konceptom bliskosti. Oba aspekta se zasnivaju na relaciji sličnosti.

2.1.1 Osnovne definicije

Definicija 2.1. Relacija sličnosti na domenu D je preslikavanje $s : D \times D \to [0, 1]$, tako da za sve elemente domena $x, y, z \in D$ vrijedi

$$s(x, x) = 1 \text{ (refleksivnost)}$$

$$s(x, y) = s(y, x) \text{ (simetričnost)}$$

$$s(x, z) \geq \max_{y \in D}(min(s(x, y), s(y, z))) \text{ (max-min tranzitivnost)}$$

Relacija sličnosti je važan koncept u fuzzy relacionom modelu, jer proširuje koncept jednakosti u klasičnom modelu i omogućava odabir nepreciznih informacija. U klasičnom modelu, dvije n-torke su identične ako i samo ako su im odgovarajuće vrijednosti atributa na datom domenu identične. Relacija identičnosti je specijalan slučaj relacije sličnosti. U fuzzy modelu sličnost odgovarajućih vrijednosti atributa definiše se kao stepen bliskosti dvije n-torke na atributu [14].

Definicija 2.2. Stepen bliskosti za bilo koje dvije n-torke t_i i t_j koje se pojavljuju u relaciji r, u odnosu na atribut A_k, definisan na domenu D_k, obilježava se $\varphi(A_k[t_i, t_j])$ i dat je sa

$$\varphi(A_k[t_i, t_j]) = \min \left\{ \min_{x \in d_i} \left\{ \max_{y \in d_j} \{s(x, y)\} \right\}, \min_{x \in d_j} \left\{ \max_{y \in d_i} \{s(x, y)\} \right\} \right\},$$

gdje je d_i vrijednost atributa A_k za n-torku t_i, d_j je vrijednost atributa A_k za n-torku t_j, $s(x, y)$ je relacija sličnosti za vrijednosti x, y, a s je preslikavanje koje svakom paru elemenata iz domena D_k pridružuje elemenat iz intervala realnih brojeva $[0, 1]$. $\square$

Dvije n-torke t_1 i t_2, relacione instance r, su bliske u odnosu na atribut A, sa stepenom bliskosti θ, ako je $\varphi(A_k[t_i, t_j]) \geq \theta$.

Definicija 2.2 bliskosti u odnosu na jedan atribut, na uobičajeni način se proširuje tako da dobijemo bliskost u odnosu na skup atributa.

Definicija 2.3. Stepen bliskosti u odnosu na skup atributa X, za bilo koje dvije n-torke t_1, t_2 date u relaciji r, označava se sa $\varphi(X[t_i, t_j])$ i dat je sa

$$\varphi(X[t_i, t_j]) = \min_{A_k \in X} \{\varphi(A_k[t_i, t_j])\} \quad \square$$

2.1.2 Osobine stepena bliskosti

Sada ćemo formulisati neke osobine stepena bliskosti, koje se lako dokazuju, a biće korištene u daljem izlaganju.

Propozicija 2.1. Ako je $X \supseteq Y$, tada je

$$\varphi(Y[t_i, t_j]) \geq \varphi(X[t_i, t_j]),$$

za bilo koje dvije n-torke t_i, t_j u relaciji r. $\square$

Propozicija 2.2. Ako je $X = \{A_1, \ldots, A_n\}$ i $\varphi(A_k[t_i, t_j]) \geq \theta$, $1 \leq k \leq n$, tada je $\varphi(X[t_i, t_j]) \geq \theta$, za svake dvije n-torke t_i, t_j u relaciji r. $\square$

Propozicija 2.3. Ako je $\varphi(X[t_i, t_j]) \geq \theta$ i $\varphi(X[t_j, t_k]) \geq \theta$, tada je $\varphi(X[t_i, t_k]) \geq \theta$, za svako t_i, t_j, $t_k \in r$. $\square$

2.2 Fuzzy višeznačne zavisnosti

Pretpostavimo da je u klasičnoj relacionoj bazi podataka data relaciona šema $R(X, Y, Z)$ sa $m+n+p$ atributa, gdje su podskupovi atributa $X = \{X_1, \ldots, X_m\}$, $Y = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$, $Z = \{Z_1, \ldots, Z_p\}$ medjusobno disjunktni. Intuitivno, "X višeznačno odredjuje Y" ili "postoji višeznačna zavisnost Y od X", što označavamo $X \rightarrow\rightarrow Y$, ako za date vrijednosti atributa u X postoji nula ili više pridruženih vrijednosti za atribute od Y, pri čemu skup ovih Y-vrijednosti ni na koji način nije povezan sa vrijednostima atributa u Z.

Formalno, ako su relacija r u R i $(m+n+p)$-torke t_1, t_2 u r, sa $t_1(X) = t_2(X)$, tada r sadrži $(m+n+p)$-torke t_3, t_4, takve da je

1. $t_3(X) = t_4(X) = t_1(X) = t_2(X)$
2. $t_3(Y) = t_1(Y)$ i $t_3(Z) = t_2(Z)$

3. $t_4(Y) = t_2(Y)$ i $t_4(Z) = t_1(Z)$.

Tada kažemo da $X \to\to Y$ važi u R.

Primjećujemo da uslovi definicije nisu nezavisni, jer se posljednji uslov može dobiti iz prethodnog mijenjajući uloge t_1 i t_2. Tako dobivamo da ako su dvije (m+n+p)-torke t_1, t_2 u relaciji r jednake na skupu atributa X, tada postoji (m+n+p)-torka t_3 relacije r tako da je $t_3(X) = t_1(X)$, $t_3(Y) = t_1(Y)$ i $t_3(Z) = t_2(Z)$.

Ova definicija višeznačne zavisnosti nije primjenljiva u fuzzy modelu, jer ne postoji jasan način odredjivanja kada su dvije neprecizne informacije jednake. Zbog toga nju treba proširiti na neprecizne informacije. Ta proširena verzija višeznačne zavisnosti naziva se fuzzy višeznačna zavisnost. Više detalja može se naći u [10, 12, 14, 16].

Definicija 2.4. Neka je r fuzzy relacija na relacionoj šemi $R(A_1, \ldots, A_n)$, neka je U univerzalni skup atributa $A_1, \ldots, A_n$ i neka su X i Y podskupovi od U. Kažemo da fuzzy relacija r zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$ ako za svaki par n-torki t_1, t_2 iz r postoji n-torka t_3 u r takva da su stepeni bliskosti

$$\varphi(X[t_3, t_1]) \geq min(\theta, \varphi(X[t_1, t_2])),$$
$$\varphi(Y[t_3, t_1]) \geq min(\theta, \varphi(X[t_1, t_2])),$$
$$\varphi(Z[t_3, t_2]) \geq min(\theta, \varphi(X[t_1, t_2])),$$

gdje je θ realan broj iz intervala $[0, 1]$, koji označava lingvističku jačinu zavisnosti. $\square$

Sada, prema radu [14], dajemo ispravan (sound) i kompletan (complete) sistem šema aksiome za fuzzy višeznačne zavisnosti. Takav sistem nam omogućava da pravimo logička izvodjenja za višeznačne zavisnosti nad skupom atributa U.

VZ1. Ako vrijedi $X \overset{\theta_1}{\to\to}_F Y$ i $\theta_1 \geq \theta_2$, tada vrijedi i $X \overset{\theta_2}{\to\to}_F Y$ (pravilo inkluzije)

VZ2. $\{X \overset{\theta}{\to\to}_F Y\} \models \{X \overset{\theta}{\to\to}_F U - XY\}$ (pravilo komplementiranja)

VZ3. Ako vrijedi $X \overset{\theta_1}{\to\to}_F Y$ i $W \supseteq Z$, tada vrijedi $WX \overset{\theta_1}{\to\to}_F YZ$ (šema aksioma pribrajanja)

VZ4. $\{X \overset{\theta_1}{\to\to}_F Y, Y \overset{\theta_2}{\to\to}_F Z\} \models \{X \overset{min\{\theta_1,\theta_2\}}{\to\to}_F Z - Y\}$ (šema aksioma tranzitivnosti)

VZ5. $\{X \overset{\theta}{\to}_F Y\} \models X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$ (pravilo replikacije)

VZ6. Ako vrijedi $X \overset{\theta_1}{\to\to}_F Y$, $Z \subseteq Y$ i za neko W koje je disjunktno sa Y, vrijedi $W \overset{\theta_2}{\to}_F Z$, tada vrijedi i $X \overset{min\{\theta_1,\theta_2\}}{\to}_F Z$ (pravilo spajanja)

3 Ekvivalentnost fuzzy višeznačnih zavisnosti i jednog fragmenta fuzzy logike

U ovoj sekciji predstavićemo rezultate o vezi koju smo uspostavili izmedju fuzzy višeznačne zavisnosti u fuzzy relacionim bazama podataka i jednog fragmenta fuzzy logike. Dobivena veza automatizuje i olakšava rad sa fuzzy višeznačnim zavisnostima, jer omogućuje izvodjenje zaključaka korištenjem fuzzy logike i principa rezolucije,

3.1 Korespondencija izmedju fuzzy višeznačnih zavisnosti i fuzzy formula

Neka je $R(X, Y, Z)$ relacijska šema takva da je $X = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $Y = \{B_1, \ldots, B_n\}$, $Z = \{C_1, \ldots, C_p\}$. Fuzzy višeznačnoj zavisnosti $X \overset{\theta}{\rightarrow\rightarrow}_F Y$ pridružujemo fuzzy formulu

$$F : (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \Rightarrow ((B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) \vee (C_1 \wedge \ldots \wedge C_p)).$$

Za dokaz ekvivalentnosti fuzzy višeznačne zavisnosti i jednog dijela fuzzy logike ćemo

(i) definisati isinitosnu vrijednost atributa fuzzy relacije

(ii) pridružiti fuzzy višeznačnim zavisnostima fuzzy formule

(iii) dokazati ekvivalentnost fuzzy višeznačne zavisnosti i njoj pridružene fuzzy formule

(iv) dokazati ekvivalentnost skupa fuzzy funkcionalnih i fuzzy višeznačnih zavisnosti i skupa njima pridruženih fuzzy formula

Za defnciju istinitosne vrijednosti atributa relacije r koristimo pojam stepena bliskosti ili saglasnosti (conformance) dva atributa definisanu u definiciji 2.2, prema [14]. Cilj nam je da uvedena istinitost bude bliska standardnoj istinitosti [9].

Definicija 3.1. Neka je $R = \{A_1, \ldots, A_m\}$ relacijska šema i neka je $r(R) = \{t_1, t_2\}$ dvoelementna relacija. Relaciji r **pridružena valuacija** je preslikavanje $i_r : R \to [0, 1]$ za koje vrijedi

$$i_r(A_k) \begin{cases} \geq & 0.5 \quad akko \quad \varphi(A_k[t_1, t_2]) \geq \theta,\ \theta \in [0,1] \\ \leq & 0.5 \quad akko \quad \varphi(A_k[t_1, t_2]) \leq \theta,\ \theta \in [0,1] \end{cases}$$

□

Funkcija bliskosti atributa $\varphi(A_k[t_1, t_2])$ je data prema definiciji 2.2.

3.2 Uloga dvoelementnih relacija i θ-aktivnost

Za uspostavljanje veze izmedju izvedivosti za fuzzy funkcionalne zavisnosti i izvedivosti fuzzy formula, presudnu ulogu su imale dvoelementne relacije (vidjeti [5]). Višeznačna fuzzy zavisnost podrazumijeva, u opštem slučaju, postojanje najmanje tri n-torke u relaciji. Da bi se ideja svodjenja semantičke implikacije na dvoelementnu relaciju mogla primijeniti na višeznačnu fuzzy zavisnost, uvodimo pojam θ-aktivnost.

Definicija 3.2. Neka je $X \overset{\theta}{\to\!\!\to}_F Y$ fuzzy višeznačna zavisnost nad relacijskom šemom R. Kažemo da relacija r zadovoljava θ-aktivno zavisnost $X \overset{\theta}{\to\!\!\to}_F Y$ ako r zadovoljava tu zavisnost i ako su sve n-torke iz relacije r saglasne (conformance) sa stepenom ne manjim od θ, na svim atributima iz skupa X, to jest, $\varphi(X[t_i, t_j]) \geq \theta$, gdje je θ realan broj iz $[0, 1]$ i opisuje lingvističku zavisnost, a i, j su indeksi n-torki relacije r. $\square$

Za dalja razmatranja zgodnija je formulacija data sljedećom teoremom.

Teorema 3.1. Neka je $R(X, Y, Z)$ relacijska šema, a $X \overset{\theta}{\to\!\!\to}_F Y$ fuzzy višeznačna zavisnost nad R i neka je $r = \{t_1, t_2\}$ dvoelementa relacija. Tada relacija r θ-aktivno zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\!\!\to}_F Y$ ako i samo ako vrijedi

1. $\varphi(X[t_1, t_2]) \geq \theta$ i $\varphi(Y[t_1, t_2]) \geq \theta$, ili
2. $\varphi(X[t_1, t_2]) \geq \theta$ i $\varphi(Z[t_1, t_2]) \geq \theta$.

Dokaz. Pretpostavomo da relacija $r = \{t_1, t_2\}$ zadovoljava θ-aktivno fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\!\!\to}_F Y$. Tada, prema definiciji 3.2, vrijedi $\varphi(X[t_1, t_2]) \geq \theta$. Odatle i iz definicije fuzzy višeznačne zavisnosti slijedi postojanje n-torke $t_3 \in \{t_1, t_2\}$ za koju vrijedi

$$\varphi(X[t_3, t_1]) \geq min\{\theta, \varphi(X[t_1, t_2])\},$$

$$\varphi(Y[t_3, t_1]) \geq min\{\theta, \varphi(X[t_1, t_2])\},$$
$$\varphi(Z[t_3, t_2]) \geq min\{\theta, \varphi(X[t_1, t_2])\}.$$

Pošto je $t_3 \in \{t_1, t_2\}$, ako t_3 zamijenimo sa t_1, onda imamo

$$\varphi(X[t_3, t_1]) = \varphi(X[t_1, t_1]) = 1 \geq min\{\theta, \varphi(X[t_1, t_2]\},$$

$$\varphi(Y[t_3, t_1]) = \varphi(Y[t_1, t_1]) = 1 \geq min\{\theta, \varphi(X[t_1, t_2]\}.$$

Po pretpostavci teoreme, relacija r zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost θ-aktivno, pa zaključujemo da vrijedi

$$\varphi(Z[t_3, t_2]) = \varphi(Z[t_1, t_2]) \geq min\{\theta, \varphi(X[t_1, t_2]\} \geq \theta.$$

Iz $\varphi(Z[t_1, t_2]) \geq \theta$ slijedi da je ispunjen uslov 2 teoreme 3.1.

Slično, ako t_3 zamijenimo sa t_2 dobivamo da će biti ispunjen uslov 1 teoreme 3.1.

Dokaz obrnute tvrdnje. Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi 1 ili 2 teoreme 3.1. Ako je ispunjen uslov 1, onda neposredno slijedi da vrijedi fuzzy višeznačna zavisnost $X \overset{\theta}{\rightarrow\rightarrow}_F Y$, jer uzimajući $t_3 = t_2$ imamo

$$\varphi(X[t_2, t_1]) \geq \theta \geq min\{\theta, \varphi(X[t_1, t_2])\},$$

$$\varphi(Y[t_2, t_1]) \geq \theta \geq min\{\theta, \varphi(X[t_1, t_2])\},$$

$$\varphi(Z[t_2, t_2]) = 1 \geq min\{\theta, \varphi(X[t_1, t_2])\}.$$

Ako uzmemo $t_3 = t_1$ i pretpostavmo da vrijedi uslov 2, onda imamo

$$\varphi(X[t_1, t_1]) = 1 \geq min\{\theta, \varphi(X[t_1, t_2])\},$$

$$\varphi(Y[t_1, t_1]) = 1 \geq min\{\theta, \varphi(X[t_1, t_2])\}.$$

Po pretpostavci je $\varphi(Z[t_1, t_2]) \geq \theta$, pa slijedi

$$\varphi(Z[t_1, t_2]) \geq min\{\theta, \varphi(X[t_1, t_2])\}.$$

Pošto se sve n-torke iz r podudaraju na svim atributima u r, slijedi da relacija r zadovoljava θ-aktivno f.v.z. $X \overset{\theta}{\rightarrow\rightarrow}_F Y$. $\square$

3.3 Veze fuzzy višeznačnih zavisnosti i formula fuzzy logike

Shodno planu koji smo postavili na početku podsekcije 3.1 sada formulišemo teoremu koja povezuje fuzzy višeznačne zavisnosti i odgovarajuće formule fuzzy logike.

Teorema 3.2. Neka je $R(X, Y, Z)$ relacijska šema, gdje je $X = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $Y = \{B_1, \ldots, B_n\}$ i $Z = \{C_1, \ldots, C_p\}$. Neka je $r = \{t_1, t_2\}$ dvoelementna relacija na R i $X \overset{\theta}{\rightarrow\rightarrow}_F Y$ fuzzy višeznačna zavisnost. Relacija r zadovoljava tu zavisnost ako i samo ako je fuzzy formula

$$F \equiv ((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m) \Rightarrow ((B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_p)))$$

zadovoljiva u interpretaciji i_r.

Dokaz. Teoremu dokazujemo za implikaciju Kleene-Dienes-a:

$$(x \Rightarrow y) = max(1 - x, y),$$

gdje su x, y realni brojevi iz intervala $[0, 1]$.

Pretpostavimo da je formula F tačna u datoj interpretaciji i_r. To znači da je $i_r(F) > 0.5$, odnosno,

$$i_r((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m) \Rightarrow ((B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_p))) > 0.5$$

Tada je $i_r(F) = max((1 - i_r(A_1), 1 - i_r(A_2), \ldots 1 - i_r(A_m)),$
$min((i_r(B_1), i_r(B_2), \ldots, i_r(B_n)), min((i_r(C_1), i_r(C_2), \ldots, i_r(C_p))) > 0.5.$
Mogući su sljedeći slučajevi:

1. Ako je $1-i_r(A_i) > 0.5$, za neko $i \in \{1, \ldots, m\}$, tada slijedi da je $i_r(A_i) \leq 0.5$, pa relacija r trivijalno zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$, jer je $\varphi(X[t_1, t_2]) = \min\limits_{A_i \in X} \varphi(A_i[t_1, t_2]) < \theta$.

2. Ako je $1 - i_r(A_i) \leq 0.5$, za svako $i \in \{1, \ldots, m\}$, tada mora biti

$$i_r(B_j) > 0.5, \text{ za svako } j \in \{1, \ldots, n\},$$

   ili

$$i_r(C_k) > 0.5, \text{ za svako } k \in \{1, \ldots, p\}.$$

   Ako je $i_r(A_i) > 0.5$ i $i_r(B_j) > 0.5$, tada, po definiciji 3.1 $\varphi(X[t_1, t_2]) \geq \theta$, $\varphi(Y[t_1, t_2]) \geq \theta$. Po teoremi 3.1, relacija r zadovoljava traženu fuzzy višeznačnu zavisnost.

   Dokaz je sličan i za slučaj $i_r(A_i) > 0.5$ i $i_r(C_k) > 0.5$.

Dokaz obrnute tvrdnje. Pretpostavimo da relacija r zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$ i dokažimo da je odgovarajuća formula F zadovoljiva u interpretaciji i_r.

Ako je $\varphi(X[t_1, t_2]) \geq \theta$, tada relacija r zadovoljava θ-aktivno fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$.

Ako je ispunjen uslov 1. iz teoreme 3.1, tada važi i

$$\varphi(Y[t_1, t_2]) \geq \theta.$$

Pošto je

$$\varphi(Y[t_1, t_2]) = \min_{B_j \in Y} \{B_j([t_1, t_2])\} \geq \theta,$$

slijedi da je

$$B_j([t_1, t_2]) \geq \theta, \text{ za svako } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Odatle je
$i_r(F) = max(1-i_r(A_1), \ldots, 1-i_r(A_m), min(i_r(B_1), \ldots, i_r(B_n)), min(i_r(C_1), \ldots, i_r(C_p))) \geq 0.5.$

Ako je ispunjen uslov 2. teoreme 3.1, tada je

$$\varphi(Z[t_1, t_2]) = \min_{C_k \in Z} \{C_k([t_1, t_2])\} \geq \theta,$$

pa dobivamo da je

$$i_r(C_1 \wedge \ldots \wedge C_p) = \min(i_r(C_1), \ldots, i_r(C_p)) > 0.5,$$

a odatle i $i_r(F) > 0.5$. $\square$

U dokazivanju teorema o osobinama fuzzy funkcionalnih zavisnosti (vidjeti [5]) korištena je činjenica da svaka restrikcija relacije koja zadovoljava fuzzy funkcionalnu zavisnost, takodje zadovoljava istu funkcionalnu zavisnost. Pošto fuzzy višeznačne zavisnosti nemaju ovu osobinu, datu dvoelementnu relaciju, koja θ-aktivno zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost, pod odredjenim uslovima, treba zamijeniti nekom drugom, odgovarajućom dvoelementnom relacijom. Takvu zamjenu dajemo u sljedećoj teoremi.

Teorema 3.3. Neka su $r = \{t_1, t_2\}$ i $s = \{u_1, u_2\}$ dvoelementne relacije nad relacijskom šemom R. Pretpostavimo da za svaki atribut A iz R, za koji vrijedi $\varphi(A[t_1, t_2]) \geq \theta$, slijedi da vrijedi $\varphi(A[u_1, u_2]) \geq \theta$. Tada, ako relacija r θ-aktivno zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$, onda i relacija s θ-aktivno zadovoljava istu višeznačnu zavisnost.

Dokaz. Pretpostavimo da relacija r θ-aktivno zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$. Tada relacija r zadovoljava uslov 1. ili uslov 2. teoreme 3.1.

Ako je zadovoljen uslov 1. tada prema definiciji 3.2 i teoremi 3.1 slijedi da za svaki atribut A iz R i svaku dvoelementnu relaciju $s = \{u_1, u_2\}$ važi

$$\varphi(X[u_1, u_2]) = \min_{A_i \in R}\{\varphi(A_i[u_1, u_2])\} \geq \theta$$

i

$$\varphi(Y[u_1, u_2]) = \min_{A_j \in R}\{\varphi(A_j[u_1, u_2])\} \geq \theta.$$

Prema teoremi 3.1 slijedi da relacija $s = \{u_1, u_2\}$ θ-aktivno zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$.

Ako je zadovoljen uslov 2. teoreme 3.1, dokaz se izvodi na sličan način. $\square$

Teorema 3.4. Neka je r relacija na relacijskoj šemi R i neka je $\mathcal{F}$ skup fuzzy funkcionalnih i fuzzy višeznačnih zavisnosti nad R. Neka je f jedna fuzzy višeznačna ili fuzzy funkcionalna zavisnost iz $\mathcal{F}$. Ako relacija r zadovoljava sve fuzzy zavisnosti (funkcionalne ili višeznačne) iz $\mathcal{F}$, a ne zadovoljava fuzzy zavisnost f, tada postoji dvoelementna podrelacija s, relacije r, koja zadovoljava sve fuzzy zavisnosti iz $\mathcal{F}$, a ne zadovoljava fuzzy zavisnost f.

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja

(i) f je fuzzy funkcionalna zavisnost iz $\mathcal{F}$

(ii) f je fuzzy višeznačna zavisnost iz $\mathcal{F}$

(i) **f je fuzzy funkcionalna zavisnost iz F**
Neka je f funkcionalna zavisnost oblika $X \overset{\theta}{\to}_F Y$ i neka je atribut $B \in Y$.

Prema pravilu izvodjenja za fuzzy funkcionalne zavisnosti slijedi da ako relacija r zadovoljava fuzzy funkcionalnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to}_F Y$ i $B \subseteq Y$, tada vrijedi i $X \overset{\theta}{\to}_F B$ u relaciji r.

Obrnuto, ako relacija r ne zadovoljava fuzzy funkcionalnu zavisnost $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F Y$, tada je za neke n-torke t_1 i t_2 iz r ispunjeno

$$\varphi(Y[t_1, t_2]) < min(\theta, \varphi(X[t_1, t_2])).$$

Tada je i

$$\varphi(B[t_1, t_2]) < min(\theta, \varphi(X[t_1, t_2])), \text{ za } B \subseteq Y,$$

jer je po definiciji

$$\varphi(Y[t_1, t_2]) = \min_{B_k \in Y} \{\varphi(B_k[t_1, t_2])\}.$$

Ovo znači da relacija r ne zadovoljava fuzzy funkcionalnu zavisnost $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F B$.

Prema tome, u daljnjem izlaganju se možemo ograničiti na fuzzy funkcionalne zavisnosti f oblika $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F B$.

Ali, uz ovo ograničenje, postoji bar jedna dvoelementna relacija $r^*(R)$ koja ne zadovoljava fuzzy funkcionalnu zavisnost $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F B$, što znači da je

$$\varphi(B[t_1, t_2]) < min(\theta, \varphi(X[t_1, t_2])), \ B \subseteq Y.$$

Neka je s ona medju tim relacijama koja zadovoljava maksimalan broj fuzzy višeznačnih zavisnosti iz skupa $\mathcal{F}$, a ne zadovoljava fuzzy funkcionalnu zavisnost $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F B$. Pošto po pretpostavci teoreme relacija r zadovoljava sve fuzzy funkcionalne zavisnosti iz $\mathcal{F}$, tada i relacija s zadovoljava sve fuzzy funkcionalne zavisnosti iz $\mathcal{F}$.

Pokažimo da je relacija s jedina relacija koja θ-aktivno zadovoljava maksimalan broj fuzzy višeznačnih zavisnosti iz skupa $\mathcal{F}$.

Neka je $V \overset{\theta_1}{\rightarrow}_F W$ bilo koja fuzzy višeznačna zavisnost iz skupa $\mathcal{F}$ i neka je $Z = R - (W V)$.

Stavimo da je relacija $s = \{u_1, u_2\}$.

Neka je skup $\{a, a_i\}$ domen atributa V, W, Z u R i neka je sličnost $s(a, a_i) = \theta'$, gdje je θ' realan broj iz $[0, 1]$. Neka vrijedi i uslov da ako je $s(a, a_i) = \theta'$ veće ili jednako od jačine θ_f bilo koje zavisnosti u $\mathcal{F}$, tada je $a_i = a$, a ako je $s(a, a_i) = \theta'$ manje od jačine θ_f bilo koje zavisnosti u $\mathcal{F}$, tada je $a_i = b$ i $\theta' \in [0, \theta)$.

Relacija s ima dva reda, za svaki red niz a-ova i niz b-ova dužine m. Redu odgovara niz $(a_1, \ldots, a_m)$, gdje je $a_i \in \{a, b\}$. Svakom atributu V, W, Z je pridružena vrijednost a_i, $(i = 1, \ldots, m)$.

V	W	Z
a,...,a	a,...,a	a,...,a
a,...,a	b,...,b	b,...,b

Ovdje razlikujemo dva slučaja:

1. $\varphi(V[u_1, u_2]) < \theta_1$. U ovom slučaju relacija $s\{u_1, u_2\}$ zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $V \overset{\theta_1}{\rightarrow\rightarrow}_F W$, pa je to tražena dvoelementna relacija.

2. Neka je $\varphi(V[u_1, u_2]) \geq \theta_1$. Pretpostavimo da s ne zadovoljava θ-aktivno fuzzy višeznačnu zavisnost $V \overset{\theta_1}{\to\to}_F W$. Neka je

$$u_1 = (a(V), \ldots, a(V), a(W), \ldots, a(W), a(Z), \ldots, a(Z)).$$

Zbog pretpostavke da relacija s ne zadovoljava θ-aktivno višeznačnu zavisnost $V \overset{\theta_1}{\to\to}_F W$ i po teoremi 3.1, slijedi

$$\varphi(W[u_1, u_2]) = \theta^{'} < \theta_1 < \theta$$

i

$$\varphi(W[u_1, u_2]) = \theta^{'} < \theta_1 < \theta.$$

Kako relacija s ne zadovoljava fuzzy funkcionalnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to}_F B$, (jer ni relacija r ne zadovoljava ovu zavisnost) slijedi da je

$$\varphi(B[u_1, u_2]) < min(\theta, X[u_1, u_2]).$$

Kako je $\varphi(X[t_1, t_2]) \geq \theta$ (u suprotnom, iz $\varphi(X[t_1, t_2]) = \theta^{'} < \theta$, slijedilo bi da relacija s zadovoljava zavisnost $X \overset{\theta}{\to}_F B$), onda mora biti i $\varphi(B[u_1, u_2]) = \theta^{'} < \theta_1 < \theta$ (u suprotnom bi bilo $\varphi(B[u_1, u_2]) = \theta^{'} \geq \theta$, pa bi vrijedilo da je $B \subseteq X^+(\theta)$, a odatle i da je i $X \overset{\theta}{\to}_F B$ iz $\mathcal{F}^+$. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da $X \overset{\theta}{\to}_F B$ nije u $\mathcal{F}^+$).

Dakle, atribut B mora pripadati ili skupu W ili skupu Z.

Pretpostavimo da je $B \in Z$. Definišemo relaciju $q(R) = \{p_1, p_2\}$ uzimajući da je

$$p_1 = (a(V), \ldots, a(V), a(W), \ldots, a(W), a(Z), \ldots, a(Z))$$

i

$$p_2 = (a(V), \ldots, a(V), a(W), \ldots, a(W), b(Z), \ldots, b(Z)).$$

Dokažimo da je q podrelacija relacije r.

Očigledno je $p_1 = u_1 \in s \subseteq r$. Dakle, n-torka $p1 \in r$.

N-torka p_2 takodje mora pripadati relaciji r, zato što relacija r, po pretpostavci teoreme, zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $V \overset{\theta_1}{\to\to}_F W$. Naime,

$$\varphi(V[p_3, p_1]) \geq min\{\theta_1, \varphi(V[p_1, p_2])\},$$

$$\varphi(W[p_3, p_1]) \geq min\{\theta_1, \varphi(V[p_1, p_2])\},$$

$$\varphi(Z[p_3, p_2]) \geq min\{\theta_1, \varphi(V[p_1, p_2])\},$$

pa uzimajući $p_3 = p_2$, dobivamo da je $p_2 \in r$.

Pošto relacija s ne zadovoljava fuzzy funkcionalnu zavisnost $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F B$ (a ne zadovoljava je ni relacija r), i pošto je za V-te komponente njenih elemenata

$$\varphi(V[u_1, u_2]) = \theta^{'} \geq \theta_1,$$

a za V-te komponente relacije q

$$\varphi(V[p_1, p_2]) = \theta^{'} \geq \theta_1$$

i za Z-te komponente relacije q

$$\varphi(Z[p_1, p_2]) = \theta^{'} < \theta_1 < \theta,$$

slijedi da relacija q ne zadovoljava fuzzy funkcionalnu zavisnost

$$X \overset{\theta}{\rightarrow}_F B,$$

odnosno,

$$\varphi(B[p_1, p_2]) < min(\theta, \varphi(X[p1, p2]).$$

(U suprotnom bi vrijedilo da je $\varphi(B[p1, p2]) = \theta^{'} \geq \theta$, iz čega slijedi da je $B \subseteq X^+(\theta)$ i dalje da je $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F B$ iz $\mathcal{F}^+$. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom teoreme da nije $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F B$ iz $\mathcal{F}^+$).

Neposredno se uočava da relacija q aktivno zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $V \overset{\theta_1}{\rightarrow\rightarrow}_F W$, jer je $\varphi(V[p_1, p_2]) \geq \theta_1$ i $\varphi(W[p_1, p_2]) \geq \theta_1$.

Tada, prema teoremi 3.1 relacija q zadovoljava θ-aktivno i sve fuzzy višeznačne zavisnosti koje zadovoljava i relacija s. Pošto relacija q zadovoljava sve fuzzy višeznačne zavisnosti kao i relacija s, a pored toga θ-aktivno zadovoljava i fuzzy višeznačnu zavisnost $V \overset{\theta_1}{\rightarrow\rightarrow}_F W$, slijedi da je s podrelacija q. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da je podrelacija s relacije r ona koja maximalno θ-aktivno zadovoljava višeznačne zavisnosti iz skupa $\mathcal{F}$, a ne zadovoljava fuzzy funkcionalnu zavisnost $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F B$.

Do kontradikcije je dovela pretpostavka da podrelacija s relacije r ne zadovoljava θ-aktivno fuzzy višeznačnu zavisnost $V \overset{\theta_1}{\rightarrow\rightarrow}_F W$. Otuda slijedi da je s tražena relacija.

(ii) **f je fuzzy višeznačna zavisnost iz F** Neka je fuzzy višeznačna zavisnost f oblika

$$X \overset{\theta}{\rightarrow\rightarrow}_F Y$$

i neka je $Z = R-(XY)$. Svaka dvoelementna podrelacija relacije r, zadovoljava sve fuzzy funkcionalne zavisnosti iz skupa $\mathcal{F}$. Pošto po pretpostavci teoreme relacija r ne zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost,

$$X \overset{\theta}{\rightarrow\rightarrow}_F Y$$

tada postoje u relaciji r n-torke

$$t_1 = (a, \ldots, a, a, \ldots, a, a, \ldots, a)$$

i

$$t_2 = (a, \ldots, a, b, \ldots, b, b, \ldots, b),$$

a bar jedna od n-torki

$$t_3 = (a, \ldots, a, b, \ldots, b, a, \ldots, a),$$

$$t_4 = (a, \ldots, a, a, \ldots, a, b, \ldots, b),$$

ne pripada relaciji r. Odatle imamo

$$\varphi(X[t_3, t_1]) \leq min(\varphi(X[t_1, t_2]),$$

$$\varphi(Y[t_3, t_1]) \leq min(\varphi(X[t_1, t_2]),$$

$$\varphi(Z[t_3, t_2]) \leq min(\varphi(X[t_1, t_2]),$$

odnosno

$$\varphi(X[t_4, t_1]) \leq min(\varphi(X[t_1, t_2]),$$

$$\varphi(Y[t_4, t_1]) \leq min(\varphi(X[t_1, t_2]),$$

$$\varphi(Z[t_4, t_2]) \leq min(\varphi(X[t_1, t_2]).$$

Izaberimo za podrelaciju s, relacije r, takve dvije n-torke t_1, t_2 koje omogućuju da podrelacija s θ-aktivno zadovoljava maksimalan broj fuzzy višeznačnih zavisnosti iz skupa $\mathcal{F}$, a ne zadovoljava zavisnost $X \overset{\theta}{\rightarrow}\!\!\rightarrow_F Y$.

Ako data relacija s zadovoljava sve fuzzy višeznačne zavisnosti iz skupa $\mathcal{F}$, tada je s upravo tražena relacija iz pretpostavke teoreme.

U slučaju da s ne zadovoljava sve fuzzy višeznačne zavisnosti iz skupa $\mathcal{F}$, neka je $U \overset{\theta_1}{\rightarrow}\!\!\rightarrow_F V$ jedna takva višeznačna zavisnost iz skupa $\mathcal{F}$, koju relacija s ne zadovoljava i neka je $W = R - (UV)$. Konstruišimo $s = \{t_1, t_2\}$ kao sljedećoj u tabeli

	Atributi	Ostali	atributi
t_1	a,...,a	a,...,a	a,...,a
t_2	a,...,a	b,...,b	b,...,b

Definisaćemo skupove V^* i W^* na sljedeći način:

$$V^* = \{A \in V | \varphi(A[t_i, t_j]) < \theta_1\}$$

$$W^* = \{A \in W | \varphi(A[t_i, t_j]) < \theta_1\}.$$

Kako je relacija s podrelacija relacije r i kako relacija r zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisinost

$$U \overset{\theta_1}{\rightarrow}\!\!\rightarrow_F V \ (\in \mathcal{F}),$$

zbog definicije fuzzy višeznačne zavsinosti, relacija r mora sadržati n-torku

$$t_3 = (a, \ldots, a, b, \ldots, b, a, \ldots, a)$$

i n-torku

$$t_4 = (a, \ldots, a, a, \ldots, a, b, \ldots, b)$$

za koje vrijedi

$$\begin{aligned} \varphi(U[t_3, t_1]) &\geq min(\theta_1, \varphi(U[t_1, t_2]), \\ \varphi(V[t_3, t_1]) &\geq min(\theta_1, \varphi(U[t_1, t_2]), \\ \varphi(W[t_3, t_2]) &\geq min(\theta_1, \varphi(U[t_1, t_2]) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \varphi(U[t_4, t_1]) &\geq min(\theta_1, \varphi(U[t_1, t_2]), \\ \varphi(V[t_4, t_1]) &\geq min(\theta_1, \varphi(U[t_1, t_2]), \\ \varphi(W[t_4, t_2]) &\geq min(\theta_1, \varphi(U[t_1, t_2]) \end{aligned}$$

Formirajmo podrelacije q_1 i q_2 relacije r na sljedeći način:

$$q_1 = \{t_1, t_3\} \text{ i } q_2 = \{t_1, t_4\}.$$

Stavimo da je stepen sličnosti za n-torke t_1 i t_3 na skupu V^* manji od jačine zavisnosti θ_1, stepen sličnosti za n-torke t_1 i t_4 na skupu W^* manji od jačine zavisnosti θ_1 i neka je stepen sličnosti za n-torke t_1 i t_2 na V^*W^* manji od θ_1. Otuda zbog definicije skupova V^* i W^* slijedi za n-torke t_1, t_3 vrijedi $\varphi(V[t_1, t_3]) < \theta_1$, za n-torke t_1, t_4 vrijedi $\varphi(W[t_1, t_4]) < \theta_1$, a za n-torke t_1, t_2 vrijedi $\varphi(V[t_1, t_2]) < \theta_1$ i $\varphi(W[t_1, t_2]) < \theta_1$.

Dokažimo da relacije q_1 i q_2 zadovoljavaju bar jednu više fuzzy višeznačnu zavisnost iz skupa $\mathcal{F}$, nego relacija s.

N-torke t_1 i t_3, kao i n-torke t_1 i t_4 su slične sa stepenom sličnosti većim od θ_1, na svakom atributu u kome su n-torke t_1 i t_2 slične sa stepenom θ_1.

Prema teoremi 3.3, relacije q_1 i q_2 zadovoljavaju θ-aktivno i sve fuzzy višeznačne zavisnosti iz skupa $\mathcal{F}$, koje zadovoljava i relacija s.

Osim toga q_1 i q_2 zadovoljavaju θ-aktivno fuzzy višeznačnu zavisnost $U \overset{\theta_1}{\to\!\!\to}_F V$, jer je, prema konstrukciji relacije q_1 $\varphi(U[t_1, t_3]) \geq \theta_1$ i $\varphi(W[t_1, t_3]) \geq \theta_1$, odnosno za relaciju q_2 je $\varphi(U[t_1, t_4]) \geq \theta_1$ i $\varphi(V[t_1, t_4]) \geq \theta_1$.

Status relacija q_1 i q_2 uzetih zajedno, a obzirom na zadovoljavanje fuzzy višeznačnih zavisnosti $X \overset{\theta}{\to\!\!\to}_F Y$ može biti sljedeći:

(i) Barem jedna od relacija q_1 ili q_2 ne zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\!\!\to}_F Y$. U ovome slučaju dolazimo do kontradikcije u odnosu na izbor relacije s. Zbog toga je relacija s tražena relacija. Kontradikcija je u tome da neka od relacija q_1 ili q_2 θ-aktivno zadovoljava više fuzzy višeznačnih zavisnosti iz $\mathcal{F}$, a ne zadovoljava zavisnost $X \overset{\theta}{\to\!\!\to}_F Y$, a to je protivno izboru relacije s, jer je ona po pretpostavci uzeta da θ-aktivno zadovoljava maximalan broj fuzzy višeznačnih zavisnosti iz $\mathcal{F}$.

(ii) Svaka od relacija q_1 i q_2 zadovoljava fuzzy višeznačne zavisnosti

$$X \overset{\theta}{\to\to}_F Y.$$

Tada slijedi da one moraju i θ-aktivno zadovoljavati fuzzy višeznačnu zavisnost

$$X \overset{\theta}{\to\to}_F Y,$$

jer za n-torke t_1, t_2, t_3 i t_4 vrijedi

$$\varphi(X[t_1, t_2]) \geq \theta,$$

$$\varphi(X[t_2, t_3]) \geq \theta,$$

$$\varphi(X[t_3, t_4]) \geq \theta,$$

na svim atributima iz skupa X. Po teoremi 3.1, tada slijedi da za relaciju q_1 mora vrijediti i :

1. $\varphi(X[t_1, t_3]) \geq \theta$ i $\varphi(Y[t_1, t_3]) \geq \theta$ ili
2. $\varphi(X[t_1, t_3]) \geq \theta$ i $\varphi(Z[t_1, t_3]) \geq \theta$.

Ako vrijedi $\varphi(Y[t_1, t_3]) \geq \theta$ tada je $V^* \subseteq Z$, jer se n-torke t_1 i t_3 razlikuju samo na skupu V^*.

Ako vrijedi $\varphi(Z[t_1, t_3]) \geq \theta$ tada je $V^* \subseteq Y$.

Analogno razmatranje za elemente relacije q_2 pokazuje da vrijedi:

1. $\varphi(X[t_1, t_4]) \geq \theta$ i $\varphi(Y[t_1, t_4]) \geq \theta$, ili
2. $\varphi(X[t_1, t_4]) \geq \theta$ i $\varphi(Z[t_1, t_4]) \geq \theta$.

Ako vrijedi $\varphi(Y[t_1, t_4]) \geq \theta$, tada je $W^* \subseteq Z$, a ako vrijedi $\varphi(Z[t_1, t_4]) \geq \theta$, tada je $W^* \subseteq Y$.

Kombinovnjem ovih mogućnosti dobivamo sljedeće uslove, od kojih samo jedan može biti realizovan:

(i) $V^* \subseteq Y$ i $W^* \subseteq Y$,
(ii) $V^* \subseteq Y$ i $W^* \subseteq Z$,
(iii) $V^* \subseteq Z$ i $W^* \subseteq Y$,
(iv) $V^* \subseteq Z$ i $W^* \subseteq Z$.

Razmotrimo kombinaciju (i). Ako ona vrijedi, tada za n-torke t_1 i t_2 vrijedi

$$\varphi(X[t1, t2]) \geq \theta,$$

$$\varphi(Y[t1, t2]) < \theta,$$

$$\varphi(Z[t1, t2]) \geq \theta,$$

jer se n-torke t_1 i t_2 razlikuju samo na skupu $V^*W^* \subseteq Y$.

Otuda slijedi da relacija $s = \{t_1, t_2\}$ zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$. To je u suprotnosti sa izborom relacije s. Zbog iste činjenice otpada i slučaj pod (iv), jer bi tada za n-torke t_1 i t_2 važilo

$$\varphi(X[t_1, t_2]) \geq \theta,$$

$$\varphi(Y[t_1, t_2]) \geq \theta,$$

$$(Z[t_1, t_2]) < \theta,$$

jer se n-torke t_1 i t_2 razlikuju samo na skupu $V^*W^* \subseteq Z$. Otuda slijedi da relacija $s = \{t_1, t_2\}$ zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$, što je u suprotnosti sa izborom relacije s.

Sada pretpostavimo da vrijedi (ii), to jest, neka je $V^* \subseteq Y$ i $W^* \subseteq Z$. Kako je n-torka $t_1 = (a, \ldots, a, a, \ldots, a, a, \ldots, a)$, a pošto se n-torke t_1 i t_3 razlikuju samo na skupu V^*, tada mora vrijediti

$$\varphi(V[t_1, t_3]) < \theta,$$

odnosno n-torka t_3 mora biti $t_3 = (a, \ldots, a, b, \ldots, b, a, \ldots, a)$.

Na sličan načcin, pošto se n-torke t_1 i t_4 razlikuju samo na W^*, tada je

$$\varphi(W[t_2, t_4]) < \theta,$$

pa n-torka t_4 mora imati oblik $(a, \ldots, a, a, \ldots, a, b, \ldots, b)$. Kako po pretpostavci relacija r ne zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$, a po konstrukciji relacije s, bar jedna od n-torki t_3, odnosno t_4 ne pripada relaciji r. Otuda slijedi da bar jedna od relacija q_1 ili q_2 nije podrelacija relacije r. Ovo je u kontradikciji sa konstrukcijom ovih relacija.

Do kontradikcije je dovela pretpostavka da svaka od relacija q_1 i q_2 zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$. Zbog kontradikcije slijedi da bar jedna od njih ne zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$. Ali ovo je opet kontradikcija sa definicijom relacije s, jer bi opet jedna od relacija q_1 ili q_2 bila veća od s. Dakle, slijedi da je s tražena relacija.

Time je teorema dokazana. □

3.4 Glavni rezultati

Teorema 3.5. Neka je $\mathcal{C}$ skup fuzzy funkcionalnih i fuzzy višeznačnih zavisnosti na relacionoj šemi R i neka je c fuzzy funkcionalna ili fuzzy višeznačna zavisnost na R. Tada vrijedi:

1. $\mathcal{C} \to c$, ako i samo ako

2. $\mathcal{C} \to c$ na dvoelementnim relacijama.

Dokaz. Dokaz 1. $\to$ 2. je trivijalan, jer ako u nekoj relaciji r iz skupa fuzzy funkcionalnih zavisnosti i fuzzy višeznačnih zavisnosti $\mathcal{C}$ slijedi i neka fuzzy funkcionalna ili fuzzy višeznačna zavisnost, tada po samoj definiciji fuzzy zavisnosti slijedi da to isto vrijedi i u nekoj dvoelementnoj podrelaciji relacije r.

Dokažimo da 2. $\to$ 1. Pretpostavimo suprotno, to jest, neka postoji relacije r koja zadovoljava skup svih fuzzy funkcionalnih i fuzzy višeznačnih zavisnosti na R, a neka ne zadovoljava fuzzy zavisnosti iz c. Tada, prema prethodnom teoremu 3.3, ako r zadovoljava skup fuzzy funkcionalnih i fuzzy višeznačnih zavisnosti na R, a ne zadovoljava fuzzy zavisnosati u c, tada postoji neka dvoelementna podrelacija s relacije r koja zadovoljava $\mathcal{C}$ i ne zadovoljava c. $\square$

Teorema 3.6. Neka je $\mathcal{C}$ skup fuzzy funkcionalnih i fuzzy višeznačnih zavisnosti na relacionoj šemi R i neka je c jedna fuzzy funkcionalna ili fuzzy višeznačna zavisnost na R. Tada vrijedi

1. $\mathcal{C} \to c$ na dvoelementnim relacijama, ako i samo ako

2. $\mathcal{C} \to c$ kada se zavisnosti interpretiraju kao fuzzy formule.

Dokaz (1. $\to$ 2.) Pretpostavimo suprotno, da 2. nije istinita. Neka je $i_r : R \to [0,1]$ interpretacija u kojoj su sve formule, generisane fuzzy funkcionalnim i fuzzy višeznačnim zavisnostima iz $\mathcal{C}$, zadovoljive, a formula generisana

(i) fuzzy funkcionalnom zavisnosti $X \overset{\theta}{\to} Y$

(ii) fuzzy višeznačnom zavisnosti $X \overset{\theta}{\to\to} Y$

iz c neka je nezadovoljiva, to jest, neka je

(i) $i_r(X \Rightarrow Y) \leq 0.5$

(ii) $i_r(X \Rightarrow Y \vee Z) \leq 0.5$

Neka je skup Z' definisan na sljedeći način

$$Z' = \{A \in R : i_r(A) \geq 0.5\}.$$

Neka je relacija $r_{Z'} = \{t_1, t_2\}$, gdje je $t_1(R) = (a, \ldots, a)$, za svaki atribut $A \in R$. Definišimo sada t_2 na sljedeći način

$$t_2(A) = \begin{cases} a, \ldots, a, & A \in Z' \\ b, \ldots, b, & A \notin Z' \end{cases}$$

Dokažimo da ovako definisana relacija $r_{Z'} = \{t_1, t_2\}$, zadovoljava svaku

(i) fuzzy funkcionalnu zavisnost iz $\mathcal{C}$

(ii) fuzzy višeznačnu zavisnost iz $\mathcal{C}$

Dokažimo (i). Neka je $U \xrightarrow{\theta_1} V$ bilo koja fuzzy funkcionalna zavisnost iz $\mathcal{C}$, za koju vrijedi $\varphi(U[t_1, t_2]) \geq \theta_1$. Ako je $A \subseteq U$, tada prema propoziciji 2.1 vrijedi

$$\varphi(A[t_i, t_j]) \geq \varphi(U[t_i, t_j]), \text{ za svako i, j u } r,$$

pa je otuda

$$\varphi(A[t_i, t_j]) \geq \theta_1.$$

Zbog definicije n-torke $t_1(A) = (a, \ldots, a)$, mora vrijediti i za n-torku $t_2(A) = (a, \ldots, a)$, za svaki atribut $A \in U$. To dalje znači da je $U \subseteq Z'$, odnosno $i_r(A) > 0.5$, za svaki $A \in U$, odnosno

$$(*)\ i_r(U) = min(i_r(A1), \ldots a, i_r(An)) \geq 0.5, \text{ za svaki } A_i \in U.$$

Kada bi vrijedilo $\varphi(V[t_1, t_2]) < \theta_1$, to bi značilo, prema konstrukciji relacije r, da je $t_1(A) = (a, \ldots, a)$, a za t_2 bi moralo biti $t_2(A) = (b, \ldots, b)$, za neki atribut $A \in V$. U ovome slučaju slijedi da $A \notin Z'$ i prema definiciji skupa Z' tada je $i_r(A) \leq 0.5$, pa je $i_r(V) = min(i_r(A1), \ldots, i_r(A_n)) \leq 0.5$, za neki $A_i \in V$. Ovo povlači da je

$$i_r(UV) = max(i_r(1 - U), i_r(V)) \leq 0.5 \text{ (nezadovoljiv po Kleene-Dienes-u).}$$

Medjutim, ovo je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom, jer smo pretpostavili da su sve fuzzy formule iz skupa $\mathcal{C}$ zadovoljive. Do kontradikcije je dovela pretpostavka da je $\varphi(V[t_1, t_2]) < \theta_1$. Dakle, mora vrijediti da je $\varphi(V[t_1, t_2]) \geq \theta_1$. Odavde slijedi da je i fuzzy funkcionalna zavisnost zadovoljiva $\varphi(V[t_1, t_2]) \geq \theta_1 \geq min(\theta_1, U[t_1, t_2]))$.

Za dokaz (ii) dokažimo da dvoelementna relacija $r_{Z'} = \{t_1, t_2\}$ zadovoljava svaku višeznačnu zavisnost iz skupa $\mathcal{C}$. Neka je $U \xrightarrow{\theta_1}\!\!\rightarrow V$ bilo koja fuzzy višeznačna zavisnost iz skupa $\mathcal{C}$ za koju vrijedi $\varphi(U[t_1, t_2]) \geq \theta_1$. Zbog definicije $t_1(A) = (a, \ldots, a)$ mora vrijediti i $t_2(A) = (a., \ldots, a)$, za neki atribut $A \in U$. To dalje znači da je $U \subseteq Z'$, odnosno $i_r(A) > 0.5$, za svaki $A \in U$, odnosno $i_r(U) > 0.5$.

Kada bi vrijedilo da je

$$\varphi(V[t_1, t_2]) < \theta_1 \text{ i } \varphi(G[t_1, t_2]) < \theta_1,$$

tada bi vrijedilo $t_1(A) = (a, \ldots, a)$ i $t_2(A) = (b, \ldots, b)$, za neki atribut $A \in V$ i $t_1(B) = (a, \ldots, a)$ i $t_2(B) = (b, \ldots, b)$, za neki atribut $B \in G$. To bi dalje značilo da $A, B \notin Z^{\text{TM}}$, odnosno $i_r(A) \leq 0.5$ i $i_r(B) \leq 0.5$. Zbog toga bi bilo $i_r(V) \leq 0.5$ i $i_r(G) \leq 0.5$. Otuda slijedi da je i

$$i_r(U \Rightarrow V \vee G) = max(i_r(1 - U), i_r(V), i_r(G)) \leq 0.5$$

(nezadovoljivo po Kleene-Dienes-u) Ovo je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom, jer smo pretpostavili da su sve formule iz skupa $\mathcal{C}$ zadovoljive. Dakle, mora vrijediti da je

$$\varphi(V[t_1, t_2]) \geq \theta_1 \text{ ili } \varphi(G[t_1, t_2] \geq \theta_1.$$

Otuda vrijedi i fuzzy višeznačna zavisnost $U \overset{\theta_1}{\twoheadrightarrow}_F V$ u $r_{Z'}$.

Sada dokažimo da relacija $r_{Z'} = \{t_1, t_2\}$ ne zadovoljava ni jednu od zavisnosti iz c, to jest, ne zadovoljava ni jednu

(i) fuzzy funkcionalnu zavisnost $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F Y$

(ii) fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\twoheadrightarrow}_F Y$

Dokaz (i). Pošto pridružena formula $X \Rightarrow Y$ nije zadovoljiva u interpretaciji i_r, to jest, pošto je $i_r(X \Rightarrow Y) \leq 0.5$, odnosno $max(i_r(1-X), i_r(Y)) \leq 0.5$, mora biti

$$(**)\ \ i_r(X) > 0.5 \text{ i } i_r(Y) \leq 0.5$$

Pretpostavimo da je $\varphi(X[t_1, t_2]) \geq \theta$. Ako bi vrijedilo da je i $\varphi(Y[t_1, t_2]) \geq \theta$, tada bi vrijedilo i da je $Y \subseteq Z'$, odnosno, bilo bi $i_r(B_j) > 0.5$, za svako $j = 1, \ldots, n$ i neki $B \in Y$. Ali tada bi bilo i $i_r(Y) > 0.5$, što je u kontradikciji sa $(**)$. Dakle, $\varphi(Y[t, t_2]) \leq \theta$. Otuda slijedi da relacija $r_{Z'}$ ne zadovoljava fuzzy funkcionalnu zavisnost $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F Y$, jer je $\varphi(Y[t_1, t_2]) < min(\theta, \varphi(X[t_1, t_2])$.
Dokaz (ii). Pošto pridružena formula $X \Rightarrow Y \vee D$ nije zadovoljiva u interpretaciji i_r, to jest, $i_r(X \Rightarrow Y \vee D) \leq 0.5$, odnosno $max(i_r(1-X), i_r(Y), i_r(D)) \leq 0.5$, tada mora biti

$$(***)\ \ i_r(X) > 0.5 \text{ i } i_r(Y) \leq 0.5 \text{ i } i_r(D) \leq 0.5.$$

Neka je $\varphi(X[t_1, t_2]) \geq \theta$. Ako bi vrijedilo i $\varphi(Y[t_1, t_2]) \geq \theta$ ili $\varphi(D[t_1, t_2]) \geq \theta$, tada bi bilo i $Y \in Z'$ ili $D \in Z'$, odnosno, vrijedilo bi $i_r(B_j) \geq 0.5$, za $j = 1, \ldots, n$, za neko $B_j \in Y$ i dalje, $i_r(Y) = min(i_r(B1), \ldots, i_r(B_n)) \geq 0.5$, ili $i(Dk) \geq 0.5$, za $k = 1, \ldots, p$, za neko $D_k \in D$, odnosno, $i_r(D) = min(i_r(D1), \ldots, i_r(Dp)) \geq 0.5$ Ovo je u kontradikciji sa $(***)$. Otuda slijedi da relacija $r_{Z'}$ ne zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} Y$.
Dokaz (2. $\rightarrow$ 1.) Sada dokažimo obrnutu teoremu, odnosno da (2) povlači (1), za slučajeve

(i) fuzzy funkcionalne zavisnosti $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F Y$,

(ii) fuzzy višeznačne zavisnosti $X \overset{\theta}{\twoheadrightarrow}_F Y$.

Pretpostavimo suprotno, to jest, neka ne vrijedi (i). Tada postoji dvoelementna relacija $r = \{t, t'\}$ koja zadovoljava sve fuzzy funkcionalne zavisnosti i fuzzy višeznačne zavisnosti iz $\mathcal{C}$, a ne zadovoljava fuzzy zavisnost $X \overset{\theta}{\rightarrow}_F Y$ ili $X \overset{\theta}{\twoheadrightarrow}_F Y$. Dokažimo da je u interpretaciji i_r zadovoljiva formula pridružena fuzzy funkcionalnim zavisnostima $U \overset{\theta_1}{\rightarrow} V$ iz $\mathcal{C}$, to jest, $i_r(U \Rightarrow V) > 0.5$. Pretpostavimo suprotno, da u u datoj interpretaciji $i_r(U \Rightarrow V) \leq 0.5$, odnosno, $max(1 - i_r(U), i_r(V)) \leq 0.5$. Odavde je i $i_r(U) > 0.5$ i $i_r(V) \leq 0.5$. Zbog toga bi vrijedilo da je u datoj dvoelementnoj relaciji $r = \{t, t'\}$ $\varphi(P[t, t']) \geq \theta_1$ za svaki $P \in U$ i $\varphi(Q[t,t^{'}]) < \theta_1$ za neki $Q \in V$. Odavde je i $\varphi(U[t,t^{'}]) > \theta_1$ (jer je po definiciji $\varphi(U[t,t^{'}]) = \min\limits_{P \in U}\{\varphi(P[t,t^{'}])\})$ i $\varphi(V[t,t^{'}]) = \min\limits_{Q \in V}\{\varphi(Q[t,t^{'}])\} < \theta_1$, za neki $Q \in V$. Slijedi da relacija $r = \{t,t^{'}\}$ ne zadovoljava fuzzy funkcionalna zavisnost $U \overset{\theta_1}{\to} V$ iz $\mathcal{C}$, jer ne vrijedi da je $\varphi(V[t,t^{'}]) \geq min(\theta_1,(U[t,t^{'}]))$. Medjutim, ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da postoji dvoelementna relacija $r = \{t,t^{'}\}$ koja zadovoljava sve fuzzy funkcionalne zavisnosti iz $\mathcal{C}$.

Dokaz (ii). Dokažimo sada tvrdnju za fuzzy višeznačnu zavisnost $U \overset{\theta_1}{\to\to}_F V$. Dokažimo da je formula pridružena fuzzy višeznačnoj zavisnosti $U \overset{\theta_1}{\to\to}_F V$ iz $\mathcal{C}$, zadovoljiva u interpretaciji i_r, to jest, $i_r(U \Rightarrow V \vee M) > 0.5$.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, da je odgovarajuća formula nezadovoljiva. Tada imamo $max(i_r(1-U), i_r(V), i_r(M)) \leq 0.5$. Otuda je i $i_r(U) > 0.5$ i $i_r(V) \leq 0.5$ i $i_r(M) \leq 0.5$, odnosno u relaciji $r = \{t,t^{'}\}$

$$\varphi(A[t,t^{'}]) \geq \theta_1, \text{ za svaki } A \text{ iz } U,$$

$$\varphi(B[t,t^{'}]) < \theta_1, \text{ za neki } B \in V,$$

$$\varphi(C[t,t^{'}]) < \theta_1, \text{ za neki } C \in M.$$

Otuda je i $\varphi(U[t,t^{'}]) \geq \theta_1$, $\varphi(V[t,t^{'}]) < \theta_1$, $\varphi(M[t,t^{'}]) < \theta_1$, iz čega proizilazi da relacija $r = \{t,t^{'}\}$ ne zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $U \overset{\theta_1}{\to\to}_F V$. Ovo je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom.

Sada dokažimo da je u interpretaciji i_r formula $(X \Rightarrow Y)$ nezadovoljiva, to jest, $i_r(X \Rightarrow Y) \leq 0.5$. Pretpostavimo suprotno, neka je $i_r(X \Rightarrow Y) > 0.5$. Ako je $i_r(X) < 0.5$, odnosno $\varphi(X[t,t^{'}]) < \theta$, tada slijedi da r zadovoljava fuzzy funkcionalnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$, što je u kontradikciji sa našom pretpostavkom. Neka je sada $i_r(Y) \geq 0.5$. Tada je i $\varphi(Y[t,t^{'}]) \geq \theta \geq min(\theta, \varphi(X[t_1,t_2])$, što je opet u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom.

Ostaje još da dokažemo da je u interpretaciji i_r formula $(X \Rightarrow Y \vee Z)$ nezadovoljiva, to jest, $i_r(X \Rightarrow Y \vee Z) \leq 0.5$. Pretpostavimo suprotno, neka je $i_r(X \Rightarrow Y \vee Z) > 0.5$. Tada su mogući sljedeći slučajevi:

1. $1-i_r(X) > 0.5$, odnosno $i_r(X) \leq 0.5$, pa je prema definiciji 3.1 i $\varphi(X[t,t^{'}]) < \theta$. Odavde slijedi da r zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$, što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom.

2. Ako je $1 - i_r(X) \leq 0.5$, tada vrijedi i $i_r(Y) > 0.5$ ili $i_r(Z) > 0.5$, ili su ispunjena oba ova uslova. Tada je i $\varphi(X[t,t^{'}]) > \theta$, ili je $\varphi(Y[t,t^{'}]) > \theta$, ili $\varphi(Z[t,t^{'}]) > \theta$. Otuda slijedi da r zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost $X \overset{\theta}{\to\to}_F Y$, što je opet kontradikcija sa polaznom prepostavkom.

Time je teorema u potpunosti dokazana. $\square$

Nakon što je uspostavljena ekvivalentnost fuzzy višeznačnih zavisnosti i formula fuzzy logike, moguće je primijeniti pravila izvodjenja u fuzzy logici na račun fuzzy višeznačnih zavisnosti, koristeći princip rezolucije. Relevantni primjeri u programskom jeziku Prolog mogu se navesti slično kao u [5].

4 Nastavak istraživanja

Osnovno svojstvo svih zavisnosti, koje se pojavljuju u klasičnim relacionim bazama podataka, u suštini govori da prisustvo nekih n-torki u instancama povlači prisustvo nekih drugih n-torki u instancama, ili povlači da su neke komponente n-torki jednake. U nekim slučajevima, kao što su *join* zavisnost ili *višeznačna* zavisnost, nove n-torke mogu biti specificirane preko starih n-torki, dok za *inkluzivnu* zavisnost to nije slučaj.

U svakom slučaju, sve zavisnosti u klasičnim relacionim bazama podataka mogu biti opisane formulama logike prvog reda, posebno klauzulama logičkog programiranja. Klase zavisnosti koje se mogu tako opisati uključuju i komplikovane zavisnosti koje se uglavnom ne pojavljuju u praksi. Ipak, važno je da uopštimo rezultate diskutovane u radu tako da budu u funkciji objašnjavanja svih fuzzy zavisnosti koje su se do sada pojavile u literaturi i posebno da postave granicu izmedju razrješivih i nerazrješivih problema u oblasti fuzzy zavisnosti u fuzzy relacionim bazama podataka.

Zainteresovani smo za fuzzy *uložene* (*embedded*) zavisnosti, u kojima nema jednakosti atoma u glavi klauzula. Fuzzy zavisnosti koje smo do sada razmatrali su *unirelacione*, sa korištenjem najviše jednog imena relacije, a planiramo razmotriti i fuzzy *multirelacione* zavisnosti, koje koriste više relacija.

Navodimo taksativno klasifikaciju fuzzy zavisnosti u fuzzy relacionim bazama podataka koje treba razmotriti sa ciljem da se nadje odgovarajući fragment fuzzy logike koji im je ekvivalentan. Klasifikacija fuzzy zavisnosti slijedi odgovarajuću klasifikaciju klasičnih zavisnosti u klasičnim relacionim bazama podataka koja se može naći u knjigama [15]. Fuzzy *kompletna* ($full$) zavisnost je fuzzy zavisnost bez egzistencijalnih kvantifikatora. n-torkama generisana fuzzy zavisnost ($ftgd$ zavisnost) je zavisnost u kojoj se ne pojavljuje jednakost atoma. Jednakošću generisana fuzzy zavisnost ($fegd$) je zavisnost u kojoj je glava klauzule jedan atom sa jednakošću. Fuzzy zavisnosti sa tipovima ($ftypedd$) su fuzzy zavisnosti u kojima je dodjela vrijednosti varijablama vezana za kolone relacije. Pri tome svaki atom sa jednakošću sadrži par varijabli vezanih za istu poziciju. Fuzzy zavisnosti bez tipova definišemo kao opozit fuzzy zavisnostima sa tipovima. Često je važno razlikovati koliko klauzula ima atoma u glavi klauzule, pa fuzzy zavisnosti dijelimo na $single\ head$ i $multi - head$ fuzzy zavisnosti.

Postoji vrlo bliska veza izmedju fuzzy zavisnosti i semantičkih tabloa. Tabloi su zgodna notacija za predstavljanje i rad sa fuzzy zavisnostima, a iz njih se mogu konstruisati fuzzy algebre koje automatizuju izvodjenje osobina fuzzy zavisnosti. Zbog toga su semantički tabloi takodje u fokusu naših istraživanja.

Koristeći fuzzy logike planiramo ispitati uticaj korištenja različitih implikacija na perspektivu fuzzy zavisnosti. Zanimaju nas uticaji implikacija konzistentnih sa klasičnim implikacijama binarne logike (Kleene-Dienes, Lukasiewicz, Reichenbach-Fodor, Q-implikacija, Goguen-Gödel,Willmott), kao i "inžinjerskih" implikacija (Mamdani, Larsen). Posebno nas zanima fuzzy perspektiva klasičnih rezultata u odnosu na konačne implikacije (fin) i implikacije bez restrikcija (unr). Klasično, u logici prvog reda imamo da je $\models_{fin}$ $co - r.e.$ i $\models_{unr}$ je $r.e.$ i zanima nas odgovarajući rezultat u fragmentu fuzzy logike koji odgovara nekoj od klasa fuzzy zavisnosti.

5 Zaključak

Razmatrana je i dokazana ekvivalentnost izmedju teorije fuzzy višeznačne zavisnosti za fuzzy relacione baze podataka i jednog fragmenta fuzzy logike. Data su adekvatna (sound) i kompletna (complete) pravila fuzzy logike, u odnosu na fuzzy višeznačne zavisnosti, kada se fuzzy formule interpretiraju kao fuzzy višeznačne zavisnosti. To je postignuto tako što je uvedena definicija istinitosnih vrijednosti atributa u relaciji r nad relacijskom šemom R. Na osnovu te definicije je fuzzy višeznačnoj zavisnosti pridružena odgovarajuća fuzzy formula i dokazano je da ako relacija r zadovoljava fuzzy višeznačnu zavisnost, tada je njoj pridružena fuzzy formula zadovoljiva u odgovarajućoj interpretaciji i obrnuto. Dokazana je ekvivalentnost skupa fuzzy višeznačnih zavisnosti i fuzzy formula. Na kraju smo opisali plan naših daljih istraživanja u oblasti fuzzy zavisnosti.

Literatura

[1] J.F. Baldwin,*Fuzzy logic,* John Wiley And Sons, 1996.

[2] B.P.Buckles and F.E.Petry,*Uncertainty models in information and database systems,* J. Inform. Sci. 11 (1985) 77-87.

[3] G. Chen, *Fuzzy logic in data modeling Semantics, Constraint, and Database Design,* Kluwer Academic Publishers, 1998.

[4] Diang-An Chiang, L.R.Chow, Nan-Chen Hsien, *Fuzzy information in extended fuzzy relational databases,* Fuzzy Sets and Systems 92 (1997), 1-20

[5] N. Dukić et al. *Fuzzy Functional Dependency and the Resolution Principle*, XIX International Symposium on Information and Communication Technologies, Sarajevo, 2003

[6] C.W. Entemann, *A fuzzy logic with interval truth values,* Elsevier, Fuzzy sets and systems (161-183), 2000

[7] H. Habiballa, *Fuzzy general resolution,* AFM, 2000

[8] S. Kumar De, R. Biswas, A. R. Roy, *On extended fuzzy relational databases model with proximity relations,* Fuzzy Sets and Systems 117 (2001) 195-201

[9] R.C.T. Lee, *Fuzzy logic and Resolution Principle,* Journal of the Association for Computing Machinery , 1972, 109-119

[10] Wei-Yi Liu, *The fuzzy functional dependency on the basis of the semantic distance,* Elsevier Science Publishers, Fuzzy Sets and Systems 59 (173-179) 1993

[11] M. Mizumoto and H.J. Zimmermann, *Comparasion of fuzzy reasoning methods,* Fuzzy Set and Systems, 8, 253-283, 1982

[12] M. Nakata, *Dependenciesin Fuzzy Database: Multivalued Dependency,* IEEE, 1996.

[13] H. Prade, *A synthetic view of approximate reasoning technicquies,* Proc. 8th Int. Joint Conference on Artificial Intelligence, Vol. 1, 130 -136, 1983

[14] M.I.Sozat ,A.Yazici, *A complete axiomatization for fuzzy functional and multivalued dependencies in fuzzy database relations,* Fuzzy set and Systems, 2001, 161-181

[15] J. Ullman, *Principles of Database and Knowledge-Base Systems*, Two vols, Computer Science press, 1988.

[16] S.L. Wang, J.W. Shen, T.P. Hong, b.C.H. Chang, *Incremental Discovery of Functional Dependencies From Similarity-Based Fuzzy Relation Databases Using Partitions,* 2002

[17] L.A.Zadeh , *Fuzzy sets,* Inform. And Control 8 (1965) 338-353.

FOURTH MATHEMATICAL CONFERENCE OF THE REPUBLIC OF SRPSKA
Trebinje, 6 and 7 June 2014

Fazi metrike i primene u otklanjanju šuma na slici

Nebojša Ralević
Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
nralevic@uns.ac.rs

Sanja Dukić
Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
sanjadukic85@gmail.com

Danijela Karaklić
Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
danijela.popovic987@gmail.com

Stručni rad

Abstract

U skupu svih fazi objekata, definisanih nad nekim univerzalnim skupom, može se definisati rastojanje. Sva rastojanja d koja razmatramo su dakle, preslikavanja $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{I}$, gde je $\mathcal{F}$ skup fazi objekata definisanih nad univerzalnim skupom X (različiti tipovi fazi skupova, fazi tačke), a $\mathcal{I}$ interval $[0, 1]$, skup nenegativnih fazi brojeva ili npr. mreža. Primene u različitim oblastima kao što su teorija slike, prepoznavanje oblika, diktiraju nam kakve osobine ta rastojanja treba da zadovoljavaju. Najčešće, ta rastojanja su semi-metrike odnosno tzv. pseudo-metrike kod kojih ne važi nejednakost trougla. Obično je ona zamenjena nejednakošću u kojoj figurišu $t$norme. Primeri takvih rastojanja su fazi metrike. To su zapravo fazi skupovi, čije osobine razmatramo u ovom radu. Takođe je data primena fazi metrika u filtriranju slike.

1 Uvod

U klasičnom smislu rastojanja su se najčešće definisala pomoću preslikavanja koja su bila metrike, pseudo-metrike, semi-metrike i sličnosti, a definisala su se na sledeći način.

Definicija 1.1. Ako je $X \neq \emptyset$, funkciju $d : X^2 \to \mathbb{R}_0^+$ za koju važe sledeće četiri osobine:

1. $\forall x \in X,\ d(x, x) = 0,$
2. $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y,$
3. $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x),$
4. $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$

kažemo da je metrika, a uređeni par (X,d) metrički prostor. Ako važe samo osobine 1., 3. i 4. za d kažemo da je pseudo-metrika. Ukoliko važe 1., 2. i 3. preslikavanje d nazivamo semi-metrikom. Za semi-metriku kod koje umesto nejednakosti trougla (osobina 4.) važi jedna od nejednakosti:

4.' $\forall x,y,z \in X,\ d(x,z) \geq T(d(x,y),d(y,z))$,

4.'' $\forall x,y,z \in X,\ d(x,z) \leq S(d(x,y),d(y,z))$,

(T je $t-$norma, a S je $t-$konorma) kažemo da je sličnost.

Neka je (X,d) metrički prostor, a U i V podskupovi od X, rastojanje izmedju U i V je definisano sa

$$d(U,V) = \inf_{\substack{x\in U\\ y\in V}} d(x,y).$$

Definicija 1.2. Ako je $X \neq \emptyset$ i $\mu : X \to [0,1]$, tada uređeni par (X,μ) zovemo fazi skup. Preslikavanje μ je funkcija pripadanja i često se poistovećuje sa fazi skupom.

Ukoliko funkcija pripadanja uzima samo vrednosti 0 i 1 (odnosno ona je karakteristična funkcija skupa) fazi skup je običan ("crisp") skup.

Za fazi skupove rastojanje se definiše na različite načine. Navešćemo neke od njih.

Neka je (X,d) metrički prostor, a $\mu : X \to [0,1]$ i $\nu : X \to [0,1]$ fazi skupovi definisani na X.

Rastojanje $\bar{d}_{\mu,\nu}$ između dva fazi skupa μ i ν se definiše kao fazi skup na $\mathbb{R}_0^+$ sa:

$$\bar{d}_{\mu,\nu}(r) = \sup_{\substack{x,y\in X\\ d(x,y)=r}} [\inf(\mu(x),\nu(y))].$$

Hauzdorfovo rastojanje L^* između "crisp" skupova $U \subset X$ i $V \subset X$, gde je (X,d) metrički prostor, je definisano na sledeći način:

$$L^*(U,V) = \max[L(U,V), L(V,U)],$$

gde su $U^\lambda = \{x \in X | \exists y \in U : d(x,y) \leq \lambda\}$ i $L(U,V) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ | U^\lambda \supseteq V\}$.

Ova definicija se uopštava na fazi skupove definisane na X.

Za proizvoljan fazi skup $\tau : X \to [0,1]$ i proizvoljno $\lambda \in \mathbb{R}^+$ uzimajući da je $\tau^\lambda(x) = \sup\{\tau(y) | d(x,y) \leq \lambda\}$ i $L(\mu,\nu) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ | \mu^\lambda \geq \nu\}$, definišemo rastojanje $L^*(\mu,\nu)$ između dva fazi skupa μ i ν sa:

$$L^*(\mu,\nu) = \max[L(\mu,\nu), L(\nu,\mu)].$$

Rastojanje $\Delta_{\mu,\nu}$ između fazi skupova μ i ν je fazi skup $\Delta_{\mu,\nu} : \mathbb{R}_0^+ \to [0,1]$ definisan sa

$$\Delta_{\mu,\nu}(r) = \sup_{\substack{x,y\in X\\ d(x,y)\leq r}} [\inf(\mu(x),\nu(y))].$$

Ova definicija se od $\overline{d}_{\mu,\nu}(r)$ razlikuje samo po tome što je $=$ zamenjeno sa $\leq$.

U sledećoj sekciji ćemo se ograničiti na rastojanja koja su fazi T-metrike i fazi S-metrike, a skupovi nad kojima se vrši određivanje rastojanja su "crisp" skupovi. Da bi to ostvarili uvešćemo pojmove triangularne norme i konorme.

Definicija 1.3. Triangularna norma (kraće $t-$norma) je binarna operacija $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ koja zadovoljava sledeće aksiome za sve $a, b, c, b_1 \in [0,1]$:

1. $T(a,1) = a$ (granični uslov);
2. $b \leq b_1 \Rightarrow T(a,b) \leq T(a,b_1)$ (monotonost);
3. $T(a,b) = T(b,a)$ (komutativnost);
4. $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$ (asocijativnost).

Za $t-$normu se kaže da je Arhimedova $t-$norma, ako pored prethodnih aksioma važe još dve aksiome:

5. neprekidna je funkcija
6. $\forall a \in (0,1),\ T(a,a) < a$.

Primedba 1.1. Iz uslova datih u definiciji $t-$norme sledi monotonost po koordinatama, tj. za sve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0,1]$ važi

$$a_1 \leq a_2 \wedge b_1 \leq b_2 \Rightarrow T(a_1,b_1) \leq T(a_2,b_2).$$

Zamenom datog uslova sa aksiomom monotonosti u definiciji $t-$norme, dobija se ekvivalentna definicija $t-$norme.

Ako u definiciji $t-$norme, umesto aksiome monotonosti važi striktna monotonost, tj.

$$a_1 < a_2 \wedge b_1 < b_2 \Rightarrow T(a_1,b_1) < T(a_2,b_2),$$

za sve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0,1]$, kažemo da je $t-$norma striktna.

Može se pokazati da je 0 anihilator za $t-$normu, tj. za svako $a \in [0,1]$ važi

$$T(a,0) = T(0,a) = 0.$$

Definicija 1.4. Opadajući generator g je neprekidna i strogo opadajuća funkcija iz $[0,1]$ u $\mathbb{R}$, takva da je $g(1) = 0$. Pseudo-inverzna funkcija za opadajući generator g, u oznaci $g^{(-1)}$, je funkcija iz $\mathbb{R}$ u $[0,1]$ definisana sa

$$g^{(-1)}(a) = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & a \in (-\infty, 0) \\ g^{-1}(a), & a \in [0, g(0)] \\ 0, & a \in (g(0), +\infty) \end{array} \right. ,$$

gde je g^{-1} uobičajena inverzna funkcija za g.

Teorema 1.1. Preslikavanje $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je Arhimedova t-norma ako i samo ako postoji opadajući generator g tako da važi $T(a,b) = g^{(-1)}(g(a)+g(b))$, $a, b \in [0,1]$.

Triangularne norme koje se najčešće koriste su:

1. Standardni presek: $T(a,b) = \min(a,b)$;
2. Algebarski proizvod: $T(a,b) = ab$;
3. Ograničena razlika: $T(a,b) = \max(a+b-1, 0)$;
4. Drastični presek: $T(a,b) = \begin{cases} a, & b = 1 \\ b, & a = 1 \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$

2 Fazi metrika

Definicija 2.1. Fazi $T-$metrički prostor je uređena trojka $(X, \boldsymbol{m}, T)$ takva de je X neprazan skup, T je neprekidna t-norma i $\boldsymbol{m}$ je fazi skup na $X \times X \times]0, +\infty[$ koji zadovoljava sledeće uslove za sve $x, y, z \in X, \alpha, \beta > 0$:

1. $\boldsymbol{m}(x,y,\alpha) \in (0,1]$;
2. $\boldsymbol{m}(x,y,\alpha) = 1 \Leftrightarrow x = y$;
3. $\boldsymbol{m}(x,y,\alpha) = \boldsymbol{m}(y,x,\alpha)$;
4. $T(\boldsymbol{m}(x,y,\alpha), \boldsymbol{m}(y,z,\beta)) \leq \boldsymbol{m}(x,z,\alpha+\beta)$;
5. $\boldsymbol{m}(x,y,\_) :]0,+\infty[\to [0,1]$ je neprekidna.

Fazi skup $\boldsymbol{m}$ zovemo fazi $T-$metrika. Ako umesto 1. važi $\boldsymbol{m}(x,y,\alpha) \in [0,1]$, za fazi skup $\boldsymbol{m}$ kažemo da je fazi $T-$(pseudo-)metrika.

Definicija 2.2. Fazi $T-$metrika $\boldsymbol{m}$ je stacionarna na X ako $\boldsymbol{m}$ ne zavisi od α, tj. ako je za sve fiksirane $x, y \in X$, funkcija $\boldsymbol{m}_{x,y}(\alpha) = \boldsymbol{m}(x,y,\alpha)$ konstantna.

Primer 2.1. Preslikavanje $\mathbf{r} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definisano sa $\mathbf{r}(x,y) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K}$, gde je $K > 0$, je fazi T-metrika u odnosu na množenje.

1. $x, y \in \mathbb{R}^+, K > 0 \Rightarrow 0 < \min\{x,y\} + K \leq \max\{x,y\} \Rightarrow 1 \geq \mathbf{r}(x,y) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K} > 0$.
2. $\mathbf{r}(x,y) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K} = 1 \Leftrightarrow \min\{x,y\}+K = \max\{x,y\}+K \Leftrightarrow \min\{x,y\} = \max\{x,y\} \Leftrightarrow x = y$
3. $\mathbf{r}(x,y) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K} = \frac{\min\{y,x\}+K}{\max\{y,x\}+K} = \mathbf{r}(y,x)$

4. Imamo šest slučajeva: 1) $x \leq y \leq z$, 2) $x \leq z \leq y$, 3) $y \leq x \leq z$, 4) $z \leq y \leq x$, 5) $z \leq x \leq y$, 6) $y \leq z \leq x$, dovoljno je ispitati prva tri jer menjanjem mesta x i z, zbog $\mathbf{r}(x,y) \cdot \mathbf{r}(y,z) \leq \mathbf{r}(x,z) \Leftrightarrow \mathbf{r}(z,y) \cdot \mathbf{r}(y,x) \leq \mathbf{r}(z,x)$ slede ostala tri.

   1) $\mathbf{r}(x,y) \cdot \mathbf{r}(y,z) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K} \cdot \frac{\min\{y,z\}+K}{\max\{y,z\}+K} = \frac{x+K}{y+K} \cdot \frac{y+K}{z+K} = \frac{x+K}{z+K} = \frac{\min\{x,z\}+K}{\max\{x,z\}+K} = \mathbf{r}(x,z)$,

   2) $\mathbf{r}(x,y) \cdot \mathbf{r}(y,z) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K} \cdot \frac{\min\{y,z\}+K}{\max\{y,z\}+K} = \frac{x+K}{y+K} \cdot \frac{z+K}{y+K} \leq \frac{x+K}{z+K} \cdot \frac{z+K}{z+K} = \frac{\min\{x,z\}+K}{\max\{x,z\}+K} = \mathbf{r}(x,z)$,

   3) $\mathbf{r}(x,y) \cdot \mathbf{r}(y,z) = \frac{\min\{x,y\}+K}{\max\{x,y\}+K} \cdot \frac{\min\{y,z\}+K}{\max\{y,z\}+K} = \frac{y+K}{x+K} \cdot \frac{y+K}{z+K} \leq \frac{x+K}{x+K} \cdot \frac{x+K}{z+K} = \frac{\min\{x,z\}+K}{\max\{x,z\}+K} = \mathbf{r}(x,z)$.

Primer 2.2. Ako je (X,d) metrički prostor, tada je preslikavanje $\mathbf{s} : X \times X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definisano sa $\mathbf{s}(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$, fazi T-metrika u odnosu na množenje.

Dokažimo samo 4. osobinu jer se prostale tri dokazuju direktno pomoću osobina standardne metrike.
$\mathbf{s}(x,y,t_1) \cdot \mathbf{s}(y,z,t_2) = \frac{t_1}{t_1+d(x,y)} \cdot \frac{t_2}{t_2+d(y,z)} \leq \frac{t_1+t_2}{t_1+t_2+d(x,z)} = \mathbf{s}(x,z,t_1+t_2)$
$\Leftrightarrow t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2 + t_1 t_2 d(x,z) \leq t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2 + t_2(t_1+t_2)d(x,y) + t_1(t_1+t_2)d(y,z) + (t_1+t_2)d(x,y)d(y,z) \Leftrightarrow t_1 t_2 d(x,z) \leq t_1 t_2(d(x,y)+d(y,z)) + t_2^2 d(x,y) + t_1^2 d(y,z) + (t_1+t_2)d(x,y)d(y,z) \Leftrightarrow \top$.

Teorema 2.1. Neka je $\boldsymbol{m}$ stacionarna fazi $T-$metrika i T njoj odgovarajuća $t-$norma. Ako je T Arhimedova $t-$norma i g njoj odgovarajući opadajući generator, tada je $d = g \circ \boldsymbol{m}$ standardna metrika.

Dokaz 2.1.
1. Kako je g strogo opadajuća, iz $1 \geq \boldsymbol{m}(x,y) > 0$ sledi $0 = g(1) \leq d(x,y) = g(\boldsymbol{m}(x,y)) < g(0)$.

2. Iz striktne monotonosti funkcije g sledi njena injektivnost te je $g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$, a zbog uslova 2. fazi metrike, imamo:
   $d(x,y) = g(\boldsymbol{m}(x,y)) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{m}(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

3. $\boldsymbol{m}(x,y) = \boldsymbol{m}(y,x) \Rightarrow d(x,y) = g(\boldsymbol{m}(x,y)) = g(\boldsymbol{m}(y,x)) = d(y,x)$.

4. Iz uslova 4. definicije fazi $T-$metrike $\boldsymbol{m}$ i Teoreme o reprezentaciji $t-$norme T je $T(\boldsymbol{m}(x,y), \boldsymbol{m}(y,z)) = g^{(-1)}(g(\boldsymbol{m}(x,y)) + g(\boldsymbol{m}(y,z)) \leq \boldsymbol{m}(x,z)$, a kako je g opadajući generator imamo $g(g^{(-1)}(g(\boldsymbol{m}(x,y)) + g(\boldsymbol{m}(y,z))) \geq g(\boldsymbol{m}(x,z))$.

   Lako se pokazuje da je

   $g(g^{(-1)})(a) = a, \ a \in [0, g(0)]$, i $g(g^{(-1)}(a) = g(0), \ a \in [g(0), +\infty]$.

   Dakle, za $g(\boldsymbol{m}(x,y)) + g(\boldsymbol{m}(y,z)) \in [0, g(0)]$ je $g(\boldsymbol{m}(x,y)) + g(\boldsymbol{m}(y,z)) \geq g(\boldsymbol{m}(x,z))$, tj. za d važi nejednakost trougla. U slučaju da je $g(\boldsymbol{m}(x,y)) + g(\boldsymbol{m}(y,z)) > g(0)$, a zbog $0 < \boldsymbol{m}(x,z)$ je $g(0) > g(\boldsymbol{m}(x,z))$, odnosno važi nejednakost trougla.

Teorema 2.2. Ako su $\boldsymbol{m}_1 : X \times X \times]0, +\infty[\to [0,1]$ i $\boldsymbol{m}_2 : X \times X \times]0, +\infty[\to [0,1]$ fazi $T-$metrike, i T je (striktna) triangularna norma, tada je i preslikavanje $T(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2) : X \times X \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definisano sa

$$T(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2)(x, y, \alpha) = T(\boldsymbol{m}_1(x, y, \alpha), \boldsymbol{m}_2(x, y, \alpha))$$

fazi $T-$(pseudo-)metrika.

Dokaz 2.2. Zbog jednostavnijeg zapisa, uvodimo oznake:
$a_1 = \boldsymbol{m}_1(x, y, \alpha), a_2 = \boldsymbol{m}_2(x, y, \alpha), b_1 = \boldsymbol{m}_1(y, z, \beta), b_2 = \boldsymbol{m}_2(y, z, \beta), c_1 = \boldsymbol{m}_1(x, z, \alpha + \beta), c_2 = \boldsymbol{m}_2(x, z, \alpha + \beta)$.

1. Iz osobine 1. za $\boldsymbol{m}_1$ i $\boldsymbol{m}_2$ je $\boldsymbol{m}_1(x, y, \alpha), \boldsymbol{m}_2(x, y, \alpha) \in (0, 1]$, pa kako je T $t-$norma sledi $T(\boldsymbol{m}_1(x, y, \alpha), \boldsymbol{m}_2(x, y, \alpha)) \in [0, 1]$. Ako je T striktna, onda sledi $T(\boldsymbol{m}_1(x, y, \alpha), \boldsymbol{m}_2(x, y, \alpha)) \in (0, 1]$.

2. Za $t-$norme važi $T(a_1, a_2) = 1 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 1$. Zaista $a_1 \leq 1 \Rightarrow 1 = T(a_1, a_2) \leq T(1, a_2) = a_2$ i $a_2 \leq 1 \Rightarrow 1 = T(a_1, a_2) \leq T(a_1, 1) = a_1$, tj. $a_1 = a_2 = 1$. Obrnuto sledi direktno iz aksiome graničnog uslova, tj. $T(a_1, a_2) = T(1, 1) = 1$.

   Iz ove osobine sledi $T(\boldsymbol{m}_1(x, y, \alpha), \boldsymbol{m}_2(x, y, \alpha)) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{m}_1(x, y, \alpha) = \boldsymbol{m}_2(x, y, \alpha)) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

3. Triangularna norma T je dobro definisana, te važi
   $\boldsymbol{m}_1(x, y, \alpha) = \boldsymbol{m}_1(y, x, \alpha) \wedge \boldsymbol{m}_2(x, y, \alpha) = \boldsymbol{m}_2(y, x, \alpha) \Rightarrow$
   $T(\boldsymbol{m}_1(x, y, \alpha), \boldsymbol{m}_2(x, y, \alpha)) = T(\boldsymbol{m}_1(y, x, \alpha), \boldsymbol{m}_2(y, x, \alpha))$.

4. Iz aksiome 4. metrika $\boldsymbol{m}_1$ i $\boldsymbol{m}_2$ imamo

   $$T(a_1, b_1) \leq c_1, \quad T(a_2, b_2) \leq c_2,$$

   pa zbog monotonosti po koordinatama sledi:

   $$T(T(a_1, b_1), T(a_2, b_2)) \leq T(c_1, c_2). \tag{1}$$

   Iz asocijativnosti i komutativnosti od T imamo
   $T(T(a_1, b_1), T(a_2, b_2)) = T(a_1, T(b_1, T(a_2, b_2))) = T(a_1, T(T(b_1, a_2), b_2)) = T(a_1, T(T(a_2, b_1), b_2)) = T(a_1, T(a_2, T(b_1, b_2))) = T(T(a_1, a_2), T(b_1, b_2))$, pa zbog (1) važi

   $$T(T(a_1, a_2), T(b_1, b_2)) \leq T(c_1, c_2).$$

5. Funkcije $\boldsymbol{m}_1(x, y, \_)$ i $\boldsymbol{m}_2(x, y, \_)$ kao i $t-$norma su neprekidne, pa je i $T(\boldsymbol{m}_1(x, y, \_), \boldsymbol{m}_2(x, y, \_))$ neprekidna funkcija.

Teorema 2.3. Ako su $\boldsymbol{r}_i : X_i \times X_i \to (0,1]$ stacionarne fazi $T-$metrike, tada je $\boldsymbol{r} : X^2 \to [0,1]$, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ dato sa

$$\boldsymbol{r}(x,y) = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i(x_i,y_i), \quad x = (x_1,...,x_n),\ y = (y_1,...,y_n),$$

stacionarna fazi $T-$metrika.

Dokaz 2.3.

1. $1 > \boldsymbol{r}_i(x_i,y_i) \geq 0 \Rightarrow 1 > \boldsymbol{r}(x,y) = \prod\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i(x_i,y_i) \geq 0.$

2. $\boldsymbol{r}(x,y) = \prod\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i(x_i,y_i) = 1 \Leftrightarrow (\forall i \in \{1,\ldots,n\})\ \boldsymbol{r}_i(x_i,y_i) = 1 \Leftrightarrow (\forall i \in \{1,\ldots,n\})\ x_i = y_i \Leftrightarrow x = y.$

3. $\boldsymbol{r}(x,y) = \prod\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i(x_i,y_i) = \prod\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i(y_i,x_i) = \boldsymbol{r}(y,x).$

4. Iz 4. aksiome za fazi $T-$metrike $\boldsymbol{r}_i$ je $\boldsymbol{r}_i(x_i,y_i) \cdot \boldsymbol{r}_i(y_i,z_i) \leq \boldsymbol{r}_i(x_i,z_i),\ i \in \{1,...,n\}$, pa je
   $\boldsymbol{r}(x,y) \cdot \boldsymbol{r}(y,z) = \prod\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i(x_i,y_i) \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i(y_i,z_i) =$
   $\prod\limits_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i(x_i,y_i) \cdot \boldsymbol{r}_i(y_i,z_i)) \leq \prod\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i(x_i,z_i) = \boldsymbol{r}(x,z).$

5. Pošto su stacionarne fazi $T-$metrike, kao konstantne funkcije po parametru α neprekidne i njihov proizvod je neprekidna funkcija.

3 Filtriranje slike korišćenjem fazi metrika

U ovom odeljku ćemo razmatrati filtriranje slike u boji, sa komponentama boje crvena, zelena, plava (RGB). Pri filtriranju se koristi prozor, koji se najčešće označava sa W, veličine $n \times n$ gde je n neparan broj. Pikseli u datom prozoru su označeni sa $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{F_i})$, gde je $\boldsymbol{i} = (i_1,i_2) \in I \times I$, $I = \{0,1,...,n-1\}$, vektor sa prostornim koordinatama i_1, i_2 piksela (tačke sa ekrana sa celobrojnim koordinatama), a $\boldsymbol{F_i}$ je trodimenzioni vektor, takav da prva koordinata predstavlja kvantitet crvene boje, druga koordinata kvantitet zelene, a treća predstavlja kvantitet plave boje, tj. imamo da je $\boldsymbol{F_i} = (\boldsymbol{F_i^R}, \boldsymbol{F_i^G}, \boldsymbol{F_i^B})$ ili $\boldsymbol{F_i} = (\boldsymbol{F_i^1}, \boldsymbol{F_i^2}, \boldsymbol{F_i^3})$.

Suština filtriranja slike je u tome da se zameni piksel koji ima šum sa pikselom bez šuma, što se može postići zamenom središnjeg piksela u prozoru W sa pikselom koji je na neki način najbolje reprezentuje preostale piksele iz prozora W, tj. to je piksel koji je najsličniji svim ostalim pikselima iz W po boji i prostornoj udaljenosti.

Od izuzetne je važnosti je izabrati dobar kriterijum za odabir takvog piksela bez šuma, koji će zameniti piksel sa šumom u datom prozoru W, jer dati izbor piksela utiče na kvalitet slike, odnosno na stepen uklonjenog šuma.

U datom kriterijumu izbora će značajnu ulogu odigrati dobar odabir fazi $T-$metrike $\boldsymbol{c}$. Uz pomoć fazi $T-$metrike $\boldsymbol{c}$ ćemo indukovati na skupu svih piksela u prozoru W na određeni način relaciju poretka, koja služi da uporedimo piksele $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{F_i})$ ("pozicija","boja") slike i izaberemo onaj od piksela koji se najmanje razlikuje, tj. najsličniji je svim pikselima u W (sa stanovišta boje i udaljenosti) i njime zamenimo dati središnji piksel u prozoru W.

Definišemo preslikavanje $\boldsymbol{c} : W \times W \to \mathbb{R}$, nad $W = \{(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{F_i}) | \boldsymbol{i} \in I \times I\}$, sa

$$\boldsymbol{c} = T(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}),$$

gde su $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{s}$ fazi $T-$metrike, a T triangularna norma koja odgovara tim metrikama. Da je ono fazi $T-$metrika sledi iz Teoreme 2.2.

Fazi $T-$metrika $\boldsymbol{r}$ je definisana sa

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{F_i},\ \boldsymbol{F_j}) = \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{F_i^1},\ \boldsymbol{F_j^1}) \cdot \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{F_i^2},\ \boldsymbol{F_j^2}) \cdot \boldsymbol{r}_3(\boldsymbol{F_i^3},\ \boldsymbol{F_j^3}),$$

i njom merimo sličnost odgovarajućih boja (jednakost kvantiteta boja) između dva piksela $\boldsymbol{F_i}$ i $\boldsymbol{F_j}$, odnosno sličnost $k-$te boje ($k = 1, 2, 3$) merimo fazi $T-$metrikom $\boldsymbol{r}_k$. Da je $\boldsymbol{r}$ fazi $T-$metrika sledi iz Teoreme 2.3.

Fazi $T-$metrikom $\boldsymbol{s}$ se meri prostorna udaljenost piksela $\boldsymbol{i}$ i $\boldsymbol{j}$. U njoj figuriše parametar t koji utiče na osetljivost $\boldsymbol{s}$ fazi $T-$metrike.

U radu [4] je korišćen specijalan slučaj fazi $t-$metrike $\boldsymbol{c}$. Umesto proizvoljne $t-$norme, uzeto je uobičajeno definisana operacija množenja, odnosno fazi $T-$metrika $\boldsymbol{c}$ je definisana sa:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{F_i},\ \boldsymbol{F_j}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{F_i},\ \boldsymbol{F_j}) \cdot \boldsymbol{s}(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}).$$

Fazi $T-$metrike $\boldsymbol{r}_k$, $k = 1, 2, 3$. su kao u Primeru 2.1, a fazi $T-$metrika $\boldsymbol{s}$ je kao u Primeru 2.2, gde je za d uzeta euklidska metrika. Definisanjem fazi $T-$metrike $\boldsymbol{c}$, stvoren je još jedan metod za filtriranje slike u boji, pored već od ranije poznatog filtriranja pomoću medijane (Vector median filter) koji pruža prilično uspešne rezultate jer uzima u obzir istovremeno kriterijum sličnosti boja i prostornu udaljenost.

4 Zahvalnica

Prvi autor zahvaljuje Ministarstvu prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije za finansijsku podršku ovom radu u okviru projekta "Matematički modeli nelinearnosti, neodređenosti i odlučivanja" ON174009.

Literatura

[1] Rosenfeld, Azriel, *Distances between fuzzy sets*, *Center for Automation Research, University of Maryland, College Park, MD 20742, USA*, Pattern Recognition Letters 3 (1985) 229-233 North-Holland

[2] Chaudhuri, B.B., Rosenfeld, A., *On a metric distance between fuzzy sets*, *Computer Vision and Pattern Recognition Unit, Indian Statistical Institute, 203 B. T. Road, Calcutta 700 035, India*, Pattern Recognition Letters 17 (1996) 1157-1160

[3] Bloch, Isabelle, *On fuzzy distances and their use in image processing under imprecision*, *Ecole Nationale Superieure des Telecomunications, Department TSI-CNRS URA 820-46 rue Barrault, 75013 Paris, France*, Pattern Recognition 32 (1999) 1873-1895

[4] Gregori Valentín, Samuel Morillas, Almanzor Sapena, *Examples of fuzzy metrics and applications*, Fuzzy sets and systems 170 (2011) 95-111

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Istorijski razvoj Ontološkog dokaza – filozofski i matematički aspekti

Vladimir Drekalović
Univerzitet Crne Gore, Filozofski fakultet
v.drekalovic@yahoo.com

Stručni rad

Apstrakt

Tema Božijeg postojanja je uvijek zanimala filozofe, teologe i naučnike. Grubo govoreći, postoje dva pristupa ovom pitanju. Jedan je teološki, i zasnovan je na jevanđeljima. Drugi je naučni, i on je oslonjen na razum. Čini se da ta dva pristupa, istorijski, imaju odvojene puteve. Ipak, slučaj Ontološkog dokaza pokazuje da, u jednu ruku, vjera i nauka, i u drugu, filozofija i matematika, imaju mnoge zajedničke tačke. Ideja egzaktnog dokaza Božijeg postojanja je razvijena pod okriljem teologije i filozofije. Od skora, skup zvaničnih podržavalaca ove ideje je dobio novog člana – matematiku.

1 Značaj

Ontološki dokaz je prvi značajniji, racionalno orjentisan, logičko-teološki pokušaj da se nešto više kaže o postojanju Boga. Njegov značaj možemo posmatrati iz tri ugla:

1. To je jedno od rijetkih mjesta u nauci na kojem se spajaju, sa jedne strane analitička i kontinentalna filozofija, a sa druge, matematika, filozofija i teologija. Naime, sa jedne strane, tema o postojanju Boga je prije svega tema kojom se bavila kontinentalna filozofija. Ontološki dokaz je svojim logičkim karakterom, a u vezi sa pitanjema o Bogu, otvorio vrata i za analitičku folozofiju. Sa druge strane, pojam Boga je, prije svega, pojam teologije i filozofije, ali je ontološki dokaz pokazao da bez matematike to pitanje ne može biti precizno reazmotreno.

2. Ontološki dokaz je pokazao jedan novi, netipičan teološki pristup. Pitanje o postojanju Boga se ne argymentuje putem Biblije, vjere, ili empirijskih dokaza. Dokaz je čisto logički, bez pitanja o početku ili čulnoj evidenciji. To je ujedno i prvi značajniji pokušaj da se od strane zvaničnog predstavnika crkve-sveštenika nešto više, racionalnim sredstvima, kaže o Bogu. Ontološkim dokazom je najjasnije pokazana racionalna strana teizma koja je mogla da se iskoristi u borbi sa nevjernicima. Ontološki dokaz je jako sredstvo za borbu protiv empirijskog ateizma, ali i emprijskog teizma. Naime, u istoriji religije, takođe su postojali dokazi koji su dodatno snažili vjeru ljudi

u Božije postojanje, ali su oni bili njačešće empirijskog karaktera (na primjer, Hristosove moći opisane u Novom zavjetu). U tom smislu, Ontološki dokaz je sasvim čist od bilo kakvih empirijskih dodataka.

3. Dokaz je svojim razvojem, kroz istoriju, odličan primjer Hilbertove ideje o tome kako nastaje formalna teorija. Prvo postoji nedovoljno precizna, neformalna ideja koja se zatim konkretnom aksiomatizacijom formalizuje. Najčešće, šira matematička zajednica je uskrćena za uvid u neformalnu pozadinu koja stoji iza već izgrađene formalne teorije. U slučaju Ontološkog dokaza koji je formalizovan u 20. vijeku stvari ne stoje tako.

2 Proslogion (lat. Proslogium; eng. Discourse on the Existence of God)

Danas se smatra da je prvu eksplicitnu formu Ontološkog dokaza dao Anselm, katolički sveštenik 11. vijeka, kasnije kanonizovan kao svetac, u svom kratkom tekstu *Proslogion.* Sadržaj koji se odnosi na dokaz se nalazi u 2. i 3. glavi tog teksta, i u stručnim krugovima još uvijek ne postoji jedinstven stav o tome da li se, u stvari, radi o dvije varijante dokaza (vidi [5] i [8]), ili je sadržaj 3. glave tek dopuna sadržaju 2. glave(vidi [2] i [9]). Prva verzija glasi:

... ima smisla reći da, barem, može da se shvati da postoji nešto od čega ništa veće ne može biti zamišljeno ... I bilo šta da je shvaćeno, ono postoji u shvatanju. I sigurno je da, ono od čega ništa veće ne može biti shvaćeno, ne može postojati samo u shvatanju. Jer, pretpostavimo li da ono postoji samo u shvatanju: onda je veće to što je isto, ali koje još postoji u realnosti. Dakle, ako to, od čega ništa veće ne može biti zamišljeno, postoji samo u shvatanju, izuzetno biće, od koga ništa veće ne može biti zamišljeno, je ono, od koga veće može biti zamišljeno. Zato, bez sumnje da postoji biće, od koga ništa veće ne može biti zamišljeno, i ono postoji i u shvatanju i u realnosti. (vidi str. 8 u [1])

U 3. glavi nailazimo na pasus koji se u literaturi često zove i *modalnom verzijom* dokaza:

... **moguće je** zamisliti biće koje ne može biti zamišljeno kao nepostojeće; i ono je veće od onog koje može biti zamišljeno kao nepostojeće. Zato, ako to, od čega ništa veće ne može biti zamišljeno, može biti zamišljeno kao nepostojeće, ono onda nije to, od čega ništa veće ne može biti zamišljeno. Ali ovo je nepomirljiva protivrječnost. Postoji, onda, zaista, biće od kojeg ništa veće ne može biti zamišljeno da postoji, tako da ono čak **ne može** biti ni zamišljeno **da ne** postoji. (vidi str. 8 i 9 u [1])

Postoje različita tumačenja ovih pasusa. Navedimo jedno:

1. "Bog" znači "to od čega ništa veće ne može biti zamišljeno".

2. Ideja Boga nije protivrječna.

3. To koje može biti mišljeno kao nepostojeće (slučajno biće) nije veliko kao to koje ne može biti mišljeno kao nepostojeće (nužno biće).

4. Dakle, misliti o Bogu kao o, moguće, nepostojećem (slučajnom) biću ne znači misliti o najvećem biću koje se može zamisliti. Protivrječno je misliti o najvećem biću koje se može zamisliti kao o nepostojećem.

5. Dakle, Bog postoji. (vidi str. 14 u [4])

Čini se da je smisao oba citata iz *Proslogion* – a približan, i da je modalnost (mogućnost, nužnost) u nekom obliku prisutna u oba pasusa, samo je u drugom možda eksplicitnije izražena. Ipak, može se reći da je u prvoj verziji uočeno da je ono što postoji u realnosti kao i u mišljenju veće od onoga što postoji samo u mišljenju, dok je u drugoj akcenat na tome da je to, čije nepostojanje ne može biti zamišljeno, veće od toga čije nepostojanje može biti zamišljeno. Prvom verzijom se postojanje uzima kao neka pozitivna osobina koju, onda, mora posjedovati biće za koje smatramo da veće od njega ne možemo zamisliti. Drugom verzijom se ne pravi poređenje između nečega što postoji i nečega što postoji, već prije između dva entiteta koji postoje na dva načina-nužno i slučajno (moguće).

3 Racionalizam

U Dekartovim *Meditacijama* (posebno u 3. i 5.) postoji nekoliko mjesta na kojima se, između ostalog, govori i o Božijem postojanju. Prema njemu, naše sopstveno mišljenje kao dokaz nesumnjivosti vlastitog postojanja, je oblik samo-afirmacije što je, u stvari, Božija distinktivna osobina. Ovog afiniteta postajemo svjesni baveći se najjasnijom idejom: idejom *savršenog bića* (vidi str. 168 u [3]). Postojanje je suprotnost nepostojnju, predikat ili kvalitet bez čijeg se prisustva ne može govoriti o savršenom biću. Ako Bog postoji, i ako je njegovo postojanje slučajno, onda on ne bi bio savršeno biće, i zato ne bi bio Bog. Slučajnost postojanja je ograničenje. S druge strane, Dekart dozvoljava da ne postoji nužnost našeg mišljenja o Bogu, čak i ako nužno pridajemo Bogu sva savršenstva, posebno nužno postojanje. Slično, nije nužno da mislimo o trouglu, ali kada to činimo moramo mu pridati, na primjer, trostranost.

Postoji jedna značajna sličnost između Dekarta i Gedela. Naime, Dekart za razliku od ovog drugog, umjesto termina *pozitivna osobina* koji uoptrebljava Gedel, koristi termin *perfekcija*, ali je glavni argument koji se koristi u *Petoj Meditaciji* osnova za kasniju Gedelovu formalizaciju: a) Bog je subjekat svih perfekcija; i b) postojanje je pefekcija. (vidi str. 116 u [10])

Lajbnicov najbitniji doprinos u vezi sa Ontološkim dokazom je isticanje značaja premise o mogućnosti Božijeg postojanja. Kada je jednom slučajnost Božijeg postojanja elimisana (prema Anselmu to ne može biti osobina bića od kojeg nema većeg), ostaju nam dvije alternative: ili je Božije postojanje nemoguće, ili je nužno. Zato, ako je Božije postojanje moguće, onda je ono i nužno. To je razlog zbog kojeg posebnu pažnju moramo posvetiti mogućnosti Božijeg postojnja.

Pitanje Božijeg postojanja Lajbnic razjašnjava u tri koraka:

1. Pod *perfekciojm* ja podrazumijevam svaki prosti kvalitet koji je pozitivan i apsolutan, ili koji opisuje bilo šta bez ikakvih ograničenja. Pošto je ovakav kvalitet prost, njega nije moguće dalje analizirati ili definisati, jer inače to ne bi bio prost kvalitet nego agregat više njih.

2. Iz prethodnog slijedi da su sve perfekcije saglasne jedna sa drugom, to jest, mogu se pojaviti u istom subjektu. Naime, da bi smo dokazali eventualnu nesaglasnost A i V, gdje su A i V perfekcije, morali bismo analizirati ili A, ili V, ili oboje. Ali pošto se po pretpostavci oni ne mogu dalje analizirati, to se ni njihova nesaglasnost ne može pokazati. Otuda tvrđenje вЂћA i V su nesaglasne“ nije nužno tačno, to jest, moguće je da je natačno, a to znači da se A i V mogu pojaviti u istom subjektu.

3. Dakle, postoji, ili može biti zamišljen subjekat svih perfekcija ili najsavršenije biće. Otuda je jasno da ovo biće postoji, jer je postojanje jedna od perfekcija. (vidi str. 167-168 u [7])

4 Gedel

Po Gedelovom sopstvenom priznanju (vidi str. 113 u [10]), Lajbnic nije uticao na njegov rad, osim u slučaju Ontološkog dokaza. Gedel je napravio konkretnu aksiomatizaciju i dokazao implikaciju koju je neformalno u vidu imao i Lajbnic: ako je Božije postojanje moguće, onda je ono i nužno. Postoji više interpretacija Gedelovog dokaza koji je Дsačuvan u izvornoj bilješci datiranoj na 10.2.1970. (Posebnu zahvalnost dugujem K. Došenu i S. Vujoševiću uz čiju pomoć sam dobio bilješku). Iznesimo jednu:

A1 Konjunkcija dvije (pa i proizvoljnog broja) pozitivne osobine je pozitivna osobina.

A2 Osobina je pozitivna akko njena negacija nije pozitivna; svaka osobina ili (ekskluzivno) njena negacija je pozitivna.

D1 Objekat x je Bog, tj. $G(x)$, akko posjeduje sve pozitivna osobine; to jest, za svaku osobinu A, ako je $R(A)$ onda je $A(x)$.

D2 Osobina A je esencija objekta x, akko

1. $A(x)$;
2. Za svaku osobinu V objekta x, svaki objekat u koji ima osobinu A mora imati i osobinu V takođe.

A3 Ako je osobina pozitivna (ili nije pozitivna), onda je ona nužno pozitivna (ili nužno nije pozitivna). To slijedi iz prirode osobine.

T1 Ako je $G(x)$, onda je osobina G esencija objekta x.

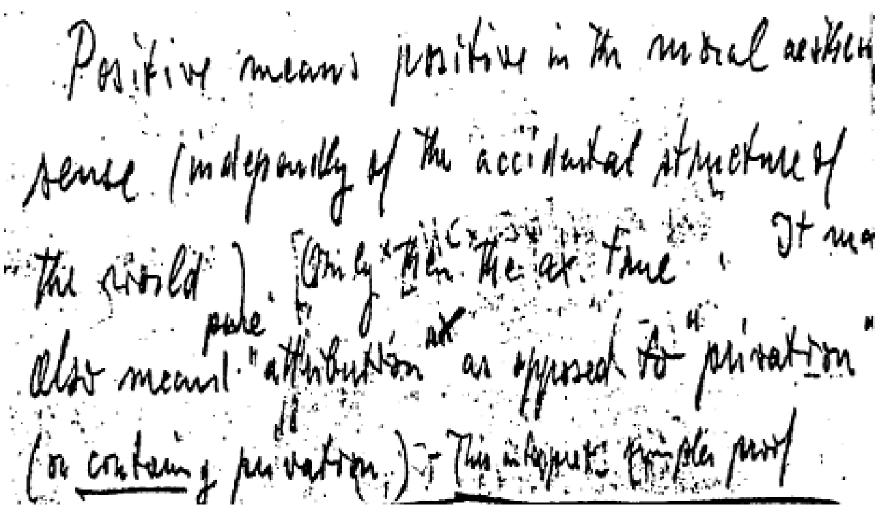
D3 $E(x)$ akko za svaku esenciju A objekta x, postoji nužno neki objekat koji ima osobinu A, to jest, objekat nužno postoji ako je svaka njegova esencija nužno egzemplifiokvana.

A4 $R(E)$, to jest, osobina nužnog postojnja je pozitivna osobina.

T2 Ako je $G(x)$, onda nužno postoji neki objekat u, takav da je G(u).

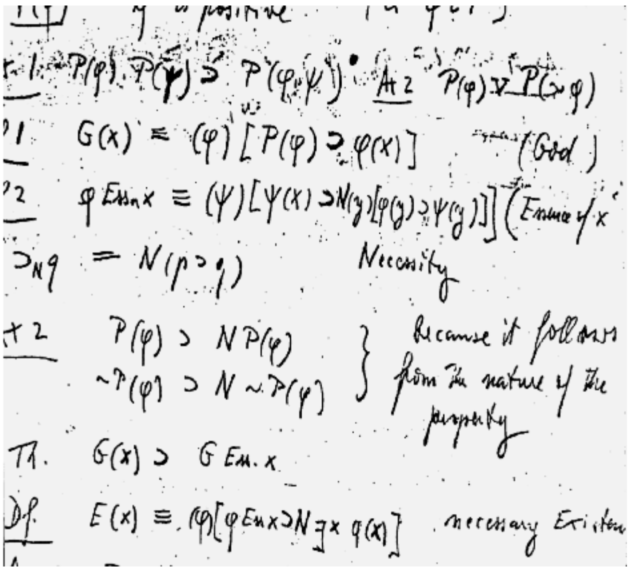
T3 Ako je moguće da postoji objekat x, tako da je $G(x)$, onda je nužno da postoji objekat x, tako da je $G(x)$.

Treba napomenuti da Gedel koristi pojam pozitivne osobine kao primitivan. To mu omogućuje da na elegantan način definiše pojam Boga (D1) kao bića koje posjeduje sve pozitivne osobine. Ipak, čini se da on osjeća potrebu da dodatno opiše taj pojam iako formalno, s obzirom na status pojma u aksiomatizaciji, na to nije obavezan. Autor aksiomatizacije, uopšte, rijetko dodatno objašnjava značenje primitivnih termina. Sada to nije slučaj. Gedel kao da je osjetio da je značenje čitavog dokaza u dobroj mjeri oslonjeno na značenje tog primitivnog termina. Na drugoj strani svoje bilješke on kaže da *pozitivno* znači pozitivno u moralnom (i) estetskom smislu, nezavisno od slučajne strukture svijeta, i da to takođe može značiti čistu atribuciju (predikaciju, pripisivanje). Tu pozitivnost, kao nezavisnost od slučajnosti on suprotstavlja nečemu što u bilješci koja je pisana na engleskom jeziku označava sa *privation*, za što nisam u stanju da nađem odgovorajući prevod niti značenje:


Positive means positive in the moral aesthetic sense (independently of the accidental structure of the world). Only then the ax. true. It may also mean pure "attribution" as opposed to "privation" (or containing privation). This interpret. simpler proof

Citirani pasus podstiče na nova, filozofska pitanja. Kako shvatiti fraze "moralni (i) estetski smisao" ili "čista atribucija", i kako shvatiti čemu je takva atribucija suprotstavljena? Pozitivnost na razumljiv način i bez velikih prepreka, možemo posmatrati u smislu vrednovanja sa odgovarajućeg moralnog aspekta. Naime, istorijski gledano, svaki moralni sistem je sa sobom nosio i sredstvo za vrednovanje, prihvatanje ili odbacivanje, većine postupaka koje ljudi u okviru konkretne zajednice čine. Slično, mada nešto manje eksplicitno, stvari stoje i sa estetskim vrednovanjem kroz istoriju ljudskog roda. Međutim, napomena koja u pasusu zatim slijedi – da to može značiti *čistu* atribuciju – baca novo svjetlo na sve. Ova Gedelova terminologija direktno podsjeća na često korištenu filozofsku frazu "po sebi", kada se, na primjer, govori o odgovarajućim pojmovima ili entitetima "po sebi" kao suprotnost, onome što su oni u pojavnoj realnosti. Na primjer, govori se o *dobru* po sebi, ili *znanju* po sebi, itd. Ovakvo tumačenje se svakako slaže i sa napomenom iz pasusa da se radi o nečemu što je nezavisno od slučajne strukture svijeta. Ideja o objektima *po sebi,* u dobroj mjeri, ima svoje izvore u Platonovom učenju za kojeg je svijet objekata *po sebi*, svijet originala, formi i prauzora svijeta u kojem živimo. Ako ovako protumačimo Gedelov pasus, to jest, prihvatimo da je pozitivnost shvaćena kao objekat svijeta ideja, a usput se prisjetimo da o tom svijetu ni Platon nije dao previše datalja, onda mnogo više ne možemo očekivati ni od Gedela.

Pojam pozitivnosti dobija dodatno na značaju zbog aksiome u kojoj je primjenjeno pravilo necesitacije:



Kako se vidi, u jednoj od aksioma je naznačeno da iz pozitivnosti neke osobine slijedi njena nužna pozitivnost, kako je dalje komentarisano u bilješci, što slijedi zbog prirode (pozitivne) osobine. Na ovom mjestu ne smijemo zaboraviti da govorimo o aksiomama čiju istinitost ne možemo preispitivati nikakvim empirijskim ili formalnim razlozima, a pogotovo ne praznim spekulacijama. Ipak, Gedelov komentar nakon te aksiome pokazuje njegovu potrebu da aksiomu barem u nekoj mjeri intuitivno opravda. Operator nužnosti koji se pojavljuje u aksomi, se u okviru modalne logike uvodi kao nedefinisan operator, međutim, u literaturi (vidi [6]) postoje mjesta gdje se on, intuitivno, uvodi uz pomoć pojma tzv. "mogućih svjetova“ koji u vrijeme Gedelovog pisanja dokaza nije bio dovoljno analiziran. Sve ovo, kao i Gedelova sintagma *nezavisno od slučajne strukture svijeta* upućuje nas na to da pitanje pozitivnosti osobina kao i njihov odnos sa nužnošću, možda, treba ispitivati u svjetlu teorije o mogućim svjetovima, a ne u odnosu na platonizam.

Gedelov Ontološki dokaz je, istorijski gledano, rijedak primjer formalizacije intuitivne predstave koja se kroz literaturu dugo razvijala i tako postalo opštedostupna. Najčešće, formalizacije teorija su date kao aksiomatizacije o čijoj intuitivnoj pozadini ili istoriji čitaoci ili učesnici u njihovoj deduktivnoj izgradnji ne znaju mnogo. Ovaj put je situacija sasvim drugačija. Ideja na osnovu koje je aksiomatizacija stvorena je poznata svima. U takvoj situaciji očekivana su dva pitanja. Da li je ovo najprirodnija aksiomatizacija, to jest, da li je ona mogla biti izvedena sa drugačijim aksiomama, definicijama i primitivnim terminima? Šta, u stvari, znače pojmovi, čak i nedefinisani, koji se u njoj pojavljuju?

Prvo pitanje se pojavljuje i u slučaju aksiomatizacija čija je intutivno-istorijska pozadina mnogo skromnija, ili je javno nepoznata. Ipak, postoji razlika. Tada se pitanje o alternativnoj aksiomatizaciji javlja, ne u odnosu na već postojeću intuitivnu predstavu, jer je ona nejčešće i nepoznata, već kao eventualna mogućnost da se drugačijom aksiomatizacijom deduktivno zasnuje teorija koja je prvom aksiomatizacijom već izgrađena. Sa druge strane, u slučaju takve aksiomatizacije, odgovor na drugo pitanje nije obavezujući za onoga koji izgrađuje teoriju. Tradicionalno i formalno, o pojmovima sve govore aksiome, definicije i teoreme. Primitivni termini i nose takvo ime, jer ne obavezuju na dodatno objašnjenje. Ovo govori koliko je složena i specifična Gedelova aksiomatizacija Ontološkog dokaza, u odnosu na uobičajene aksiomatizacije. U istoriji matematike, to je smio i netipičan postupak, u istoj mjeri u kojoj je u istoriji teologije prije devet vijekova to bio Anselmov dokaz.

Literatura

[1] Anselm, St., *Basic Writings*, Illinois, Open Court, 1982.

[2] Brecher, R., *Anselm's Argument: The Logic of Divine Existence*, Aldershot, UK: Gower, 1985.

[3] Collins, J., *A History of Modern Philosophy*, Milwaukee, Bruce Publishing, 1954.

[4] Dombrowski, A. D., *Rethinking the Ontological Argument*, New York, Cambridge University Press, 2006.

[5] Hartshorne, C., *The Formal Validity and Real Significance of the Ontological Argument*, Philosophical Review 53, 1944, 225-245.

[6] Kripke, A. S., *Naming and Necessity*, Cambridge, Harvard University Press, 2001.

[7] Leibniz, W. G., *Philosophical Papers and Letters*, Dordrecht, Reidel, 1969.

[8] Oppy, G., *Makin on the Ontological Argument*, Philosophy 66, 1991, 106-114.

[9] Stearns, J. B., *Anselm and the Two-Argument Hypothesis*, Monist 54, 1970, 221-233.

[10] Wang, H., *A Logical Journey, From Gödel to Philosophy*, Cambridge, The MIT Press, 1996.

FOURTH MATHEMATICAL CONFERENCE OF THE REPUBLIC OF SRPSKA
Trebinje, 6 and 7 June 2014

Inverse Spectral Problems for Variable Order Differential Operators on Spatial Networks

Vjacheslav Yurko
Department of Mathematics, Saratov State University, Rissia
yurkova@info.sgu.ru

Review paper

Abstract

We study inverse spectral problems for ordinary differential equations on compact star-type graphs when differential equations have different orders on diferent edges. As the main spectral characteristics we introduce and study the so-called Weyl-type matrices which are generalizations of the Weyl function for the classical Sturm-Liouville operator. We provide a procedure for constructing the solution of the inverse problem and prove its uniqueness.

Key words: geometrical graphs, differential operators, inverse spectral problems

1 Introduction

We study inverse spectral problems for ordinary differential equations of variable orders on compact star-type graphs. More precisely, differential equations have different orders on diferent edges. Boundary value problems on graphs (spatial networks, trees) often appear in natural sciences and engineering (see [1]). Differential equations of variable orders on graphs arise in various problems in mathematics as well as in applications. In particular, we mention transverse oscillation problems for such structures as cable-stayed bridges, masts with cable supports and others.

Inverse spectral problems consist in recovering operators from their spectral characteristics. For *second-order* differential operators on compact graphs inverse spectral problems have been studied fairly completely in [2]-[5] and other works. Inverse problems for *higher-order* differential operators on graphs were investigated in [6]. We note that inverse spectral problems for second-order and for higher-order ordinary differential operators on *an interval* (finite or infinite) have been studied by many authors (see [7]-[8] and the references therein).

In [9] the inverse spectral problem is considered for a very particular case of variable order differential equations on star-type graphs, when there are only two differential equations with different orders. In this paper we study the general case of variable order differential equations on star-type graphs. More precisely, all edges are divided into m groups in each of which differential equations have different orders. Moreover, we consider general matching conditions in the interior vertex. This general case produces new qualitative difficulties related to the formulation and the solution of the inverse problem.

As the main spectral characteristics in this paper we introduce and study the so-called Weyl-type matrices which are generalizations of the Weyl function for the classical Sturm-Liouville operator (see [7]), of the Weyl matrix for higher-order differential operators on an interval introduced in [8], and generalizations of the Weyl-type matrices for higher-order differential operators on graphs [6]. We show that the specification of the Weyl-type matrices uniquely determines the coefficients of the differential equation on the graph, and we provide a constructive procedure for the solution of the inverse problem from the given Weyl-type matrices. For studying this inverse problem we develope the ideas of the method of spectral mappings [8]. The obtained results are natural generalizations of the well-known results on inverse problems for differential operators on an interval and on graphs, and in particular, generalizations of the results from [9].

2 Formulation of the inverse problem

Consider a compact star-type graph T in $\mathbf{R}^\omega$ with the set of vertices $V = \{v_0, \ldots, v_p\}$ and the set of edges $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_p\}$, where $v_1, \ldots, v_p$ are the boundary vertices, v_0 is the internal vertex, and $e_j = [v_j, v_0]$, $e_1 \cap \ldots \cap e_p = \{v_0\}$. Let l_j be the length of the edge e_j. Each edge $e_j \in \mathcal{E}$ is parameterized by the parameter $x_j \in [0, l_j]$ such that $x_j = 0$ corresponds to the boundary vertices $v_1, \ldots, v_p$, and $x_j = l_j$ corresponds to the internal vertex v_0. An integrable function Y on T may be represented as $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,p}}$, where the function $y_j(x_j)$ is defined on the edge e_j.

Fix $m = \overline{1,p}$. Let n_i, p_i, $i = \overline{1,m}$, be positive integers such that

$$n_1 > n_2 > \ldots > n_m > 1, \quad 0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_{m-1} < p_m := p,$$

and put $n_{m+1} := 1$, $p_0 := 0$. Consider the differential equations on T:

$$y_j^{(n_i)}(x_j) + \sum_{\mu=0}^{n_i-2} q_{\mu j}(x_j) y_j^{(\mu)}(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in (0, l_j),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{p_{i-1}+1, p_i}, \tag{1}$$

where $q_{\mu j}(x_j)$ are complex-valued integrable functions. Thus, the differential equations have order n_i on the edges e_j, $j = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$. We call $q_j = \{q_{\mu j}\}$ the potential on the edge e_j, and we call $q = \{q_j\}_{j=\overline{1,p}}$ the potential on the graph T. Denote $\mu_i = p_i - p_{i-1}$, $i = \overline{1,m}$.

Fix $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$. Let $C_{kj}(x_j, \lambda)$, $k = \overline{1, n_i}$, be the solutions of equation (1) on the edge e_j under the initial conditions $C_{kj}^{(\mu-1)}(0, \lambda) = \delta_{k\mu}$, $k, \mu = \overline{1, n_i}$. Here and in the sequel, $\delta_{k\mu}$ is the Kronecker symbol. Consider the linear forms

$$U_{j\nu}(y_j) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \gamma_{j\nu\mu} y_j^{(\mu)}(l_j), \quad j = \overline{1,p},$$

where $\gamma_{j\nu\mu}$ are complex numbers, $\gamma_{j\nu} := \gamma_{j\nu\nu} \neq 0$, $\nu = \overline{0, n_i - 1}$ for $j = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$. The linear forms $U_{j\nu}$ will be used in matching conditions at the internal vertex v_0 for boundary value problems and for the correspondung special solutions of equation (1).

Denote $\langle n \rangle := (|n| + n)/2$, i.e. $\langle n \rangle = n$ for $n \geq 0$, and $\langle n \rangle = 0$ for $n \leq 0$. Fix $i = \overline{1, m}$; $s = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$; $\xi = \overline{i, m}$; $k = \overline{n_{\xi+1}, n_\xi - 1}$; $\mu = \overline{k, n_i}$. Let $L_{sk\mu}$ be the boundary value problem for equation (1) on the graph T with the boundary conditions

$$y_s(0) = \ldots = y_s^{(k-2)}(0) = y_s^{(\mu-1)}(0) = 0, \tag{2}$$

$$y_j^{(r)}(0) = 0, \quad r = \overline{0, \langle n_l - k - 1 \rangle};\ l = \overline{1, m},\ j = \overline{p_{l-1}+1, p_l},\ j \neq s, \tag{3}$$

and the matching conditions

$$U_{p_l,\nu}(y_{p_l}) = U_{j\nu}(y_j),\ l = \overline{\xi, m},\ j = \overline{1, p_l - 1},\ \nu = \overline{n_{l+1} - 1, \min(k-1, n_l - 2)}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{p_\xi} U_{j\nu}(y_j) = 0,\ \nu = \overline{k, n_\xi - 1}; \quad \sum_{j=1}^{p_l} U_{j\nu}(y_j) = 0,\ l = \xi - 1, \ldots, i,\ \nu = \overline{n_{l+1}, n_l - 1}. \tag{5}$$

Note that the number of conditions in (2)-(5) is $n_1\mu_1 + \cdots + n_m\mu_m$. Matching conditions (4)-(5) are generalizations of classical matching conditions for Sturm-Liouville operators on graphs [3-5], matching conditions for higher-order differential operators on graphs [6], and matching conditions for variable order differential operators on graphs [9].

Fix $i = \overline{1, m}$, $s = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$, $k = \overline{1, n_i - 1}$. We introduce the solutions $\Psi_{sk} = \{\psi_{skj}\}_{j=\overline{1,p}}$ of equation (1) on the graph T as follows. Let $\xi = \overline{i, m}$; $k = \overline{n_{\xi+1}, n_\xi - 1}$. Then Ψ_{sk} satisfies the boundary conditions

$$\psi_{sks}^{(\eta-1)}(0) = \delta_{k\eta}, \quad \eta = \overline{1, k}, \tag{6}$$

$$\psi_{skj}^{(r)}(0) = 0, \quad r = \overline{0, \langle n_l - k - 1 \rangle};\ l = \overline{1, m},\ j = \overline{p_{l-1}+1, p_l},\ j \neq s, \tag{7}$$

and the matching conditions at the vertex v_0:

$$U_{p_l,\nu}(\psi_{sk,p_l}) = U_{j\nu}(\psi_{skj}),\ l = \overline{\xi, m},\ j = \overline{1, p_l - 1},\ \nu = \overline{n_{l+1} - 1, \min(k-1, n_l - 2)}, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{p_\xi} U_{j\nu}(\psi_{skj}) = 0,\ \nu = \overline{k, n_\xi - 1}; \quad \sum_{j=1}^{p_l} U_{j\nu}(\psi_{skj}) = 0,\ l = \xi - 1, \ldots, i,\ \nu = \overline{n_{l+1}, n_l - 1}. \tag{9}$$

The function Ψ_{sk} is called the Weyl-type solution of order k with respect to the boundary vertex v_s. Define additionally $\psi_{sn_is}(x_s, \lambda) := C_{n_is}(x_s, \lambda)$.

We introduce the matrices $M_s(\lambda)$, $s = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$, $i = \overline{1, m}$, as follows:

$$M_s(\lambda) = [M_{sk\mu}(\lambda)]_{k,\mu=\overline{1,n_i}}, \quad M_{sk\mu}(\lambda) := \psi_{sks}^{(\mu-1)}(0, \lambda).$$

It follows from the definition of Ψ_{sk} that $M_{sk\mu}(\lambda) = \delta_{k\mu}$ for $k \geq \mu$. The matrix $M_s(\lambda)$ is called the Weyl-type matrix with respect to the boundary vertex v_s. The inverse problem is formulated as follows. Fix $N = \overline{1,m}$.

Inverse problem 1. Given $\{M_s(\lambda)\}$, $s = \overline{1,p} \setminus p_N$, construct q on T.

We note that in Inverse problem 1 we do not need to specify all matrices $M_s(\lambda)$, $s = \overline{1,p}$; one of them can be omitted. This last fact was first noticed in [3], where the inverse problem was solved for the Sturm-Liouville operators on an arbitrary tree.

Let us briefly explain the main ideas for constructing the solution of Inverse problem 1. On the first step, we solve auxiliary inverse problems (see Section 3) for each fixed $s = \overline{1,p} \setminus p_N$, and find the potential q_s on the edge e_s from the given $M_s(\lambda)$. For this purpose we develope the ideas of the method of spectral mappings [8]. On the second step, using information on q_s, $s = \overline{1,p} \setminus p_N$, we construct the classical Weyl-type matrix $m_{p_N}(\lambda)$ related to the edge e_{p_N}. The last step is the classical one: we construct the potential q_{p_N} on the edge e_{p_N} from the given $m_{p_N}(\lambda)$ (this procedure was first described in [8]).

3 Auxiliary inverse problems.

Fix $i = \overline{1,m}$, $s = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$. It follows from the boundary conditions (6) for the Weyl-type solutions that

$$\psi_{sks}(x_s, \lambda) = C_{ks}(x_s, \lambda) + \sum_{\mu=k+1}^{n_i} M_{sk\mu}(\lambda) C_{\mu s}(x_s, \lambda), \quad k = \overline{1, n_i}. \tag{10}$$

Using the fundamental system of solutions $\{C_{\mu j}(x_j, \lambda)\}$ on the edge e_j, one can write

$$\psi_{skj}(x_j, \lambda) = \sum_{\mu=1}^{n_l} M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}(x_j, \lambda),\ j = \overline{p_{l-1}+1, p_l},\ l = \overline{1,m},\ k = \overline{1, n_i - 1}, \tag{11}$$

where the coefficients $M_{skj\mu}(\lambda)$ do not depend on x_j. In particular, $M_{sks\mu}(\lambda) = M_{sk\mu}(\lambda)$. Substituting (11) into boundary and matching conditions (6)-(9) for the Weyl-type solutions Ψ_{sk}, we obtain a linear algebraic system $D^1_{sk}(\lambda)$ with respect to $M_{skj\mu}(\lambda)$. Solving this system by Cramer's rule one gets $M_{skj\mu}(\lambda) = \Delta_{skj\mu}(\lambda)/\Delta_{sk}(\lambda)$, where the functions $\Delta_{skj\mu}(\lambda)$ and $\Delta_{sk}(\lambda)$ are entire in λ. In particular,

$$M_{sk\mu}(\lambda) = \Delta_{sk\mu}(\lambda)/\Delta_{sk}(\lambda), \quad k < \mu, \tag{12}$$

where $\Delta_{sk\mu}(\lambda) := \Delta_{sks\mu}(\lambda)$. The function $\Delta_{sk\mu}(\lambda)$, $k \leq \mu$ ($\Delta_{skk}(\lambda) := \Delta_{sk}(\lambda)$) is the characteristic function for the boundary value problem $L_{sk\mu}$, and its zeros coincide with the eigenvalues of $L_{sk\mu}$. By virtue of (12), the functions $M_{skj\mu}(\lambda)$ are meromorphic in λ,

Fix $s = \overline{1,p}$, and consider the following inverse problem on the edge e_s.

Inverse problem 2. Given the Weyl-type matrix M_s, construct the potential q_s on the edge e_s.

In this inverse problem we construct the potential only on the edge e_s, but the Weyl-type matrix M_s brings a global information from the whole graph. In other words, this problem is not a local inverse problem related only to the edge e_s.

Theorem 1. *Fix $s = \overline{1,p}$. The specification of the Weyl-type matrix M_s uniquely determines the potential q_s on the edge e_s.*

We omit the proof since it is similar to that in [8, Ch.2]. Moreover, using the method of spectral mappings one can get a constructive procedure for the solution of Inverse problem 2. It can be obtained by the same arguments as for n-th order differential operators on a finite interval (see [8, Ch.2] for details). Note that like in [9], the nonlinear Inverse problem 2 is reduced to the solution of a linear equation in the corresponding Banach space of sequences.

Fix $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$. Let $\varphi_{jk}(x_j,\lambda)$, $k = \overline{1,n_i}$, be solutions of equation (1) on the edge e_j under the conditions

$$\varphi_{jk}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda) = \delta_{k\nu},\ \nu = \overline{1,k}, \quad \varphi_{jk}^{(\mu-1)}(0,\lambda) = 0,\ \mu = \overline{1, n_i - k}.$$

We introduce the matrix $m_j(\lambda) = [m_{jk\nu}(\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,n_i}}$, where $m_{jk\nu}(\lambda) := \varphi_{jk}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda)$. The matrix $m_j(\lambda)$ is called the Weyl-type matrix with respect to the internal vertex v_0 and the edge e_j.

Inverse problem 3. Fix $j = \overline{1,p}$. Given the Weyl-type matrix m_j, construct the potential q_j on the edge e_j.

This inverse problem is the classical one, since it is the inverse problem of recovering a higher-order differential equation on a finite interval from its Weyl-type matrix. This inverse problem has been solved in [8], where the uniqueness theorem for this inverse problem is proved. Moreover, in [8] an algorithm for the solution of Inverse problem 3 is given, and necessary and sufficient conditions for the solvability of this inverse problem are provided.

Fix $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$. Then (see [9]) for each fixed $s = \overline{1,p_1} \setminus j$,

$$m_{j1\nu}(\lambda) = \frac{\psi_{s1j}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda)}{\psi_{s1j}(l_j,\lambda)}, \quad \nu = \overline{2,n_i}, \tag{13}$$

$$m_{jk\nu}(\lambda) = \frac{\det[\psi_{s\mu j}(l_j,\lambda), \ldots, \psi_{s\mu j}^{(k-2)}(l_j,\lambda), \psi_{s\mu j}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda)]_{\mu=\overline{1,k}}}{\det[\psi_{s\mu j}^{(\xi-1)}(l_j,\lambda)]_{\xi,\mu=\overline{1,k}}},\ 2 \le k < \nu \le n_i. \tag{14}$$

4. Solution of Inverse Problem 1. Now we are going to obtain a constructive procedure for the solution of Inverse problem 1. Our plan is the following.

Step 1. Let the Weyl-type matrices $\{M_s(\lambda)\},\ s = \overline{1,p}\backslash p_N$, be given. Solving Inverse problem 2 for each fixed $s = \overline{1,p} \setminus p_N$, we find the potentials q_s on the edges $e_s,\ s = \overline{1,p} \setminus p_N$.

Step 2. Using the knowledge of the potential on the edges $e_s,\ s = \overline{1,p} \setminus p_N$, we construct the Weyl-type matrix m_{p_N}.

Step 3. Solving Inverse problem 3 for $j = p_N$ we find the potential q_{p_N} on the edge e_{p_N}.

Steps 1 and 3 have been already studied in Section 3. It remains to fulfil Step 2.

Suppose that Step 1 is already made, and we found the potentials $q_s,\ s = \overline{1,p}\backslash p_N$, on the edges $e_s,\ s = \overline{1,p}\backslash p_N$. Then we calculate the functions $C_{kj}(x_j, \lambda)$, $j = \overline{1,p} \setminus p_N$; here $k = \overline{1,n_i}$ for $j = \overline{p_{i-1}+1,p_i}$.

Fix $s = \overline{1,p_1}$ (if $N > 1$), and $s = \overline{1,p_1-1}$ (if $N = 1$). All calculations below will be made for this fixed s.

Our goal now is to construct the Weyl-type matrix $m_{p_N}(\lambda)$. According to (13)-(14), in order to construct $m_{p_N}(\lambda)$ we have to calculate the functions

$$\psi^{(\nu)}_{skp_N}(l_{p_N}, \lambda), \quad k = \overline{1, n_N - 1},\ \nu = \overline{0, n_N - 1}. \tag{15}$$

We will find the functions (15) by the following steps.

1) Using (10) we construct the functions

$$\psi^{(\nu)}_{sks}(l_s, \lambda),\ k = \overline{1, n_N - 1},\ \nu = \overline{0, n_1 - 1}, \tag{16}$$

by the formula

$$\psi^{(\nu)}_{sks}(l_s, \lambda) = C^{(\nu)}_{ks}(l_s, \lambda) + \sum_{\mu=k+1}^{n_1} M_{sk\mu}(\lambda) C^{(\nu)}_{\mu s}(l_s, \lambda). \tag{17}$$

2) Consider a part of the matching conditions (8) on Ψ_{sk}. More precisely, let $\xi = \overline{N,m},\ k = \overline{n_{\xi+1}, n_\xi - 1},\ l = \overline{\xi, m},\ j = \overline{1, p_l - 1}$. Then, in particular, (8) yields

$$U_{p_l,\nu}(\psi_{skp_l}) = U_{j\nu}(\psi_{skj}), \quad \nu = \overline{n_{l+1} - 1, \min(k-1, n_l - 2)}. \tag{18}$$

Since the functions (16) are known, it follows from (18) that one can calculate the functions

$$\psi^{(\nu)}_{skj}(l_j, \lambda),\ \xi = \overline{N,m},\ k = \overline{n_{\xi+1}, n_\xi - 1},\ l = \overline{\xi, m},\ j = \overline{1, p_l},\ \nu = \overline{n_{l+1} - 1, \min(k-1, n_l - 2)}. \tag{19}$$

In particular we found the functions (15) for $\nu = \overline{0, k-1}$.

3) It follows from (11) and the boundary conditions on Ψ_{sk} that

$$\psi^{(\nu)}_{skj}(l_j, \lambda) = \sum_{\mu=\max(n_l-k+1,2)}^{n_l} M_{skj\mu}(\lambda) C^{(\nu)}_{\mu j}(l_j, \lambda), \tag{20}$$

$$k = \overline{1, n_1 - 1},\ l = \overline{1, m},\ j = \overline{p_{l-1} + 1, p_l} \setminus s,\ \nu = \overline{0, n_l - 1}.$$

We consider only a part of relations (20). More precisely, let $\xi = \overline{N, m},\ k = \overline{n_{\xi+1}, n_\xi - 1},\ l = \overline{1, m},\ j = \overline{p_{l-1} + 1, p_l},\ j \neq p_N,\ j \neq s,\ \nu = \overline{0, \min(k-1, n_l - 2)}$. Then

$$\sum_{\mu=\max(n_l-k+1,2)}^{n_l} M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}^{(\nu)}(l_j, \lambda) = \psi_{skj}^{(\nu)}(l_j, \lambda), \quad \nu = \overline{0, \min(k-1, n_l - 2)}. \tag{21}$$

For this choice of parameters, the right-hand side in (21) are known, since the functions (19) are known. Relations (21) form a linear algebraic system σ_{skj} with respect to the coefficients $M_{skj\mu}(\lambda)$. Solving the system σ_{skj} by Cramer's rule we find the functions $M_{skj\mu}(\lambda)$. Substituting them into (20), we calculate the functions

$$\psi_{skj}^{(\nu)}(l_j, \lambda), \quad k = \overline{1, n_N - 1},\ l = \overline{1, m},\ j = \overline{p_{l-1} + 1, p_l} \setminus p_N,\ \nu = \overline{0, n_l - 1}. \tag{22}$$

Note that for $j = s$ these functions were found earlier.

4) Let us now use the generalized Kirchhoff'sconditions (9) for Ψ_{sk}. Since the functions (22) are known, one can construct by (9) the functions (15) for $k = \overline{1, n_N - 1},\ \nu = \overline{k, n_N - 1}$. Thus, the functions (15) are known for $k = \overline{1, n_N - 1},\ \nu = \overline{0, n_N - 1}$.

Since the functions(15) are known, we construct the Weyl-type matrix $m_{p_N}(\lambda)$ via (13)-(14) for $j = p_N$. Thus, we have obtained the solution of Inverse problem 1 and proved its uniqueness, i.e. the following assertion holds.

Theorem 2. *The specification of the Weyl-type matrices $M_s(\lambda)$, $s = \overline{1, p} \setminus p_N$, uniquely determines the potential q on T. The solution of Inverse problem 1 can be obtained by the following algorithm.*

Algorithm 1. Given the Weyl-type matrices $M_s(\lambda)$, $s = \overline{1, p} \setminus p_N$.

1. Find the potentials q_s, $s = \overline{1, p} \setminus p_N$, by solving Inverse problem 2 for each fixed $s = \overline{1, p} \setminus p_N$.
2. Calculate $C_{kj}^{(\nu)}(l_j, \lambda)$, $j = \overline{1, p} \setminus p_N$; here $k = \overline{1, n_i}$, $\nu = \overline{0, n_i - 1}$ for $j = \overline{p_{i-1} + 1, p_i}$.
3. Fix $s = \overline{1, p_1}$ (if $N > 1$), and $s = \overline{1, p_1 - 1}$ (if $N = 1$). All calculations below will be made for this fixed s. Construct the functions (16) via (17).
4. Calculate the functions (19) using (18).
5. Find the functions $M_{skj\mu}(\lambda)$, by solving the linear algebraic systems σ_{skj}.
6. Construct the functions (15) using (9).
7. Calculate the Weyl-type matrix $m_{p_N}(\lambda)$ via (13)-(14) for $j = p_N$.

8. Construct the potential q_{p_N} on the edge e_{p_N} by solving Inverse problem 3.

Acknowledgment. This research was supported in part by Grant 13-01-00134 of Russian Foundation for Basic Research.

References

[1] Yu. Pokornyi and V. Pryadiev. The qualitative Sturm-Liouville theory on spatial networks. J. Math. Sci. (N.Y.) 119 (2004), no.6, 788-835.

[2] M.I. Belishev. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method. Inverse Problems 20 (2004), 647-672.

[3] V.A. Yurko. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on graphs. Inverse Problems 21 (2005), 1075-1086.

[4] B.M. Brown and R. Weikard. A Borg-Levinson theorem for trees. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 461, no.2062 (2005), 3231-3243.

[5] V.A. Yurko. Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs. Journal of Inverse and Ill-Posed Proplems 18, no.3 (2010), 245-261.

[6] V.A. Yurko. An inverse problem for higher-order differential operators on star-type graphs. Inverse Problems 23, no.3 (2007), 893-903.

[7] G. Freiling and V.A. Yurko. Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications. NOVA Science Publishers, New York, 2001.

[8] V.A. Yurko. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP, Utrecht, 2002.

[9] V.A. Yurko. Inverse problems on star-type graphs: differential operators of different orders on different edges. Central European J. Math. 12, no.3 (2014), 483-499.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Primjena numeričih metoda pri rješavanju nekih problema u fotorefraktivnoj optici

Zoran Ljuboje, Željko Pržulj, Ognjen Bjelica
Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Elektrotehnički fakultet
Istočno Sarajevo, BiH, Republika Srpska
zoran.ljuboje@etf.unssa.rs.ba, ognjen.bjelica@etf.unssa.rs.ba

Stručni rad

Apstrakt

U radu je analiziran fotorefraktivni efekat, tj. navedeno je nekoliko primjera numeričkih nestabilnosti pri rješavanju određenih problema kod ovog efekta. Ovaj efekat je definisan diferencijalnim jednačinama koje je teško riješiti analitički pa se rješavaju numeričkim metodama pri čemu je potrebno primjeniti najoptimalniju metodu. Takođe, na matematičkm primjeru je pokazano kako primjena numeričkih metoda utiče na rješenja koja su često različita i pogrešna. Kada se na matematičkom primjeru definiše najadekvatnija metoda, ista se koristila pri rješavanju problema kod fotorefraktivnog efekta.

1 Fotorefraktivni efekat

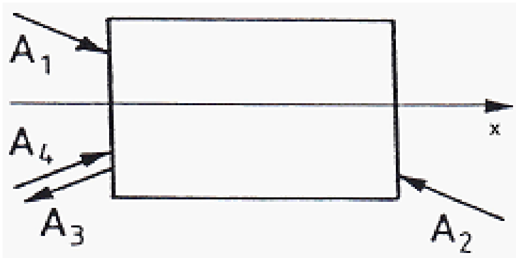
Analiziraćemo primjer proračuna kod fotorefraktivnog efekta koji predstavlja proces četvorotalasnog miješanja laserskih zraka (4TM) pri interakciji laserske svjetlosti sa nekim kristalima. Kod ovog efekta dolazi do periodične promjene indeksa prelamanja neke optičke sredine, tačnije rečeno nekih kristala (barijum titanat, litijum niobat, itd.) pod dejstvom svjetlosti. Pod dejstvom svjetlosti u kristalu dolazi do formiranje difrakcione rešetke na kojoj se mogu rasijavati dodatni upadni zraci.

Pri osvjetljavanu kristala sa tri laserska zraka čije su amplitude A_1, A_2 i A_4 kao rezultat nastaje četvrti talas amplitude A_3. Za razliku od poznatog zakona refleksije svjetlosti u geometrijskoj optici, reflektovani zrak A_3 vraća se istim putem zraka A_4 (slika 1).

Proces 4TM u kristalu je opisan jednačinama[1]:

$$\frac{dA_1}{dx} = QA_4 - \alpha A_1,\ \ \frac{dA_1^*}{dx} = -QA_1^* - \alpha A_4^*, \tag{1}$$

$$\frac{dA_2^*}{dx} = -QA_3^* + \alpha A_2^*,\ \ \frac{dA_3}{dx} = QA_2 + \alpha A_3, \tag{2}$$



Slika 1: Šematski prikaz četvorotalasnog miješanje (4TM) u fotorefraktivnim kristalima

gdje su oznake: A amplitude talasa,α je koeficijent apsorpcije, dok znak "zvjezdica" označava konjugovano kompleksne veličine. Oznaka Q predstavlja tzv. amplitudu transmitivne difrakcione rešetke koja zadovoljava jednačinu:

$$\tau \frac{dQ}{dt} + \varepsilon Q = \frac{\gamma}{I}\left(A_1 A_4^* + A_2^* A_3\right), \tag{3}$$

gdje je τ vrijeme relaksacije, I je ukupni intenzitet talasa, tj. $I = \sum |A_i|^2$, dok parametri ε i γ zavise od električnih polja u kristalu [2]. Parametri ε i γ mogu biti realni ili kompleksni brojevi.

Navedene jednačine je teško riješiti analitički. Problem rješavamo numeričkim metodama. Poznato je da ovaj način rješavanja može dati rješenja koja se potpuno razlikuju od tačnih [3].

2 Matematički primjer numeričkog rješavana jednačina

Prije analize navedenog problema, analizirajmo jedan matematički primjer, tj. pokušajmo numerički rješiti diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{dy}{dx} = (y+3)(y-1); \tag{4}$$

(4) pri čemu je poznat početni uslov $y(0) = y_0$.

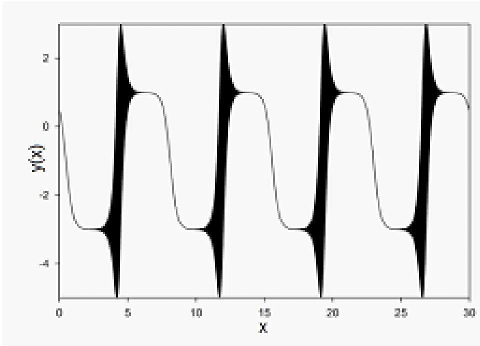
Treba naglasiti da se jednačina (1) može tačno riješiti analitički, pri čemu je rješenje dato izrazom:

$$y = \frac{3Ce^{4x} - 1}{1 - Ce^{4x}}, \tag{5}$$

gdje je konstanta $C = (y_0 + 3) / (y_0 - 1)$.

Ako uzmemo početnu vrijednost $y_0 = 0,5$, rješenje jednačine 5 daje vrijednost za y koja monotono raste i konvergira ka vrijednosti $y = -3$ kad $x \to \infty$.

Radi ilustracije pokušajmo rješiti jednačinu 4 numeričkim metodama. Primjenićemo *kombinovanu numeričku metodu* koja se dobija kombinacijom *metode*



Slika 2: Rješenje jednačine koje slijedi iz izraza 7

centralnih razlika (*modifikovana Ojlerova metoda*) i *Ojlerove metode* [4][5]. Na osnovu ove metode iz jednačine 1 slijedi izraz:

$$\frac{(1-m)\left(u_{n+1}-u_{n-1}\right)}{2h}+\frac{m\left(u_{n+1}-u_{n}\right)}{h}=\left(u_{n}+3\right)\left(u_{n}-1\right); \tag{6}$$

gdje je m parameter čije su vrijednosti:$0 \leq m \leq 1$, h je integracioni korak, a u_n numeričko rješenjenje nakon n koraka. Za m=*1,* prethodni izraz svodi se na *Ojlerovu metodu*, a za m=*0,* svodi se na *metodu centralnih razlika.*

Iz navedenog izraza 6 slijedi:

$$u_{n+1}=\frac{1-m}{1+m}u_{n-1}+\frac{2}{1+m}\left[(m+2h)\,u_{n}+h\left(u_{n}^{2}-3\right)\right]. \tag{7}$$

Rješenja koja slijede iz izraza 7 zavise početnih vrijednosti, od integracionog koraka h, i od parametra m. Analiza pokazuje da za slučaj $m < h$ ova metoda daje nestabilna rješenja.

Za početak uzmimo da je m=*0.* Početni uslovi su: $u_0 = y_0$ i $u_1 = y_0 + h\,(y_0+3)\,(y_0-1)$.

Za početne vrijednosti u_0=*0.5* i u_1= *0.495* za integracioni korak $h = 0.003$, rješenje koje slijedi iz izraza 7 je netačno i daje numeričke nestabilnosti (slika 2).

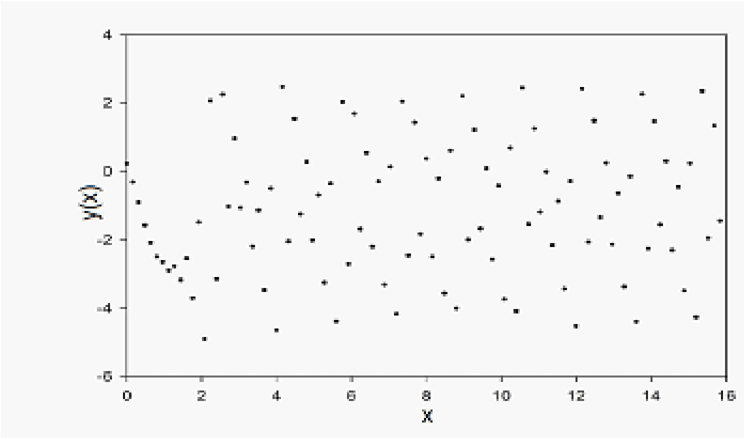
Na početnom interval promjenjljive x, rješenje teži tačnoj vrijednosti a zatim na pojedinim intervalima promjenjljive, rješenja osciluju oko karakterističnih tačaka -*3* i *1.*

Razlog koji dovodi do nestabilnosti je neadekvatna numerička metada pri čemu najveći uticaj ima greška zaokruživanja do decimale kolika je preciznost računara.

Smanjvanjem koraka pojavljuju se mala poboljšanja dok se sa još većim smanjenjem koraka proračun komplikuje i dobijaju se potpuno netačna rješenja.

Ako se uzima veći korak integraljenja, greška je velika i rješenje vrlo brzo teži $u_n \to -\infty$.

Radi ilustracije, za početnu vrijednost u_0=*0.5,* za korak h=*0.16* i m=*0.001* dobijamo numerički haos (slika 3).



Slika 3: Rješenje koje dovodi do numeričkog haosa

Daljnja analiza pokazuje da se podešavanjem parametara, može doći do tačnog rješenja. Npr. za h=*0.003* i m=*0.2* dolazimo do tačnog rješenja.

Takođe, problem se može riješiti tražeći pogodniju numeričku metodu. Npr. u slučaju da se primjeni Runge-Kuta metoda četvrtog reda, dobićemo tačno rješenje.

Iz navedenog zaključujemo da nas različite numeričke metode mogu voditi u različita rješenja.

3 Rješavanje problema fotorefraktivnog efekta

Pretpostavimo da smo na prethodnom matematičkom primjeru našli najpogodniju numeričku metodu i primjenimo je na navedeni fizikalni problem. Iz jednačina 1, 2 i 3 računamo intenzitet reflektovanog zraka I_3 u funkciji od upadnog zraka I_4. Kao što smo napomenuli, navedene jednačine je teško riješiti analitički, pa se rješavaju numeričkim metodama.

Ovdje ćemo analizirati veličine na ulaznoj strani kristala (x=*0*) pa uz aproksimacije iz (2) dobijamo rješenja za amplitude A_{20} i A_{30}:

$$A_{20} = C_2 e^{(-\alpha d)} \cos \bar{Q} d, \quad A_{30} = -C_2 e^{(-\alpha d)} \sin \bar{Q} d \tag{8}$$

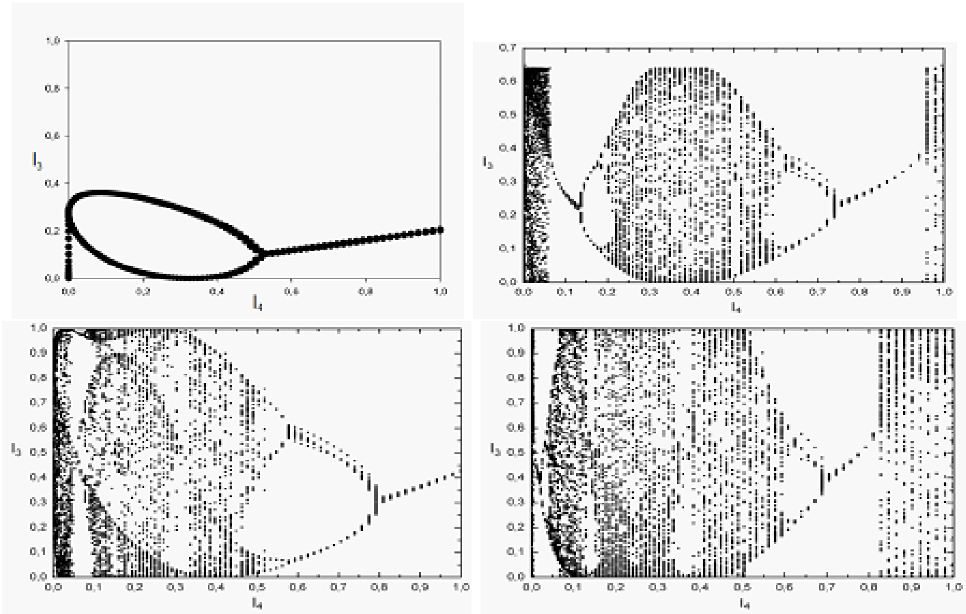
gdje je $\bar{Q}$ srednja vrijednost amplitude a d debljina kristala. Takođe, radi pojednostavljenja uzimamo da je α= *0*.

Nakon toga potrebno je riješiti diferencijalnu jednačinu 3. Najjednostavnija aproksimacija je u stabilnom stanju pa iz 3 slijedi tzv. iterativno preslikavanje.

$$Q_{n+1} = \frac{\gamma}{\varepsilon I} \left(A_1 \bar{A}_4 + \bar{A}_2 A_3 \right)_n . \tag{9}$$

Iz 8 i 9 slijedi:

$$Q_{n+1} = \frac{\gamma}{\varepsilon I} \left(C_1 \bar{C}_4 - \frac{|C_2|^2}{2} \sin(2 Q_n d) \right), \tag{10}$$



Slika 4: a) Parametar $\gamma = 3$, b) Parametar $\gamma = 5$, c) Parametar $\gamma = 8$, d) Parametar $\gamma = 10$
Dijagrami reflektovanog talasa I_3 u funkciji od upadnog zraka I_4

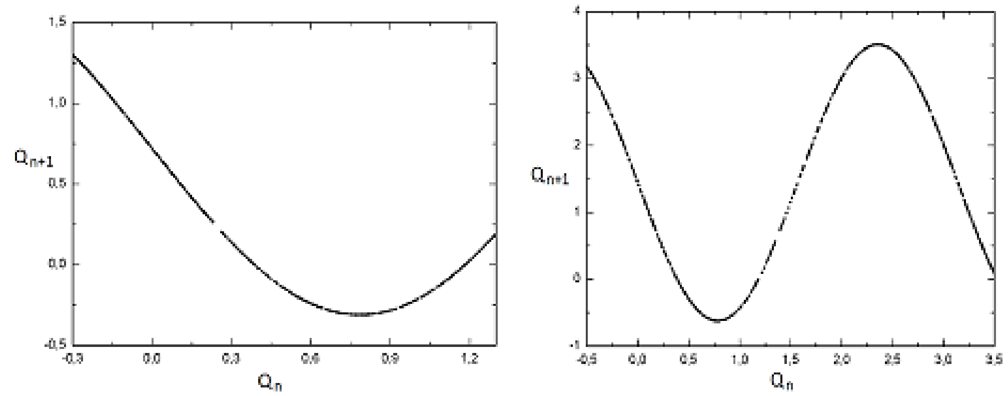
gdje je: $C_1 = A_1$ i $C_4 = A_4$ za vrijednosti x na ulaznoj strani kristala (x=*0*), a $C_2 = A_2$ za vijednost x na izlaznoj strani kristala (x=d).

Iz 10 i 8 slijede rješenja na slici 4 na kojima je predstavljena zavisnost reflektovanog zraka I_3 u funciji od upadnog zraka I_4 za različite vrijednosti parametra γ. U ovoj situaciji veličine su predstavljene kao funkcije realnih promjenjljivih što predstavlja pojednostavljenje problema.

Problem je rješavan metodom iterativnog preslikavanja. U rješenjima se pojavljuju numeričke nestabilnosti pa i numerički haos sa porastom vrijednosti parametra γ. Ove nestabilnosti su posledica neadekvatnih metoda jer ih eksperimenti ne potvrđuju.

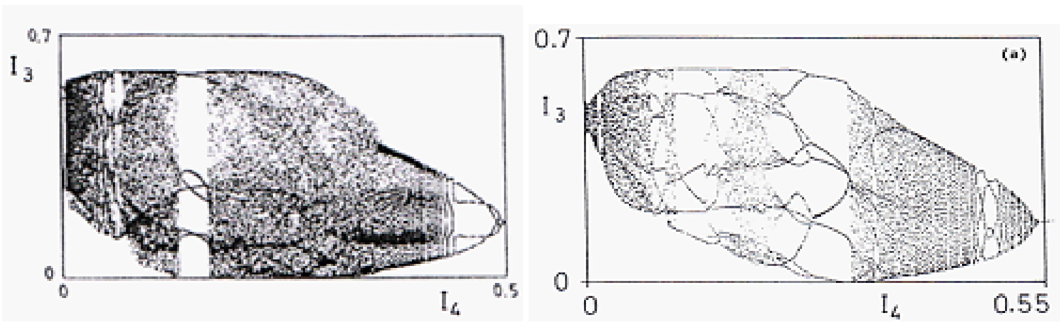
Na slici 5 prikazana su preslikavanja koja slijede iz jednačine 10 za konstantne vrijednosti A_4. Ova preslikavanja se odnose na grafike na slici 4b) i 4d). Oblik oba grafika na slici 5 ukazuje na periodičnu zavisnost, tj. oblik sličan trigonometrijskoj funciji koja se pojavljuje u preslikavanju. Na navedenim graficima se ne pojavljuju numeričke nestabilnosti, ali se pojavljuju u konačnim rješenjima (slika 4).

Na slici 6 data su rješenja prethodnih jednačina pri čemu su svi parametri na oba primjera jednaki [6][7][8]. Pod a) rezultat je dobijen iterativnim preslikavanjem, a pod b) problem je rješavan Runge-Kuta metodom četvrtog reda. Ova metoda primjenjena na matematičkom modelu koji smo analizirali, daje tačna rješenja. Međutim, u ovoj situaciji obje metode daju slične rezultate sa nu-



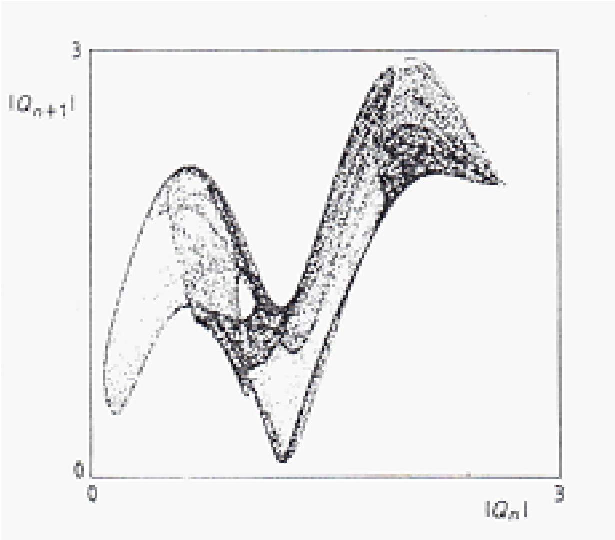
Slika 5: Preslikavanje koje se odnosi na grafik na slici 4b) i 4d)

meričkim nestabilnostima. U ovom primjeru uzeli smo komplikovaniji slučaj da je parameter γ kompleksan broj. Iako obje metode daju slična rješenja, ipak oba su netačna jer ih eksperimenti ne potvrđuju. Zaključujemo da je sam primjenjeni model nestabilan.



Slika 6: Dijagrami reflektovanog talasa I_3u funkciji od upadnog zraka I_4

Na slici 7 prikazano je preslikavanje koje slijedi iz jednačine 10 za konstantne vrijednosti A_4 i odnosi se na grafik na slici 6 a). Oblik grafika na slici 7 ukazuje na periodičnu zavisnost, ali se na njemu za razliku od grafika na slici 5 pojavljuju numeričke nestabilnosti što znači da je ovaj slučaj sa parametrom γ kao kompleksnim brojem, još nestabilniji.
Iz svega navedenog može se zaključiti da je navedeni model nestabilan ali i primjenjene metode vode u numeričke nestabilnosti jer eksperimentalni rezultati ne potvrđuju navedena rješenja. Dakle, treba biti oprezan pri rješavanju nestabilnih fizikalnih problema, gdje nas i primjenjeni model, a i metode mogu voditi u pogrešne rezultate sa numeričkim nestabilnostima.



Slika 7: Preslikavanje koje se odnosi na grafik na slici 6 a)

Literatura

[1] W. Krolikowski, K. D. Shaw, M.Cronin-Golomb and A. Bledowski, J. Opt.Soc.Am.B 6 (1989); W. Krolikowski, M.R. Belić, M.Cronin-Golomb and A. Bledowski, J. Opt.Soc.Am.B 7 (1990).

[2] N. V. Kukhtarev, V. Markov and S. Odulov, *Transient energy transfer during hologram formation in LiNbO3 in external electric field*, Opt. Commun. 23 338 (1977).

[3] . R. Belić, *Computational chaos in Spatio-temporal structure and chaos in heat and mass transfer processes*, M. Todorović and L. Pismen eds, 309, Mrljes and Sons, Nicosia (1993).

[4] M. Yamaguti and S. Ushiki, *Chaos in numerical analysis of ordinarydiferential equations*, Phisica 3D 618 (1981).

[5] Glyn James, *Advanced Modern Engineering Matematics,* 4th Ed., Prentice Hall, 2011.

[6] M. Belić and Z. Ljuboje, *Chaos in phase conjugation: physical vs numerical instabilities*, Opt. Quant. Electron. 24 745 (1992)

[7] M. Belić, Z. Ljuboje, M. Sauer and F. Kaiser, *Computational chaos innonlinear optics*, Appl. Phys. B 55, 109 (1992).

[8] Z. Ljuboje, *Numerički haos pri rješavanju nekih problema kod fotorefraktivnog efekta*, INFOTEH-2014

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Neke jednakosti i nejednakosti sopstvenih vrednosti grafova

Vidan Govedarica, Tatjana Mirković
Elektrotehnički fakultet Istočno Sarajevo
vidangov@yahoo.com, tmirkovic75@gmail.com

Stručni rad

Apstrakt

U radu su dokazane jednakosti i nejednakosti za sopstvene vrednosti datog grafa $G = (V, E)$, $|V| = n > 1$, $|E| = m > 1$, Opialovog i Wirtingerovog tipa.

Spektralna teorija grafova se veoma često primenjuje u rešavanju mnogih problema u računarskim naukama, numeričkoj matematici, fizici, biologiji, kao i u mnogim drugim naučnim i tehničkim disciplinama. U ovom radu se stavlja akcenat na njenu primenu u hemiji. Hemijski sastavi se predstavljaju empirijskim i strukturalnim formulama. Strukturalne formule se mogu predstaviti pomoću grafova, pri čemu se atomi predstavljaju čvorovima, a hemijske veze granama grafa. U izučavanju materijala i legura spektralna teorija grafova igra nezaobilaznu i osnovnu ulogu. Naročito se primenjuje u slučajevima kada novi materijali i legure treba da se sintetišu sa unapred definisanim karakteristikama.

Glavni zadatak spektralne teorije grafova je nalaženje spektra, tj sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora datog grafa, kao i određivanje karakterističnog i minimalnog polinoma. Nijedan od ovih zadataka, u opštem slučaju nije lak, a veoma retko se mogu naći rešenja u zatvorenom obliku. Zbog toga se, prilikom izračunavanja sopstvenih vrednosti, odnosno nula odgovarajućeg karakterističnog polinoma, često koriste numeričke metode. Takođe, veoma značajnu ulogu igraju nejednakosti, koje sadrže sopstvene vrednosti ili karakteristične polinome. U ovom radu smo izložili jednakosti i nejednakosti, posebno one diskretne Opialovog i Wirtingerovog tipa (videti na primer [1,3]). Razlog leži u činjenici da se one mogu transformisati u nejednakosti za sopstvene vrednosti grafova.

Teorema 0.1. Za sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ grafa $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 1$, $|E| = m \geq 1$, važe sledeće nejednakosti

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 0 \\ &\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 = 2m. \end{aligned} \tag{1}$$

Dokaz 0.1. Dokaz: Neka je $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ skup čvorova datog grafa $G = (V, E)$, čija je matrica susedstva binarna matrica $A = (a_{ij})$, reda $n \times n$. Tada važi jednakost

$$\lambda_1^k + \lambda_2^k + ... + \lambda_n^k = tr\, A^k = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(k)},$$

za $k = 1, 2, ..., n$. Kako je $a_{ii} = 0$, za svako $i = 1, 2, ..., n$, važi

$$\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = tr\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0.$$

Za $k = 2$ važi

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 = tr\, A^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} d\,(x_i) = 2m.$$

Teorema 0.2. Za sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ grafa $G = (V, E)\,,\, |V| = n > 1,\, |E| = m > 1$, važi sledeća nejednakost

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \lambda_{k+1} + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \right| \leq \cos\, \frac{\pi}{n}. \tag{2}$$

Dokaz 0.2. Dokaz: Neka je $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}^T$ dati vektor, gde su a_k, $k = 1, 2, ..., n$ realni brojevi i $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$. Na osnovu brojevima a_k formiramo jednakost

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})^2 = (H \cdot \vec{a},\, \vec{a}), \tag{3}$$

gde je H trodijagonalna matrica, reda $n \times n$, definisana pomoću

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sopstvene vrednosti matrice H (videti [1], [2] i [4]), su $x_1 = 0$ i $x_k = 4\, \cos^2 \frac{(n-k+1)}{2}\pi$, $k = 2, 3, ..., n$, pri čemu je $0 = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = \cos^2 \frac{\pi}{2n}$. Sada, u saglasnosti sa (3) važi sledeća nejednakost

$$x_2\,(\vec{a},\, \vec{a}) \leq (H \cdot \vec{a},\, \vec{a}) \leq x_n\,(\vec{a},\, \vec{a})\,,$$

tj.

$$4\, \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + a_1^2 + a_n^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} \leq 4\, \cos^2 \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} a_k^2. \tag{4}$$

Sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ grafa $G = (V, E)$, zadovoljavju (1), i zamenom $a_k := \sqrt{2m}\lambda_k$, u (4), dobija se (2).

Razmotrimo niz realnih polinoma $(Q_k(x))$, $k \in N_0$, čiji su članovi dobijeni na osnovu rekurentne relacije

$$\begin{array}{l} xQ_{k+1}(x) = -r_k Q_k(x) + (r_k + r_{k-1}) Q_{k-1}(x) - r_{k-1} Q_{k-2}(x) \\ Q_{-1}(x) = 0, \ \ Q_0(x) = 1 \end{array} \tag{5}$$

gde je (r_k), $k \in N_0$, $r_0 = 0$, dati težinski niz. Označimo sa $R_n(x)$ polinom

$$R_n(x) = Q_n(x) - Q_{n-1}(x), \tag{6}$$

i sa A_n i B_n, respektivno, minimalnu i maksimalnu nulu ovog polinoma, za fiksirano n.

Ako je $G = (V, E)$, $|V| = n > 1$, $|E| = m > 1$, dati graf čije su sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, onda važi nejednakost

$$2m\, A_n \leq \sum_{k=1}^{n-1} r_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \leq 2m\, B_n.$$

Na levoj (desnoj) nejednakosti jednakost nastupa, za $\lambda_k = \sqrt{2m} Q_{k-1}(t)$, $k = 1, 2, ..., n$, gde je $t = A_n$ $(t = B_n)$.

Teorema 0.3. Sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ grafa $G = (V, E)$, $|V| = n > 1$, $|E| = m > 1$, zadovoljavaju sledeću nejednakost

$$A_n \leq \sum_{k=1}^{n-1} r_k (\lambda_k - \lambda_{k+1})^2 \leq B_n. \tag{7}$$

Dokaz 0.3. Dokaz: Neka je $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}^T$ dati vektor, gde su a_k, $k = 1, 2, ..., n$ realni brojevi sa osobinom $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$. Definišimo trodijagonalnu matricu $\bar{H}$, reda $n \times n$, kao

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} r_1 & -r_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -r_1 & r_1 + r_2 & -r_2 & & 0 & 0 \\ 0 & -r_2 & r_2 + r_3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & r_{n-2} + r_{n-1} & -r_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & -r_n & r_{n-1} + r_n \end{bmatrix}.$$

Na osnovu brojeva a_k, $k = 1, 2, ..., n$ i matrice $\bar{H}$, možemo da formiramo jednakost

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k (a_k - a_{k+1})^2 = (H \cdot \vec{a}, \vec{a}). \tag{8}$$

Na osnovu prethodne rekurentne relacije, za neku konstantu n, formiramo jednačinu

$$x \cdot \vec{y} = \bar{H} \cdot \vec{y} + r_n \cdot R_n(x) \cdot \vec{e}, \tag{9}$$

gde su $\vec{y} = \begin{bmatrix} Q_0(x) & Q_1(x) & \dots & Q_{n-1}(x) \end{bmatrix}^T$, $\vec{e} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ i $R_n(x)$ dati sa (6). Iz jednakosti (9) lako se zaključuje da je svaka nula polinoma $R_n(x)$ ujedno i nula matrice $\bar{H}$. Ako označimo sa A_n i B_n, respektivno, minimalnu i maksimalnu nulu polinoma $R_n(x)$, tj. sopstvenu vrednost matrice $\bar{H}$, onda na osnovu (**??**) važi nejednakost

$$A_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} r_k (a_k - a_{k+1})^2 \leq B_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Zamenom, $a_k := \sqrt{2m}\lambda_k, k = 1, 2, ..., n$, i na osnovu (**??**) ove nejednakosti se transformišu u nejednakosti (7).

Posledica 0.3.1. Sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ grafa $G = (V, E)$, $|V| = n > 1$, $|E| = m > 1$, zadovoljavaju sledeću nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n-1} k (a_k - a_{k+1})^2 \leq B_n,$$

pri čemu je B_n najveća nula Laguerrianovog polinoma $L_{n-1}^{(-1)}(x)$.

Teorema 0.4. Za grafove $L_n = (V, E)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, ..., \{n-1, n\}\}$, $n \geq 3$, važi rekurentna relacija

$$P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda),$$

pri čemu je $P_1(\lambda) = \lambda$.

Dokaz 0.4. Dokaz: Matrica susedstva grafa L_n je binarna trodijagonalna matrica A, reda $n \times n$, sa jediničnim bočnim i nultom glavnom dijagonalom,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakterističan polinom ove matrice je

$$P_n(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 & \lambda \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Razvojem po prvoj koloni, a zatim po drugoj vrsti drugog minora ove determinante, dobijamo $P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda)$.

Teorema 0.5. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ nule karakterističnog polinoma grafa $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 1$, $|E| = m$. Tada važi nejednakost

$$8m \sin^2 \frac{\pi}{2n} \leq \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1})^2 \leq 8m \cos^2 \frac{\pi}{2n}.$$

Dokaz 0.5. Dokaz: Za sopstvene vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ datog grafa važe jednakosti $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ i $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 2m$.

Na osnovu nejednakosti

$$4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \leq 4 \cos^2 \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

koja važi pod uslovom $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$, direktno se dobija traženi rezultat.

U levoj nejednakosti, jednakost nastupa, kada je

$$\lambda_i = \sqrt{2m} \cdot \cos \frac{(2i-1)}{2n}\pi, \;\; i = 1, 2, ..., n,$$

a u desnoj za

$$\lambda_i = (-1)^{i-1} \sqrt{2m} \cdot \cos \frac{(2i-1)}{2n}\pi, \;\; i = 1, 2, ..., n.$$

Teorema 0.6. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1} = \lambda_1$, sopstvene vrednosti grafa $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$. Tada važi nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k+1})^2 \geq 8m \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Jednakost nastupa ako i samo ako je $\lambda_k = A \cos \frac{2k\pi}{n} + B \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k = 1, 2, ..., n$, gde su A i B proizvoljne konstante.

Teorema 0.7. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sopstvene vrednosti grafa $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 1$, $|E| = m \geq 1$. Tada važi nejednakost

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2})^2 \geq 32m \sin^4 \frac{\pi}{2n},$$

pri čemu je $\lambda_0 = \lambda_1$ i $\lambda_{n+1} = \lambda_n$. Jednakost nastupa ako i samo ako je $\lambda_k = A \cos \frac{(2k-1)\pi}{n}$, $k = 1, 2, ..., n$, pri čemu je A proizvoljna konstanta.

Literatura

[1] A. M. Fink, Discrete inequalities of generalized Wirtinger type, Aequationes Math. 11 (1974), 31пїS39.

[2] G. V. Milovanović, I. Z. Milovanović, On discrete inequalities of Wirtinger's type, J. Math. Anal. Appl. 88 (1982), 378-387.

[3] G. V. Milovanović, I. Z. Milovanović, Some discrete inequalities of Opial's type, Acta Sci. Math. (Szeged) 47 (1984), 413пїS417.

[4] T. Z. Mirković, I. D. Stanković: Some inequalities for graph eigenvalues, Metalurgia International, Vol 18 (2013), No. 6, pp. 77-79.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Postavljanje problema u početnoj nastavi matematike

Aleksandra Mihajlović
Fakultet pedagoških nauka Univerziteta u Kragujevcu, Jagodina
aleksandra.mihajlovic@gmail.com

Originalni naučni rad

Apstrakt

Učenici bi trebalo da svojim sopstvenim misaonim naporima aktivno konstruišu znanja. U nastavi matematike ne bi trebalo aktivnosti učenika svesti samo na nalaženje rešenja rutinskih problema, već i onih nerutinskih, nestandardnih i nestrukturiranih. Veoma važnu ulogu u oblasti matematike i matematičkog mišljenja, osim rešavanja problema, ima i postavljanje problema. Naime, u matematici kao nauci postavljanje, formulisanje, generisanje problema predstavlja proces koji zahteva bogato iskustvo i ekspertizu u oblasti, ali i kreativno mišljenje matematičara. Kada učenike angažujemo u postavljanju problema, tada ih zapravo stavljamo u „ulogu" matematičara kao naučnika i nudimo im mogućnost da iskuse nešto drugačiji aspekt matematike. Postavljanje problema omogućava učenicima da prodube svoja matematička znanja, da poboljšaju razumevanje matematičkih koncepata, motiviše ih da razvijaju sopstvene matematičke ideje i podstiče kreativno mišljenje. Ipak, u nastavi matematike se ovim situacijama i aktivnostima posvećuje malo vremena. U prvom delu rada daje se prikaz nekih teorijskih razmatranja i istraživanja o pojmu i značaju postavljanja problema u nastavi matematike, i ističu se prednosti i slabosti ovog pristupa. U drugom delu rada ukazuje se na mogućnosti primene aktivnosti i situacija postavljanja problema u početnoj nastavi matematike.

1 Uvod

Svrha školskog obrazovanja u svakoj zemlji je, u većoj ili manjoj meri, razvijanje nezavisne, samouverene, motivisane i multitalentovane ličnosti sposobne da kritički misli, koja će uspešno odgovoriti na izazove u različitim društvenim uslovima u toku svog života (Pehkonen, 2007). Rešavanje problema predstavlja snažno sredstvo razvijanja misaonih sposobnosti višeg stepena, pa kao takvo predstavlja jedan od glavnih ciljeva i integralni deo učenja i nastave matematike. Međutim, navodi Pehkonen, rešavanje problema nije samo cilj, već i sredstvo učenja matematike. Kao jedan od ciljeva osnovnog obrazovanja i vaspitanja u Republici Srbiji navodi se „osposobljavanje za rešavanje problema, povezivanje i primenu znanja i veština u daljem obrazovanju i svakodnevnom životu" (Zakon o osnovnom obrazovanju i vaspitanju, član 21, str. 6). Dakle, biti dobar „rešavač" problema donosi velike prednosti i u svakodnevnom životu, daljem obrazovanu i na radnom mestu. Međutim, oni koji se bave matematičkim obrazovanjem često zanemaruju drugu, veoma bitnu stranu rešavanja matematičkih problema, a to je postavljanje problema. Problemi sa kojima se suočavamo u svakodnevnom životu i radu, skoro nikada nemaju čisto matematičku formu. Dakle, potrebno je određene situacije matematizirati, odnosno prevesti ih na jezik matematike, a zatim ih rešavati.

2 Pojam, uloga i značaj postavljanja problema u nastavi matematike

U matematičkoj literaturi pod problemom podrazumevamo datu situaciju ili zadatak kada je pojedinac primoran da povezuje poznate informacije na nov način kako bi dati zadatak izvršio (Kantowski, 1980, prema Pehkonen, 1997). Ako pojedinac odmah prepozna postupke koji su potrebni da bi rešio zadatak, onda će za njega to biti rutinski zadatak. Stoga je pojam problem ograničen vremenom i pojedincem, odnosno da li će nešto biti problem zavisi od osobe koja ga rešava.

U matematičkom obrazovanju, posle nekoliko decenija istraživanja koja su se fokusirala isključivo na rešavanje problema, matematičari, ali i ostali koji se bave istraživanjima u oblasti matematičkog obrazovanja, postepeno su počeli da uviđaju da je razvijanje sposobnosti postavljanja matematičkih problema, u najmanju ruku, podjednako važno u obrazovnom smislu kao i razvijanje sposobnosti njihovog rešavanja (Stoyanova, Ellerton, 1996). Mnogi istaknuti naučnici su prepoznali da sposobnost postavljanja bitnih, suštinskih pitanja ima podjednak značaj u naučnom radu, kao i sposobnost da se pronađu rešenja i odgovori. Ajnštajn i Infeld (1938) navode „Formulisanje problema je često bitnije od njegovog rešavanja, koje može biti stvar isključivo matematičkih ili eksperimentalnih veština. Postaviti nova pitanja, nove mogućnosti, sagledati stara pitanja iz novog ugla, zahteva kreativnu imaginaciju i predstavlja istinski napredak u nauci" (Einstein, Infeld, 1938, prema ibidem, str. 518). Postavljanje problema predstavlja po mnogima karakteristiku kreativne aktivnosti i izuzetnog talenta. Hadamard smatra da je sposobnost identifikovanja ključnih pitanja istraživanja indikator izuzetne darovitosti u oblasti matematike (Hadamard, 1945, prema Silver, 1994). Dakle, možemo reći da postavljanje problema, zajedno sa njihovim rešavanjem, ima centralnu ulogu za oblast matematike i matematičko mišljenje uopšte. U matematici kao nauci postavljanje, formulisanje, generisanje problema predstavlja proces koji zahteva bogato iskustvo i ekspertizu u oblasti, ali i kreativno mišljenje. „Otkriti", odnosno postaviti problem ne podrazumeva i njegovo rešavanje jer postoji veliki broj otvorenih i nerešenih pitanja i problema u matematici. Kada učenike angažujemo u postavljanju problema, tada ih zapravo stavljamo u ulogu matematičara kao naučnika. Naravno, problemi koje učenici postavljaju ne mogu se porediti sa problemima koje postavljaju matematičari, ali im na ovaj način nudimo mogućnost da iskuse nešto drugačiji aspekt matematike.

Silver (1994) opisuje postavljanje problema kao generisanje, kreiranje novih problema ili reformulaciju već postojećih problema. Stojanova definiše postavljanje problema kao proces kojim se na osnovu konkretne situacije formulišu matematički problemi (Stoyanova, 1998 prema Lowrie, 1999). Ingliš (English, 1997b) smatra da glavnu aktivnost postavljanja problema predstavlja generisanje novih pitanja iz već datih matematičkih zadataka. Silver i dr. ističu da cilj nije rešavanje datog problema već kreiranje novog problema na osnovu date situacije ili prethodnog iskustva (Silver i dr. , 1996 prema Chapman, 2012). Pri tome učenici kreirajući problemsku situaciju koriste svoj sopstveni jezik, sintaksu, gramatiku i kontekst (Dickerson, 1999, prema Ergun, Gunduz, 2010). Silver (1995) smatra da onaj ko postavlja problem ne mora da bude sposoban da reši taj problem kako bi ostvario pozitivne ishode obrazovanja. Stojanova i Elerton (Stoyanova, Ellerton, 1996) govore o postavljanju problema kao o procesu kojim na osnovu svog matematičkog iskustva učenici konstruišu lične interpretacije nekih konkretnih situacija i formulišu ih kao svrsishodne matematičke probleme. Ova definicija omogućava da se postavljanje problema uklopi u ciljeve nastave matematike. Postavljanje problema ima svoje korene i u Poljinom četvoroetapnom modelu rešavanja problema (Polya, 1973). Poljin model ističe da onaj ko rešava problem mora najpre da razume taj problem, da napravi plan rešavanja, da izvrši taj plan, i da napravi osvrt unazad na korake rešavanja i proveri dobijeno rešenje. Etapa „osvrta unazad" uključuje proveru tačnosti rešavanja i određivanje najboljeg postupka rešavanja. Međutim, ova etapa, takođe, podrazumeva da učenik uočava vezu sa nekim drugim problemima i da zamišlja slučajeve u kojima se isti postupak ili rešenje mogu primeniti. Nastavnik, može u ovoj fazi da traži od učenika da postavljaju ili formulišu svoje matematičke probleme koji su na neki način povezani sa problemom koji je rešen. Takođe, u etapi pravljenja plana, Polja govori o preformulaciji originalnog problema, o uočavanju jednostavnijih potproblema koji mogu učeniku da pomognu da lakše dođe do rešenja.

Kilpetrik i Silver ističu da korišćenje situacija u kojima učenici postavljaju probleme na časovima matematike može imati pozitivan efekat na njihovo matematičko mišljenje (Kilpatrick, 1987, Silver, 1993 prema Abu-Elwan, 1999). Braun i Volter (Brown, Walter 1983) su takodje identifikovali važne aspekte postavljanja problema u matematici. Neke od prednosti, koje pružaju situacije postavljanja problema, su: proširivanje sposobnosti rešavanja matematičkih problema i produbljivanje shvatanja matematičkih pojmova, podsticanje fleksibilnosti u mišljenju, razvijanje pozitivnih stavova učenika prema matematici i povećanje njihovog samopouzdanja (English, 1997b, Silver 1994). Takodje, ove aktivnosti pružaju i nastavniku i učeniku uvid u kvalitet znanja učenika, daju informacije o razumevanju, veštinama, sposobnostima i stavovima, ali i ukazuju na moguće propuste i pogrešna shvatanja učenika. Zbog svega ovoga, aktivnosti rešavanja problema predstavljaju za nastavnika snažan alat za procenu i evaluaciju postignuća učenika (Chapman, 2012).

U kurikulumima nekih zemalja, poput Australije i Sjedinjenih američkih država, ističe se efekat koji postavljanje problema može imati na ishode nastave matematike i preporučuje se primena ovih aktivnosti u proširivanju iskustava učenika (Stoyanova, Ellerton, 1996). Učenike treba angažovati u raznovrsnim i boga-tim matematičkim aktivnostima koje podstiču postavljanje problema, divergentno mišljenje, refleksiju i istrajnost (The National Statement on Mathematics for Australian Schools, 1991), čime im se pruža mogućnost da iskuse neke aspekte matematike kroz koje prolaze matematičari kao naučnici (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, NCTM, 1989).

Bez obzira što su istraživanja vezana za primenu i efekte primene postavljanja problema relativno nova, ipak bilo je nekoliko pokušaja da se postavljanje problema uključi u nastavu matematike na više obrazovnih nivoa (Singer i dr., 2011). Pri tome, postavljanje problema je korišćeno i kao metoda nastave i kao nastavna aktivnost. Subjekti ovih istraživanja bili su učenici (Stoyanova, Ellerton, 1996, English, 1997b, Nicolau, Philippou, 2004), ali i studenti nastavničkih fakulteta i sami nastavnici (Leung, Silver, 1997, Abu-Elwan, 1999, Chapman, 2012). Pokazalo se da su i učenici i nastavnici sposobni da generišu interesantne i svrsishodne matematičke probleme. U svojoj jednogodišnjoj eksperimentalnoj studiji koja je obuhvatala dizajniranje i primenu programa postavljanja problema za učenike petih razreda osnovnih škola, Ingliš (English, 1997b) je kao jedan od rezultata utvrdila da je došlo do značajnog napretka u razvoju matematičkog mišljenja u odnosu na učenike koji nisu učestvovali u programu. Nikolau i Filipu (Nicolau, Philippou, 2004) su ispitivali vezu između sposobnosti postavljanja problema i uspeha iz matematike učenika petog i šestog razreda. Utvrdili su da postoji jaka korelacija između ove dve varijable. Silver i Kai (Silver, Cai, 1993, prema Silver, 1994) su utvrdili da postoji jaka pozitivna veza između postavljanja problema i rešavanja problema otvorenog tipa. Sa druge strane, od nastavnika se ne može očekivati da nastavu drže na drugačiji način od onog koji su oni iskusili kao učenici (Craig, 1999, prema Demir, 2005). Kreg predlaže da se postavljanje problema uključi u nastavu ne samo u osnovnim i srednjim školama, već i na fakultetima. Kada se postavljanje problema sistematski uključuje u nastavu matematike, rezultati ukazuju da postoje pozitivni efekti po pitanju sposobnosti rešavanja problema i stavova prema matematici (Singer i dr., 2012).

Među mnogim praktičarima širom sveta postoji visok nivo interesovanja da se postavljanje problema učini važnom komponentom nastavnog procesa i da postane sastavni deo školske nastave matematike (ibidem). Kao i rešavanje problema, postavljanje problema se može posmatrati kao nastavna aktivnost. Silver (1997) je ukazao da uključivanje učenika u aktivnosti postavljanja problema može povećati njihovu kreativnost, o čemu svedoči i činjenica da testovi kreativnosti sadrže pitanja u kojima se traži od ispitanika da generišu probleme. Na primer, Gecel i Džekson (Getzel, Jacskon, 1962, prema Silver, 1994) u svojoj bateriji testova za merenje kreativnosti traže da se generišu matematički problemi na osnovu informacija koje su sadržane u nizu datih priča o nekim realnim životnim situacijama. Balka (1974, prema Fetterly, 2010) je u svom instrumentu takođe koristio postavljanje problema u matematici kao meru matematičke kreativnosti.

Postoje najmanje dva razloga zašto angažovanje učenika u aktivnostima postavljanja problema može imati pozitivan uticaj na njihovo učenje. Kao prvo, aktivnosti postavljanja problema su kognitivno zahtevni zadaci. Takvi zadaci stimulišu različite vrste učenja (Doyle, 1983, prema Singer i dr., 2011) i mogu da obezbede takve intelektualne kontekste koji podstiču bogat matematički razvoj učenika. Takođe, ove aktivnosti mogu unaprediti konceptualno razumevanje učenika, uticati na razvoj njihovih sposobnosti rasuđivanja i matematičke komunikacije, i podstaći njihovu radoznalost i interesovanja (NCTM, 1991, prema ibidem). Kao drugo, proces rešavanja problema često uključuje generisanje i rešavanje sličnih problema (Polya, 1973). Prethodne studije ukazuju da se sposobnost postavljanja kompleksnih problema povezuje sa većim sposobnostima rešavanja problema. Dakle, ohrabrivanje učenika da generišu probleme neće samo podstaći njihovo razumevanje problemskih situacija, već će takođe uticati na razvoj naprednijih strategija rešavanja problema (Singer i dr., 2011). Postavljanje problema, osim što razvija raznovrsno i divergentno mišljenje, promoviše i duh radoznalosti (English, 1997a). Neki autori (Silver, 1994) takođe sugerišu da će matematički problemi koje formulišu učenici najverovatnije biti povezani sa njihovim sopstvenim interesovanjima, što nije slučaj sa već postojećim problemima iz udžbenika. Neke studije su pokazale da postavljanje problema utiče na smanjivanje straha i anksioznosti prema matematici, na formiranje pozitivnih stavova, na menjanje postojećih i pogrešnih shvatanja o prirodi matematike (English 1997a, Silver, 1994, Akay, Boz, 2010). Korišćenje aktivnosti postavljanja problema smanjuje zavisnost od tzv. sindroma postojanja samo jednog tačnog odgovora što je slučaj sa većinom matematičkih zadataka u postojećim udžbenicima matematike. Još jedna važna činjenica je da učenici dobijaju značajniju ulogu u nastavnom procesu, čime njihova odgovornost za sopstveno učenje postaje veća. Aktivnosti postavljanja problema imaju i svoj socijalni aspekt, koji se ogleda u tome da nakon generisanja matematičkih problema, učenici saopštavaju i dele ove zadatke sa svojim vršnjacima i rešavaju ih.

Postavljanje problema, (Silver, 1994, English, 1997a), može se javiti pre procesa rešavanja problema (kada se od učenika traži da problem generišu na osnovu neke date realne ili veštački kreirane situacije; i pri tome cilj nije rešavanje problema već kreiranje novih), tokom procesa rešavanja problema (kada se vrši preformulacija problema, odnosno, dati uslovi, odnosi i zahtevi se upotrebljavaju na drugačiji način sa ciljem da se lakše dođe do rešenja problema, na primer druga etapa po Polji), ili nakon rešavanja određenog problema (kada se vrši generisanje novih problema na osnovu iskustva dobijenog rešavanjem jednog određenog ili niza nekih problema tako što se variraju ili dodaju uslovi ili ciljevi polaznog zadatka, na primer četvrta etapa po Polji). Stojanova, Elerton (Stoyanova, Ellerton, 1996) razlikuju tri osnovna tipa aktivnosti i situacija postavljanja problema: slobodne, polustruktuirane, struktuirane.

O slobodnom tipu aktivnosti postavljanja problema govorimo kada od učenika tražimo da generišu problem na osnovu neke date situacije (koja može imati osnovu u realnim životnim situacijama ili biti veštački kreirana). Učenicima možemo da damo određeni fragment informacije i da od njih tražimo da generišu matematički problem koristeći tu informaciju na neki način (npr. dajemo im rečenicu: U jednom redu stoji 10 devojčica i 10 dečaka. Zatim tražimo od njih sledeće: Sastavi što više matematičkih zadataka koristeći ovu informaciju na neki način). Takođe, možemo da tražimo od učenika osmisle i napišu novo pitanje o nekoj specifičnoj temi date oblasti (npr. nastavnik može da traži od učenika da osmisle matematički zadatak iz oblasti površine pravougaonika). Elerton je uvela tzv. kreativno pisanje u nastavu matematike, tako što je od učenika tražila da sami osmisle i sastave matematičke probleme koji bi po njihovom mišljenju bili teški njihovim vršnjacima (Stoyanova, Ellerton, 1996). Po njoj, dečije izražavanje matematičkih ideja kroz kreiranje njihovih sopstvenih problema ilustruje ne samo njihovo razumevanje i nivo razvoja matematičkih pojmova, već i reflektuje njihovu percepciju prirode matematike. U literaturi nailazimo na jedan broj eksperimenata u kojima učenici samostalno generišu probleme koje zatim rešavaju oni sami, drugi učenici iz razreda ili sledeća generacija učenika. Van der Brink (Van der Brink, 1987, prema Silver, 1997) navodi jedan eksperiment sa učenicima prvog razreda jedne osnovne škole u Holandiji. Učenici su sastavili i ilustrovali stranicu sa aritmetičkim zadacima namenjenu deci koja će naredne godine upisati prvi razred. Hili (Healy 1993, ibidem) izvodi sličan eksperiment sa učenicima srednje škole u SAD-u koji naziva „napravi knjigu". Učenici uče geometrijske sadržaje pri čemu ne koriste komercijalni udžbenik, već prave svoj sopstveni unoseći u njega sve ono do čega dolaze istraživanjem. Skiner (Skinner, 1991, Ibidem) slično tome angažuje učenike prvog razreda u postavljanju problema koji čine bazu za kasnije aktivnosti rešavanja problema. Angažovanje učenika u postavljanju i rešavanju problema u svim ovim slučajevima podstiče razvoj fluentnosti, jedne od ključnih karakteristika kreativnosti.

Polustruktuiran tip imamo kada učenicima dajemo otvorenu situaciju i tražimo od njih da istraže njenu strukturu i dopune je, odnosno kompletiraju koristeći znanje, veštine, pojmove i relacije iz svog prethodnog iskustva (na primer, možemo da tražimo od njih da sastave matematički problem ili priču na osnovu date jednakosti, izraza, slike, figure, tabele itd.). Hart (1981) traži od učenika da sastave matematički problem koji odgovara odredjenom matematičkom izrazu. Njen cilj bio je da ispita kako se učenici snalaze kada je potrebno da konkretnim situacijama opišu date simboličke izraze (Silver, 1994). Vinograd zapaža da učenici obično kreiraju matematičke probleme sa kojima oni sami imaju poteškoća da ih shvate i reše (Winograd, 1991, prema Stoyanova, Ellerton, 1996). Ovakve aktivnosti pomažu učenicima i osposobljavaju ih da vrše generalizaciju, a matematiku čine mnogo smisaonijom. Takođe, učenici koji su imali ovakva iskustva na časovima matematike, pokazuju tendenciju prema integrisanju sadržaja nastave matematike sa sadržajima drugih predmeta (ibidem).

Struktuiranu situaciju postavljanja problema imamo kada su aktivnosti postavljanja problema zasnovane na nekom određenom i datom problemu. Od učenika tražimo da konstruišu nove probleme koji su na neki način povezani sa datim problemom ili njegovim rešenjem. Krutetski (Krutetskii, 1976) je, na primer, kako bi istražio strukturu matematičkih sposobnosti, kao alat istraživanja davao učenicima da dovrše ili da rekonstruišu specifičnu problemsku strukturu. U svom istraživanju koristio je probleme sa pitanjima koja su nedostajala, sa nedovoljno podataka i sa viškom informacija. Hašimoto je otkrio da traženje od učenika da postave problem koji je sličan nekom rešenom problemu može biti korisna nastavna metoda koja pruža uvid u učenikovo shvatanje i razumevanje matematičkih pojmova (Hashimoto, 1987 prema Stoyanova, Ellerton, 1996). Još jedan pristup nastavi, koji naročito podstiče razvoj fleksibilnosti mišljenja, razvili su Braun i Volter (Brown,Walter, 1983), pod imenom „What-if-not?" („Šta-ako-nije?"). Ova metoda se sastoji u tome da učenici generišu nove probleme iz prethodno rešenih varirajući uslove ili ciljeve originalnog problema.

Mada su prednosti koje postavljanje problema pruža zaista mnogobrojne, ipak bi trebalo ukazati i na neke slabosti. Silver (1994) je zabeležio da neke studije ukazuju da postavljanje problema može izazvati izvestan otpor kod učenika, jer ove aktivnosti, osim što zahtevaju misaone sposobnosti višeg reda, odgovornost za učenje u većoj meri prebacuju na samog učenika. Teškoću za učenike može predstavljati i činjenica da nastava koja koristi postavljanje problema odstupa od tradicionalne šeme nastave matematike koja koristi isključivo probleme sa jednim tačnim odgovorom ili rešenjem, a na koje su učenici navikli. Slično, u svojoj studiji Silver i Mamona (1989, prema ibidem) su utvrdili da postoji izvesna odbojnost srednjoškolskih nastavnika prema zadacima u kojima se traži da postavljanje problema. Smatramo, da razlog ovome može biti i činjenica da je za pripremu jednog časa na kome će se koristiti aktivnosti postavljanja problema potrebno uložiti mnogo više vremena i truda. Odgovornost nastavnika je veća. Potrebno je da osmisli situacije koje će učenike podstaći da samostalno generišu svrsishodna pitanja i zadatke. Pri tome, potrebno je izabrati situacije i aktivnosti koje su u matematičkom smislu vredne. Jedan takav čas se nikada ne može u potpunosti isplanirati, zato što nastavnik ne može da predvidi sve moguće odgovore učenika. Može se desiti da učenici kreiraju takva pitanja i zadatke na koje možda ni sam nastavnik nema odgovor. Takođe, trebalo bi uzeti u obzir da većina nastavnika tokom svog školovanja nije imala priliku da iskusi nastavne aktivnosti ovakvog tipa.

3 Neki mogućnosti primene aktivnosti i situacija postavljanja problema u početnoj nastavi matematike

Nastavnik predstavlja jedan od ključnih faktora nastavnog procesa. Na njemu je da izabere, osmisli, pripremi situacije i aktivnosti koje će učenike angažovati u relevantnim i svrsishodnim situacijama i aktivnostima rešavanja i postavljanja problema. Stoga, nameće se pitanje da li su i u kojoj meri nastavnici upoznati sa mogućnostima i prednostima koje pružaju situacije i aktivnosti postavljanja problema. Prema našim saznanjima, aktivnosti postavljanja problema se skoro uopšte ne koriste u nastavi matematike u školama u Srbiji. U početnoj nastavi matematike mali procenat učitelja koristi situacije u kojima od učenika traži da osmisle tekst zadatka na osnovu zadatog izraza ili jednakosti (Mihajlović, 2012), ali se ova aktivnost uglavnom završava saopštavanjem teksta zadatka, bez ikakve dublje analize produkata učenika. Kao što smo već naveli, priprema časova ovakvog tipa zahteva od nastavnika i više vremena, ali i promišljanje da li je neka situacija ili aktivnost dovoljno podsticajna i vredna u matematičkom smislu, odnosno koja znanja i veštine će učenici steći postavljanjem problema u datoj situaciji. Najveću prepreku za korišćenje aktivnosti i situacija postavljanja problema za nastavnike predstavlja nedostatak odgovarajuće relevantne literature i modela istih na srpskom jeziku. Literatura je na stranom jeziku, a u udžbenicima skoro da i nema drugih tipova matematičkih problema osim onih tradicionalnih. Sve ovo nameće potrebu da se više pažnje posveti osposobljavanju nastavnika, tokom redovnih studija i kroz programe stručnog usavršavanja, za pripremu i realizaciju časova na kojima će učenici samostalno ili uz njihovu pomoć postavljati probleme.

U ovom delu rada prikazali smo neke mogućnosti i primere korišćenja aktivnosti i situacija postavljanja problema u početnoj nastavi matematike. Smatramo da treba napomenuti da ne mora čitav čas biti posvećen postavljanju problema, kao i da se neki primeri ne moraju obavezno i isključivo raditi na samo jednom času. Dakle, vreme za rad na aktivnostima ovog tipa nije fiksirano, utvrđeno. Cilj je omogućiti učenicima da samostalno konstruišu matematičke ideje razvijajući tako ne samo svoje znanje i veštine, već i svoje mišljenje i kreativnost.

Učenicima kao izvor za postavljanje problema možemo ponuditi slike (iz časopisa, novina, knjiga i sl.), ilustracije (iz udžbenika), različite tabele, grafikone, dijagrame. Izvor za generisanje problema može biti i tekst (na primer, neka priča, bajka, članak iz novina i sl.). Možemo koristiti i tradicionalne matematičke probleme koje nalazimo u udžbenicima matematike. Izostavljanjem pitanja i nekih podataka iz zadatka, otvaramo mogućnost da učenici sami generišu što više problema na osnovu onog što je dato.

Primer 3.1. (Udžbenik za treći razred osnovne škole, prvi deo, Kreativni centar, str. 60) Originalni zadatak iz udžbenika glasi: *Nataša je sama kod kuće i može da telefonira koliko želi. Prvo je pričala sa Jelenom* 22 *minuta. Posle je zvala Milanu i sa njom razgovarala* 28 *minuta duže, a sa Nikolom je razgovor trajao* 13 *minuta kraće nego sa Milanom. Koliko je razgovarala sa Milanom? Koliko je trajao razgovor sa Nikolom? Sa kim je najduže razgovarala? Sa kim najkraće? Koliko je ukupno razgovarala?* Modifikacija ovog zadatka bi mogla da bude izostavljanje pitanja. Tražimo od učenika da sami otkriju šta sve možemo da izračunamo na osnovu datih podataka, odnosno da pronađu što više podataka koji se mogu izračunati na osnovu datih uslova zadatka. Osim prvobitnog cilja, a to je uvežbavanje postupaka računskih operacija, modelovanje tekstualnih zadataka u matematičke izraze, utvrdjivanje odnosa za toliko veći i za toliko manji broj, nastavnik sada kroz pitanja koja kreiraju sami učenici ima uvid u kvalitet i strukturu njihovih matematičkih znanja, kao i u proces matematičkog mišljenja. Nakon kreiranja odgovarajućih pitanja, nastavnik može da kao dodatnu aktivnost traži od učenika da menjaju pojedine uslove zadatka ili da dodaju nove.

Primer 3.2. (Udžbenik za četvrti razred osnovne škole, prvi deo, Kreativni centar, str. 39). Iskoristićemo tabelu datu u okviru jednog zadatka u udžbeniku matematike za četvrti razred (tabela 1). Učenicima možemo prikazati tabelu i tražiti od njih da sami formulišu što više tekstualnih problema koji će koristiti neke od podataka iz date tabele.

Država	Broj stanovnika
Grčka	10 668 354
Italija	58 103 033
Austrija	8 184 691
Srbija	7 397 651
Nemačka	82 431 390
Mađarska	10 006 835
Velika Britanija	60 441 457

Tabela 1: Primer iz udžbenika za četvtri razred osnovne škole

Učenicima na ovaj način pružamo mogućnost da osim uvežbavanja algoritama računskih operacija, razvijaju svoje verbalne sposobnosti, sposobnosti pravilnog pismenog izražavanja, ali i da uspostavljaju relevantne matematičke veze i ideje. Shvatiće važnost preciznog formulisanja tekstualnih problem, i pružiće im se mogućnost za korelaciju sa drugim nastavnim predmetima i realnim životnim situacijama. Bez obzira na činjenicu da možda neće svi učenici biti uspešni u generisanju problema, ovakva aktivnost za njih predstavlja važno iskustvo. Sa druge strane, ovi učenici se mogu uspešno angažovati u rešavanju matematičkih problema koje su sastavili drugi učenici.

Primer 3.3. Učenicima čitamo sledeći zadatak: *Matija je sinoć slavio svoj rođendan. Zvono na ulaznim vratima je pritisnuto ukupno* 10 *puta. Kada je prvi put zazvonilo stigao je samo jedan gost. Svaki sledeći put kada je zazvonilo stigla su tri gosta više nego pri prethodnom zvonjenju. Kako može da glasi pitanje? Sastavi što više pitanja koja su na neki način povezana sa ovim zadatkom.*

Učesnici kreiraju pitanja koji zavise od njihovog matematičkog znanja, imaginacije ili kreativnosti, ali i prethodnih iskustava u rešavanju problema. Naglasak nije na uvežbavanju procedura, već da se učenicima omogući da razvijaju matematičke ideje.

Primer 3.4. Kada od učenika tražimo da na osnovu neke date slike kreiraju sopstvene matematičke probleme, onda zapravo dobijamo uvid u njihovo razumevanje matematičkih koncepata. Ovo je veoma dobra vežba ukoliko želimo da dobijemo informacije o njihovom shvatanju smisla računskih operacija. Još jedan aspekat je uočavanje kvaliteta veza koje učenici uočavaju i uspostavljaju sa realnim situacijama. Na primer, učenik generiše zadatak sledećeg sadržaja: *Mama je juče umesila* 3450 *kolača, a danas je umesila* 420 *kolača više. Koliko je ukupno kolača umesila za ova dva dana?* Bez obzira na ispravno korišćenje matematičkih odnosa i operacija u zadatku, ne treba zanemariti činjenicu da je realni kontekst zadatka nekorektan, odnosno da brojevne vrednosti koje se koriste u zadatku ne oslikavaju realne mogućnosti.

Primer 3.5. Čak i na najmlađem školskom uzrastu uz jednostavne primere u kojima se od učenika traži da osmisle tekst koji bi odgovarao nekom matematičkom izrazu (na primer: 5+2) možemo uvežbavati razumevanje odgovarajućih računskih operacija i podstaći razvoj misaonih operacija. Učenici bi trebalo da osmišljavaju situacije čijim apstrahovanjem se dobija navedeni izraz. Pri tome, osim što imaju mogućnost da vrše povezivanje sa realnim situacijama, učenici razvijaju fluentnost, fleksibilnost, ali i originalnost u svojim odgovorima. Ovakve aktivnosti, takođe, omogućavaju nastavniku da vrši diskusiju u odeljenju i da podstiče učenike da međusobno razmenjuju mišljenje. Razvijaju se kreativno i logičko mišljenje, rasuđivanje i verbalne sposobnosti.

Primer 3.6. *Izračunaj koliko je* $45 \cdot 3$*, a zatim na osnovu toga osmisli sam nove zadatke koje ćeš rešiti koristeći ono što si već izračunao.*

Odgovori učenika, odnosno matematički zadaci koje sastavljaju daju nam informaciju o kvalitetu i širini njihovih znanja, o eventualnim „šupljinama” i propustima. Ovaj zadatak nema jedno, jedinstveno rešenje, i kao takav omogućava učenicima da razvijaju fluentnost, fleksibilnost i originalnost mišljenja. Ovakvi primeri nastavniku mogu služiti i kao svojevrsna metoda procene i pomoći mu u pripremi nastavnih aktivnosti na narednim časovima.

Npr. neki od primera koje učenici mogu dati (Mihajlović, 2012) su:

$$\begin{array}{llll} 45 \cdot 3 = 135 & 3 \cdot (40+5) = 135 & 3 \cdot 45 = 135 & (6:2) \cdot 45 = 135 \\ 135 : 45 = 3 & 3 \cdot 450 = 1350 & 6 \cdot 45 = 270 & \text{itd.} \end{array}$$

Primer 3.7. Možemo od učenika da tražimo da generišu zadatke za druge učenike:

1. *Sastavi zadatak koji bi bio interesantan tvojim drugovima iz odeljenja.*
2. *Sastavi zadatke za radni listić kojima bi tvoji drugovi trebalo da provežbaju sve što ste učili o jednačinama.*
3. *Sastavi jedan lak zadatak, jedan srednje težine i jedan težak iz oblasti Obim trougla.*

Ovakve aktivnosti mogu otkriti nastavniku dosta o znanjima učenika i razumevanju određenih sadržaja, i kao i kod prethodnog primera poslužiti u planiranju budućih nastavnih aktivnosti. Osim matematičke strane ovakvih zadataka, učenici vežbaju pismeno izražavanje.

Primer 3.8. *Marko je na putu do kuće ispustio listić sa zadatkom koji mu je učiteljica dala za domaći. Listić je upao u baru, tako da kada ga je Marko izvukao video je da su se neki delovi zadatka izbrisali. Na slici možete videti šta je ostalo na Markovom listiću* (slika 1).

Slika 1: Izgled zadatka

Pokušajte da smislite kako je sve mogao da glasi Markov zadatak, pa ga onda rešite.

Dok rade na ovakvom tipu matematičkog zadatka, osim postavljanja problema, učenici istovremeno uvežbaju i veštine rešavanja problema. Kada dopune zadatak, nastavnik ih podstiče da provere da li se taj zadatak može rešiti. Odnosno, zajedno sa učenicima vrši refleksiju o urađenom, upućuje ih da provere da li su svi dati podaci u zadatku u skladu sa onim traženim, da li imamo manjak, ili možda višak podataka, da li je pitanje moglo da glasi drugačije itd.

Primer 3.9. Učenicima saopštavamo da ćemo igrati jednu strategijsku igru. Igra izgleda ovako: *Stavićemo* 5 *žetona u jedan red. Igra se tako što najpre igra jedan, pa zatim drugi igrač. Svaki put, igrač ima pravo da uzme jedan ili dva žetona (po izboru). Pobednik je onaj koji uzme poslednji žeton, tj. žetone.*

Treba da odgovorimo na sledeća pitanja:

1. Da li možemo da nađemo kako treba da igra prvi igrač da bi uvek pobeđivao (pobedničku strategiju)?

2. Da li je igra „fer"? (Igra je „fer" ako svaki igrač ima podjednaku šansu da pobedi.)

3. Menjajući neka pravila ili delove igre, napravite svoju sopstvenu.

Poslednji zahtev predstavlja aktivnost postavljanja problema. Kako bismo pomogli učenicima možemo da koristimo strategiju koju predlažu Brown i Volter (1983), „Šta-ako-ne?". Učenicima možemo postaviti sledeća dodatna pitanja: *Šta bi bilo sa igrom ako bi broj žetona na početku igre bio paran? Šta bi bilo ako bi igrači uzimali jedan ili tri žetona?* Na nivou učenika mlađih razreda osnovne škole učenici će do odgovora dolaziti eksperimentisanjem, istraživanjem (u starijim razredima osnovne škole, i u srednjoj školi može se kao polazna osnova koristi igra „Nim").

4 Zaključak

Nastava kao sistem predstavlja jedno široko didaktičko i metodičko područje, koje podrazumeva aktivno, samostalno i kreativno učešće učenika u svim fazama nastavnog procesa. Međutim, uprkos tome, u praksi još uvek preovladava tradicionalna nastava u kojoj se uloga nastavnika prenaglašava, komunikacija između učenika i nastavnika je jednosmerna, a učenik je u poziciji objekta. Osnovni cilj procesa učenja prema tradicionalnom gledištu jeste bogaćenje ili gomilanje znanja, pri čemu se količina činjenica i podataka koje bi učenici trebalo da usvoje povećava iz dana u dan. Nasuprot ovom stanovištu, konstruktivistička teorija saznanja zastupa uverenje da se proces učenja odvija tako što učenici aktivno grade ili konstruišu znanje. Ovo je razlog zašto se u nastavi pristupa odabiru onih oblika rada, nastavnih metoda i sistema koji stvaraju uslove za maksimalan razvoj mišljenja i sposobnosti dece. Do znanja se može doći na različite načine, ali će najkvalitetnija biti znanja stečena sopstvenim saznajnim naporima. U skladu sa ovim javljaju se brojni inovativni modeli u nastavi, čiji je cilj stavljanje učenika u položaj aktivnog subjekta, istraživača, saradnika, jednog od kreatora nastavnog procesa i korisnika najraznovrsnijih izvora informacija. Jedan od takvih nastavnih modela jeste i nastava koja koristi situacije i aktivnosti postavljanja problema. Bez obzira na prednosti koje postavljanje problema pruža i učeniku i nastavniku, ipak se ovakve aktivnosti malo koriste u praksi. Osim što priprema časova ovakvog tipa zahteva od nastavnika više vremena i truda, veliku teškoću predstavlja i nedostatak odgovarajuće relevantne literature i modela na srpskom jeziku. Sve ovo ukazuje da bi posebnu pažnju trebalo usmeriti ka pisanju i publikovanju odgovarajućih metodičkih priručnika sa primerima i konkretnim modelima, ali i osposobljavanju nastavnika kroz programe stručnog usavršavanja i tokom redovnih studija.

Literatura

[1] R. Abu-Elwan, „The Development of Mathematical Problem Posing Skills for Prospective Middle School Teachers", In A. Rogerson (Ed.), Proceedings of the International conference on Mathematical Education into 21st Century, II. Cairo, 1–8 (1999).

[2] H. Akay, N. Boz, „The Effect of Problem Posing Oriented Analyses-II Course on the Attitudes toward Mathematics and Mathematics Self-Efficacy of Elementary Prospective Mathematics Teachers", Australian Journal of Teacher Education, 35(1), 59–75 (2010).

[3] „A national statement on mathematics for Australian schools", Australian Education Council Canberra (1991).

[4] S. I. Brown, M. I. Walter, „The art of problem posing", Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates (1983).

[5] O. Chapman, „Prospective elementary school teachersвЂ™ ways of making sense of mathematical problem posing", PNA, 6(4), 135–146 (2012).

[6] B. B. Demir, „The effect of instruction with problem posing on tenth grade studentsвЂ™ probability achievement and attitudes toward probability", Master thesis, (2005).

Retrieved August 13th, 2010, http://etd.lib.metu.edu.tr/upload/12606884/index.pdf?origin=publication_detail

[7] D. L. English, „Promoting a problem-posing classroom", Teaching children Mathematics, 4 (3), NCTM, 172–179 (1997a).

[8] L. English, „The development of fifth-grade childrenвЂ™s problem-posing abilities", Educational Studies in Mathematics, 34(3), 183–217 (1997b).

[9] H. Ergun, S. Gunduz, „Assessment of physics problems posed by students" Proceedings of INTED2010 Conference, Valencia, Spain, 2605–2614 (2010).

[10] J. M. Fetterly, „An exploratory study of the use of a problem-posing approach on pre-service elementary education teachersвЂ™ mathematical creativity, beliefs, and anxiety", Dissertation, Florida State University, School of Teacher Education, (2010).

Retrievd June 11th, 2012,
http://etd.lib.fsu.edu/theses/available/etd-07312010-124514/

[11] V. A. Krutetskii, „The psychology of mathematical abilities in school children", Chicago: University of Chicago Press (1976).

[12] S. S. Leung, E. A. Silver, „The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers" Mathematics Education research Journal, 9(1), 5–24 (1997).

[13] T. Lowrie, „Free Problem posing: Year 3/4 students constructing problems for friends to solve". In J. Truran, K. Truran (Eds.), Making a difference. Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated. Panorama, South Australia, 328–335 (1999).

[14] A. Mihajlović, „Razvijanje kreativnosti u početnoj nastavi matematike metodom otvorenog pristupa", (doktorska disertacija), Fakultet pedagoških nauka Univerziteta u Kragujevcu, Jagodina (2012).

[15] National Council of Teachers of Mathematics, „Curriculum and evaluation standards for school mathematics", Reston, VA, (1989).

[16] A. A. Nicolaou, G. N. Philippou, „Efficacy beliefs, ability in problem posing, and mathematics achievement", In D. Pitta-Pantazi, G. Philippou (Eds.), Proceedings of the V Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Larnaca, Cyprus: Department of Education, University of Cyprus, 308–317 (2004).

[17] E. Pehkonen, „The State-of-Art in Mathematical Creativity", Fostering of Mathematical Creativity, Helsinki, ZDM (1997).

Retrieved September 15th, 2007,
`http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/`

[18] E. Pehkonen, „Problem solving in mathematics education in Finland", Unpublished manuscript, University of Helsinki at Finland (2007).

Retrieved February 2012,
`http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/ALL/Papers/PEHKON.pdf`

[19] G. Polya, „How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method", Princeton University Press (1973).

[20] E. A. Silver, „On mathematical problem posing", For the learning of mathematics, FLM Publishing Association, 14 (1), 19–28 (1994).

[21] E. A. Silver, „The nature and use of open problems in mathematics education: mathematical and pedagogical perspectives", International Reviews on Mathematical Education, 27(2), 67–72 (1995).

[22] E. A. Silver, „Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing", Pittsburgh (USA), ZDM, 75–80 (1997).

[23] F. M. Singer, N. Ellerton, J. Cai, E. C. K. Leung, „Problem posing in mathematics learning and teaching: A research agenda", In: B. Ubuz (ed.), Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1, Ankara; Turkey: PME, 137–166 (2011).

[24] E. Stoyanova, N. E. Ellerton, „A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics", In P. C. Clarkson (Ed.), Technology in mathematics education, Melbourne, Victoria: Mathematics Education Research Group of Australasia, 518–525 (1996).

[25] „Zakon o osnovnom obrazovanju i vaspitanju", Ministartsvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije (2013).

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Teorijske osnove rešavanja problemskih zadataka u početnoj nastavi matematike

Mirko Dejić
Učiteljski fakultet Beograd
Univerzitet u Beogradu
mirko.dejic@uf.bg.ac.rs

Ivan Jovanović
Osnovna škola Valjevo
Valjevo
ivanajovanovic014@gmail.com

Pregledni rad

Apstrakt

Rešavanje problemskih zadataka u nastavi matematike ima niz pozitivnih efekata od kojih se u prvi plan ističu: aktiviranje misaonih procesa učenika, misaono angažovanje učenika, izazivanje intelektualne radoznalosti učenika, podsticanje logičkog, kritičkog, apstraktnog i stvaralačkog mišljenja, motivisanje učenika, podsticanje darovitosti učenika, negovanje samostalnosti u radu i sl. Zbog mnogobrojnih kvaliteta do kojih se dolazi rešavanjem problemskih zadataka, pre svega, zbog njihovog pozitivnog uticaja na misaoni razvoj učenika, oni dobijaju sve veći značaj u početnoj nastavi matematike. To je još razumljivije ako se ima na umu da učenike od prvih dana školovanja treba učiti da misle i logički rasuД‘uju, odnosno osposobljavati ih za rešavanje problema. Teškoće i prepreke, koje su glavna karakteristika problemskih zadataka, su upravo ono što podstiče misaoni razvoj učenika i ima pozitivan uticaj na proces učenja. **Ključne reči:** problemski zadaci, problem, mišljenje, nastava matematike, misaoni razvoj učenika.

Za rešavanje problemskih zadataka neophodno je uspostavljanje veza i odnosa između datih i traženih podataka. U procesu pronalaženja odnosa između podataka učenici ulažu misaoni napor i rasuđuju o problemima. Govoreći o rešavanju problemskih zadataka posebnu pažnju treba obratiti na metode njihovog rešavanja. Metode rešavanja problemskih zadataka u početnoj nastavi matematike svrstane su u grupe: direktne metode rešavanja matematičkih problema (sintetička, analitička i analitičko-sintetička) i indirektne metode rešavanja problemskih zadataka (pomoću geometrijskih modela: metoda duži, metoda tablice, pravougaonika, Venovog dijagrama i fokusnog dijagrama; pomoću logičko-aritmetičkih modela: metoda inverzije, lažne pretpostavke i metoda logike). Rešavanje problemskih zadataka pomoću modela je od velikog značaja jer se na taj način podstiču misaone sposobnosti učenika i učenici postepeno navikavaju na samostalno izgrađivanje modela, što ih postepeno osposobljava i za samostalan život i rad.

U radu se ukazuje na teorijske osnove rešavanja problemskih zadataka u početnoj nastavi matematike, na sposobnosti učenika koje su od značaja za proces rešavanja problemskih zadataka, na značaj rešavanja problemskih zadataka, odnosno njihov pozitivan uticaj na proces učenja u nastavi matematike. Takođe, ukazuje se i na metode rešavanja problemskih zadataka u početnoj nastavi matematike.

1 Uvod

U nastavi matematike, pa samim tim i u početnoj nastavi matematike, preko zadataka se ostvaruju svi zadaci nastave matematike. Od izbora zadataka u nastavi matematike zavisi koje ćemo zadatke nastave matematike uspeti da ostvarimo, kao i kvalitet nastave. Uloga matematičkih zadataka je u tome što, s jedne strane, konačan cilj nastave matematike jeste da učenici ovladaju metodama rešavanja sistema matematičkih zadataka, a, s druge strane, ona je određena i time što je cilj nastave matematike moguće postići prvenstveno rešavanjem sistema matematičkih zadataka. Na taj način, rešavanje zadataka u nastavi matematike javlja se i kao cilj i kao sredstvo nastave.

Ako, sa druge strane, posmatramo cilj i zadatke nastave matematike za osnovnu školu, videćemo da se kao važan zadatak nastave matematike ističe potreba da „razvija učenikovu sposobnost posmatranja, opažanja i logičkog, kritičkog, stvaralačkog i apstraktnog mišljenja“ (*Nastavni program matematike za osnovnu školu u Republici Srbiji,* 1996: 3).

Savremena didaktika nastoji da pronađe podesne oblike uspešnog učenja i organizacije nastave koji će povećati efikasnost nastave. Kada se govori o efikasnosti učenja ističe se apstraktno mišljenje i ovladavanje naučnim metodom mišljenja. Apstraktno mišljenje se sve više ističe, jer u uslovima sve većeg nagomilavanja naučnih saznanja i činjenica, apstraktno mišljenje olakšava brže snalaženje i poimanje procesa. Između apstraktnog mišljenja i rešavanja problema postoji uska povezanost u tom smislu što je rešavanje problema "oruđe i funkcija razvijanja apstraktnog mišljenja, naučnog metoda mišljenja i prirodan oblik ispoljavanja intelekta i drugih svojstava ličnosti" (Prodanović, Ničković, 1974: 354).

Navedeno govori o važnosti problemskih zadataka u početnoj nastavi matematike, jer učenike od prvih dana školovanja treba učiti da misle i logički rasuđuju, odnosno osposobljavati ih za rešavanje problema. Takav način rada, od prvih dana školovanja, pripremaće mlade generacije da se snađu u brojnim problemima svakodnevnog života. Prema rečima V.V. Drozine, V.L. Diljmana i D.A. Drozina, kako je rešavanje nestandardnih zadataka jedan od aspekata kreativnosti, to je za uspešno obrazovanje, u tom procesu neophodno naučiti učenike stvaralačkim aktivnostima (2010: 9).

Prvo na šta valja ukazati pri razmatranju problemskih zadataka, jeste činjenica da u literaturi ovi zadaci imaju više sinonimnih naziva: nestandardni zadaci, logički zadaci, zanimljivi zadaci, mozgalice, glavolomke itd. Mi smo se opredelili za termin problemski zadaci i pod njima podrazumevamo zadatke koji u sebi sadrže neku prazninu, teškoću za učenike i za čije rešavanje je neophodno ulaganje misaonih napora i primena neke od metoda rešavanja problemskih zadataka.

Kada govori o problemu M. Vilotijević u *Didaktici I* jasno objašnjava razliku između zadatka i problema: "Zadatak je mnogo širi i obuhvatniji pojam. U tom okviru od učenika se može tražiti da zapamti neke činjenice, da protumači neki sadržaj uz sve poznate podatke, da, na osnovu nekoliko očiglednih primera, izvuče zaključak, da uradi nešto na osnovu ranije više puta primenjivanog i poznatog obrasca. Znači, da rutinski primeni poznate i primenjivane operacije. U široki raspon, koji ima pojam *zadatak*, smešta se i pojam *problem* koji jeste zadatak, ali sa mnogo posebnosti koje treba odrediti" (1999: 241).

Problem je, prema M. Vilotijeviću (1999), zadatak koji ima sledeće odlike: a) nešto nepoznato, neku prazninu koju treba otkriti i popuniti na osnovu podataka i odnosa koji nisu izričito dati; b) različit broj mogućnosti za rešavanje (jedna ili više); v) veliku kompleksnost (za rešavanje je potreban veliki broj složenih logičkih operacija); g) mogućnost za rešenje ne pomoću nekog ustaljenog obrasca (algoritma), nego je za rešavanje potreban stvaralački pristup i iskustvo; d) rešavanjem problema produbljuje se znanje, usvajaju nove strukture saznavanja i razvijaju mentalne sposobnosti kod učenika.

Prema rečima Ceha (Zech) rešavanje problema "je suštinski usmereno na jedan vid mišljenja, koji se opisuje kao *ponašanje pri rešavanju problema* ili *produktivno mišljenje*" (1998: 359).

Kod problemskih zadataka "nije lako utvrditi veze između datih i traženih podataka" (Dejić, Egerić, 2003: 276). Sa druge strane teškoće na koje učenik nailazi prilikom rešavanja problemskih zadataka imaju pozitivan uticaj na proces učenja, jer kako ističe S. Maričić, "nema istinskog učenja, ako učenik tokom usvajanja znanja ne nailazi na teškoće, prepreke, koje sam svojom misaonom aktivnošću razrešava" (2006: 41).

U svom radu J. Ranđelović (2005) prihvata poznato značenje reči *problem* – kao jezičke odrednice grčkog porekla sa značenjem: zagonetka, problem, sporno ili nerešeno pitanje, pitanje koje se teško rešava.

Govoreći o problemskim zadacima, M. Dejić i M. Egerić ističu da im je velika uloga "u razvijanju stvaralačkog mišljenja" (2003: 276). Problemske zadatke "treba zadavati darovitima za matematiku i na taj način podsticati tu darovitost" (Isto, 2003: 276).

Prema rečima V.V. Drozine, V.L. Diljmana i D.A. Drozina nestandardni zadatak je onaj koji u sebi sadrži nešto originalno i kreativno (2010: 6). Pomenuti autori, objašnjavajući vezu između nestandardnih zadataka i kreativnosti, ističu da su kreativnost i nestandardni zadaci nerazdvojni (Isto 2010: 9).

Ono što je karakteristično za problemske zadatke jeste skrivenost odnosa između: datog i traženog (otkrivanje jasnih relacija između datog i traženog), poznatog i nepoznatog, eksplicitnog i implicitnog, starog i novog. Takođe, problemske zadatke odlikuju zanimljivost, zagonetnost, neočekivana rešenja, pa stoga deluju kao snažno motivaciono sredstvo i bude interes za matematiku.

M. Stevanović i A. Muradbegović (1990) ističu da rešavanje problema podrazumeva aktivnosti u sledećoj trijadi:

1. problemska situacija,
2. aktivnost učenika, i
3. ostvarenje cilja.

U početnoj problemskoj situaciji dati su osnovni podaci ali pomoću njih učenik mora naći nove. Učenik je pred teškoćom i da bi je otklonio u pomoć priziva prethodna znanja i iskustva i ulaže određene misaone napore. Napušta se stereotipno i rigidno ponašanje i traže se novi putevi rešavanja. Učenik mora otkriti nove veze i odnose u pojavama koje su predmet zadatka. Subjekt je u rešavanju problema misaono aktivan.

Problemska situacija ima svoje sastavne delove, a to su: podaci, znanje, motivacija, teškoća, prepreka i neizvesnost. Aktivnost učenika podrazumeva: sposobnosti, metode, oblike i sredstva. Ostvarenje cilja ima sledeće sastavne delove: rešenje problema, nova znanja, zaključci i generalizacije.

Prema rečima V.V. Drozine, V.L. Diljmana i D.A. Drozina, *struktura stvralačkog procesa* sadrži u sebi sledeće aspekte: uvideti problem – mobilisati specijalna znanja – sačiniti zaključak – oformiti (oblikovati) u obliku znakova (simbola) – proveriti (2010: 33). Dok se *struktura rešavanja zadatka* sastoji iz: analize zadatka – šematskog zapisa – traženja sposobnosti za rešavanje – implementacije rešenja – provere rešenja – istraživanja– formulisanja odgovora – analize rešenja (Isto, 2010: 33). Poređenjem strukture rešavanja zadataka i strukture stvaralačkog procesa, dolaze do zaključka, da se po svojoj suštini podudaraju, što govori u prilog važnosti rešavanja problemskih zadataka u nastavi matematike. Rešavajući zadatke prema datoj strukturi, učenici će se postepeno osposobljavati i za stvaralački process.

Pri rešavanju problemskih zadataka Polja (G. Polya) navodi četiri glavne tačke za rešavanje matematičkih problema:

Prvo: moraš da *razumeš zadatak*.

Drugo: moraš da izradiš *plan* za rešavanje.

Treće: *sprovedi* svoj plan.

Četvrto: *proveri* dobijeno rešenje.(Polja, 1966: strana omota).

Govoreći o psihološkom procesu pri rešavanju problema, Ceh navodi sledeće četiri faze:

1. pojavljivanje pitanja za razmišljanje;
2. pokušaj pojašnjavanja;
3. ideja za rešenje;
4. intelektualna obrada ideje za rešenje“ (1998: 375).

Ovde ćemo navesti i opštu šemu stvaralačke aktivnosti pri rešavanju nestandardnih zadataka koju srećemo kod V.V. Drozine, V.L. Diljmana i D.A. Drozina:

1. uvideti suštinu problema;

2. usmeravanje znanja: pronalaze se neophodna znanja, putevi, sposobnosti za rešavanje zadataka, traženje (privlačenje) iskustva za postavljanje hipoteza;

3. sprovođenje eksperimenta i održavanje specijalnih zapažanja, zatim njihovo objedinjavanje u vidu zaključaka i hipoteza;

4. formiranje rezultata rešavanja nestandardnih zadataka u obliku matematičkih, grafičkih, predmetnih struktura;

5. uspostavljanje socijalnog značaja dobijenog produkta (2010: 33-34).

Pri primeni problemskih zadataka u početnoj nastavi matematike učitelj mora voditi računa o mogućnostima njihove primene. Mora uzeti u obzir sledeće činioce: uzrast učenika, individualni psihofizički razvoj, emocionalno stanje, motivaciju, obim informacija kojima učenik raspolaže, osetljivost za uviđanje problema, način na koji su se sticala znanja, kao i opredeljenje samog nastavnika. Mogućnosti učenika zavise od većeg broja činilaca: nivoa psihofizičkog razvoja, obima informacija u pojedinim područjima, stečenih iskustava, emocionalne zrelosti, motivacije koja utiče na aktivan odnos prema problemu i utiče na napor potreban za prisećanje neophodnih elemenata i činjenica. Shvatanjem problema počinje proces mišljenja. Zato je veoma važno kako će problem biti formulisan. Ako učenici razumeju problem, njegovo rešavanje će biti olakšano. Svakako „neophodno je da učenik ima *aktivan odnos* prema problemu, kako bi se kod njega oslobodio napor potreban za prisećanje relevantnih činjenica zakona, principa, pravila, podataka, formula i sl.“ (Đorđević, prema: Jukić i sar., 1998: 512). Obim informacija i iskustvo kojima učenik raspolaže u znatnoj meri određuju i kakav će stav učenik imati prema problemu i njegovom rešavanju. Sa druge strane, na obim informacija i iskustvo utiče i način na koji su znanja sticana. Korisnija su organizovana znanja, kao i znanja koja su učenici već primenjivali na različite načine.

Govoreći o mogućnostima primene rešavanja problema u nastavi, T. Prodanović i R. Ničković ističu da "s primenom rešavanja problema u nastavi treba početi od prvog dana školovanja pa čak i pre. Dugo je u psihološkoj nauci postojalo, a postoji i danas, gledište da su deca sposobna za rešavanje problema, odnosno za apstraktno mišljenje, tek posle 11. ili 12. godine. To gledište je ustupilo mesto optimističkoj i proverenoj činjenici da se elementi apstraktnog mišljenja rano javljaju, kao što početak mnogih drugih sposobnosti treba tražiti u ranijim uzrastima" (1974: 363). Prema navedenim autorima (1974), zadatak je didaktike da se pozabavi pitanjem: u kojoj formi i na koji način treba "režirati" probleme na pojedinim školskim uzrastima. Pri tom je sigurno da jedan isti saznajni problem ima svoju uzrasnu gradaciju po težini i dubini zahteva u suštini izučavane pojave i zakona. U prvim razredima osnovne škole rešavanje problema ne ide u dublje otkrivanje veza i odnosa. Razvojna linija kreće se, dalje, prema pravim oblicima naučnog mišljenja pri rešavanju saznajnih i praktičnih problema u završnim razredima osnovne i u srednjoj školi. Pri tome, osim ulaženja u suštinu, bitno je stvaranje navike kritičkog i stvaralačkog mišljenja učenika u nastavi putem rešavanja problema, a sa stvaranjem te navike treba početi od prvih dana školovanja.

Pri davanju problema, nastavnik mora pravilno odmeriti zahteve. Zahtevi mogu biti:

1. znatno niži od stvarnih učeničkih mogućnosti,
2. na nivou učeničkih mogućnosti,
3. nešto viši od mogućnosti učenika,
4. daleko iznad mogućnosti učenika.

Odmeravanje zahteva je važno, jer ako su zahtevi ispod stvarnih mogućnosti učenika, učenik će ih lako savladati i neće biti motivisan za dalji rad. Ako su zahtevi na nivou mogućnosti i ovde učenici bez napora dolaze do rešenja. Daleko viši zahtevi su za učenika teški i brzo odustaje od rešavanja. Najbolje je ako su zahtevi nešto viši od mogućnosti učenika, jer takvi zahtevi učenika "vuku napred". Ispred učenika se postavlja problem, ali se javlja želja da se problem savlada. Na potrebu odmeravanja zahteva ukazuju mnogi autori. Iste zahteve navodi i J. Đorđević. On smatra da su, takođe, najpovoljniji zahtevi nešto malo veći od učenikovih mogućnosti i da "ovakvi zahtevi i situacije su najpogodnije za intelektualni razvitak. One sadrže izvesne delove, elemente, podatke zasnovane na ranijim iskustvima, ali date u kombinaciji koja nešto malo prevazilazi mogućnosti učenika tako da vuče napred njihov intelektualni razvitak" (Prema: Jukić i sar., 1998: 509-510). Slično mišljenje nalazimo i kod S. Maričić: "Problem u zavisnosti od uzrasta učenika, ne sme biti lak. Problem koji učenici rešavaju bez napora, teškoća nema nikakvu funkciju. Ali isto tako on ne sme da prelazi određene granice. Ukoliko je problem lak on kod učenika izaziva monotoniju, nezainteresovanost, rešavanje tih problema se mehanizuje, učenik "tapka" u mestu, a treba svakim problemom koji se postavi pred učenike ići u "zonu narednog razvitka", kako to ističe Vigotski u svojim teorijskim postavkama (Maričić 2006: 53).

Moguće je izvršiti klasifikaciju problemskih zadataka. U radu M. Dejića i saradnika nailazimo na Lengauerovu klasifikaciju zanimljivih zadataka:

1. Zadaci koji ne zahtevaju ili skoro da ne zahtevaju nikakva matematička znanja i zasnovani su na oštroumnosti.
2. Zadaci koji pored bistrog uma zahtevaju i elementarna matematička znanja ili prisećanje onoga što je ranije u školi naučeno.
3. Pitanja i zadaci koji imaju za cilj proveru i preciziranje matematičkih znanja učenika. To su uglavnom neočekivana poređenja i zaključci, ponekad paradoksni i sl. Grupa ovih zadataka se deli na tri dela prema razredima u osnovnoj i srednjoj školi.

4. Grupa zadataka za ljubitelje teških problemskih matematičkih zadataka. Za rešavanje ovih zadataka potrebna je matematička priprema, ali ona ne prelazi obim školskog znanja.

5. Zadaci – šale, matematiči trikovi i zadaci za zabavu. (Lengauer, prema: Dejić i sar., 2013: 100).

Ovde valja ukazati da je navedena klasifikacija izvršena prema stepenu matematičkih znanja koja su potrebna za njihovo rešavanje. Moguće je izvršiti i drugačije klasifikacije problemskih zadataka. Tako, B.L. Kordemski izdvaja dve kategorije vannastavnih zadataka, a to su: a) zadaci bliski školskoj nastavi, ali teži (zadaci sa matematičkih takmičenja) i b) zanimljivi matematički zadaci. U okviru zanimljivih matematičkih zadataka, autor dalje vrši klasifikaciju prema sadržaju u skladu sa grupama sličnih operacija koje se koriste za rešavanje zadataka sa istom temom:

1. *Teški zadaci* (rešavanje je otežano, ali može biti ostvareno sredstvima matematičke oštroumnosti).

2. *Geometrija sa šibicama* (konstruisanje modela figure od šibica).

3. *Sedam puta meri, jednom seci* (menjanje figura pomoću sečenja).

4. *Veština uvek nalazi primenu* (elementarno-tehnička i praktična pitanja, čije rešavanje zahteva matematičko razmišljanje).

5. *Sa algebrom ili bez nje* (sadržaj nije bitan, operaciono jezgro: algebarski put rešavanja ili bilo koji drugi, ali uvek ima neka "fora" ili u samom načinu ili u upoređivanju načina rešenja).

6. *Matematika skoro bez računanja* (operaciono jezgro: operacija skoro da nema, ali za rešavanje je potrebno dobro rasuđivanje) (Prema: Dejić i sar., 2013: 100-101).

Bez obzira na klasifikaciju problemskih zadataka, ono što je zajedničko za sve njih je "njihova zanimljivost, problemski karakter, neočekivanost rešenja, zagonetnost, zavodljiv tekst, zadaci izlaze iz okvira klasičnih školskih zadataka – nešablonski zadaci (zahtevaju nešablonska rešenja), često ne zahtevaju neka značajnija matematička znanja, već se oslanjaju na logičko mišljenje, intuiciju i *zdrav razum*" (Dejić i sar., 2013: 101).

Kada se govori o rešavanju problemskih zadataka, moramo pomenuti etape rešavanja ovih zadataka. To su:

1. problemska situacija,

2. formulisanje problema,

3. analiza problemskog zadatka,

4. rešavanje problema i

5. provera tačnosti rešenja.

Pored problema, o čemu je već bilo reči, nezaobilazno je i razjašnjenje pojma *problemska situacija*. Prema rečima M. Vilotijevića: "Problemska situacija je početno psihičko stanje iznenađenja, upitnosti, velike zainteresovanosti i visoke umne i emocionalne napregnutosti pojedinca koji treba da reši zadati problem" (1999: 242).

Prema mišljenju M. Stevanovića: "U problemskoj situaciji se pokreće učenikovo stvaralačko mišljenje, razvija inicijativa, intelektualni nemir, emocionalna napetost. Kod učenika se javlja doživljaj, trenutna zbunjenost, tenzija i radoznalost" (1982: 93).

Formulisanje problema podrazumeva da učenici formulišu problem, postavljaju pitanja koja proističu iz problemske situacije (Maričić, 2006: 54). Dalje sledi analiza problemskog zadatka, koja podrazumeva izbor hipoteza za rešavanje problema, odnosno izbor metoda za rešavanje problema. Nakon toga učenici pristupaju rešavanju problema i na kraju proveravaju tačnost rešenja.

Ceh navodi opšte savete za rešavanje problema, koje Polja preporučuje:

1. *Princip racionalnosti*

   Nikada ne deluj protiv svog osećanja, ali traži jasne „racionalne“ razloge, koji govore za ili protiv svoga osećajnog shvatanja...!

2. *Princip ekonomisanja i princip neograničenosti*

   Ostani što više moguće kod zadatka...

3. *Princip izdržavanja i princip promene*

   Ne odustaj prerano!“ (Polja, prema: Ceh, 1998: 361).

Ove savete, koje autor navodi, moguće je koristiti u nastavi kao smernice učeniku i to u sledećem obliku:

1. Pokušaj da obrazložiš svoje ideje!

2. Iskoristi informacije koje imaš što više moguće, ali nemoj da se zalepiš za njih!

3. Nemoj odmah da odustaneš; pusti da ti misli malo lutaju! (Ceh, 1998: 362).

Ruski autori, V.V. Drozina, V.L. Diljman i D.A. Drozin, navode sledeći plan rešavanja zadataka:

1. Analiza teksta zadatka.

2. Šematski zapis uslova.

3. Traženje rešenja zadatka; sastavljanje plana rešenja.

4. Rešenje osobeno matematičkom zadatku – izračunavanje vrednosti numeričkog izraza.

5. Interpretacija rezultata proračuna, tj. dobijanje odgovora na pitanje.

6. Provera dobijenog odgovora (2010: 178).

Sličan plan navodi i N.B. Istomina, koja daje sledeći redosled operacija rešavanja zadataka:

1. Čitanje zadatka (shvatanje problema) i predstavljanje te situacije, koja je u njemu opisana.

2. Izdvajanje u tekstu uslova i pitanja, poznatih i nepoznatih.

3. Uspostavljanje veza među datim i traženim veličinama.

4. Izbor redosleda aritmetičkih operacija i sastavljanje plana rešavanja.

5. Zapis tih operacija i izračunavanje vrednosti, tj. zapis rešenja i odgovora.

6. Provera dobijenog odgovora (Prema: V.V. Drozina, V.L. Diljman i D.A. Drozin, 2010: 178).

Govoreći o rešavanju problemskih zadataka, M. Dejić i M. Egerić (2003) ističu da je put rešavanja zadataka, pa i problemskih sledeći:

1. razumevanje i analiza uslova zadatka,

2. stvaranje plana,

3. realizacija plana,

4. provera tačnosti, diskusija i interpretacija rešenja.

Ono na šta autori ukazuju jesu metode za rešavanje problemskih zadataka, čije poznavanje je neophodno da bi se napravio plan za rešavanje zadatka. Autori govore o direktnim i indirektnim metodama rešavanja problema u početnoj nastavi matematike. Kako rešavanje zadataka podrazumeva uspostavljanje veza između datih i traženih podataka, ako se te veze utvrđuju uz korišćenje originalnog problema onda se govori o *direktnim metodama*. Ukoliko se umesto originalnog problema, koriste odgovarajući modeli, onda se govori o *indirektnim metodama* rešavanja problemskih zadataka.

Ovde valja ukazati i na metode rešavanja problemskih zadataka. U literaturi se izdvajaju sledeće metode:

1. *Direktno rešavanje problema:*

   (a) analitička metoda;
   (b) sintetička metoda;
   (c) analitičko-sintetička metoda;

2. *Indirektno rešavanje problema:*
   (a) Matematičko-kibernetičko modelovanje;
   (b) Geometrijski modeli rešavanja problemskih zadataka u koje spadaju: metoda duži, metoda pravougaonika, metoda Venovog dijagrama, metoda fokusnog dijagrama;
   (c) Logičko-aritmetički modeli u koje spadaju: metoda inverzije, metoda lažne pretpostavke, metoda logike.

Sintetičkom metodom "povezuje se ono što je dato (što se može povezati) i traži ono što je nepoznato. Rezonovanje sintetičkom metodom je oblika: *Znamo, šta možemo dobiti?*" (Dejić, Egerić, 2003: 277). Prema rečima T. Malinovića i N. Malinović-Jovanović "kod sintetičkog rasuđivanja polazimo od datog, poznatog u zadatku i koristeći se uslovima zadatka dolazimo do nepoznatog, traženog" (2002: 315).

Kod *analitičke metode* "pretpostavi se da je nađeno ono što se traži, zatim se dovodi u vezu sa onim što je dato, što je poznato i iz toga izvodi zaključak. Rezonovanje kod analitičke metode je oblika: *Šta treba znati da bi se dobio odgovor?*" (Dejić, Egerić, 2003: 277). Prema rečima T. Malinovića i N. Malinović-Jovanović: "Pri analizi problemskog zadatka polazi se od pitanja, odnosno od onoga što se u zadatku zahteva i rasuđuje se: šta treba znati da bi se dobio odgovor na dato pitanje, a zatim: šta treba znati da bi se izračunalo ono što je neposredno potrebno za izračunavanje odgovora. Taj proces se nastavlja sve dok se dođe do onoga što se iz podataka datih u zadatku odmah može izračunati" (2002: 313-314).

Analitičko-sintetička metoda rešavanja zadataka podrazumeva da se zadatak rastavi na više manjih, prostijih, koji se zatim rešavaju sintetičkom metodom. Prema rečima T. Malinovića i N. Malinović-Jovanović "najveći broj problemskih zadataka rešava se analitičko-sintetičkom metodom rasuđivanja, koja predstavlja pravu matematičku i uopšte naučnu metodu mišljenja, jer, dijalektički, nema analize bez sinteze u rešavanju problemskih zadataka" (2002: 316).

Metoda duži je indirektna metoda rešavanja problemskih zadataka u kojoj se kao model koji menja original koristi duž. Ova metoda podrazumeva predstavljanje datih veličina pomoću duži, pri čemu jednake veličine moraju biti predstavljene jednakim dužima, manje veličine kraćim dužima, a veće dužim dužima. T. Malinovića i sar. (1999) pod metodom duži podrazumevaju grafičko ilustrovanje problemskih zadataka pomoću duži.

Metoda pravougaonika je, takođe, indirektna metoda rešavanja problemskih zadataka gde se kao model koristi pravougaonik. "Ako se neke veličine u zadatku mogu predstaviti kao proizvod dveju drugih veličina, onda se taj proizvod grafički predstavlja kao površina pravougaonika. Stranice tog pravougaonika predstavljaće činioce proizvoda" (Dejić, Egerić, 2003: 281).

Metoda tablice se obično koristi kada imamo dva skupa čiji su elementi u nekom odnosu. Tada u vrste tablice upisujemo elemente jednog skupa, a u kolone, elemente drugog skupa. Kada su elementi, koji se nalaze u preseku kolone i vrste u nekom odnosu, to se obično označava znakom "+", a ako nisu, znakom "−" i tako dolazi do rešenja.

Metoda Venovog dijagrama se koristi za rešavanje izvesnog broja zadataka vezanih za skupove. Venov dijagram predstavlja deo ravni ograničen nekom zatvorenom linijom. Elementi skupa se predstavljaju tačkama na delu površi koju označava dijagram.

Metoda fokusnog dijagrama je indirektna metoda rešavanja zadataka koja se koristi za rešavanje kombinatornih zadataka. Kako se pojmovi kombinatorike ne izučavaju u početnoj nastavi matematike, to se kombinatorni zadaci pomoću fokusnog dijagrama mogu rešiti i na mlađem školskom uzrastu. Osnovna ideja fokusnog dijagrama je da "elemente iz sadržaja datog problemskog zadatka interpretiramo dužima i krivim linijama koji imaju zajednički početak i kraj, pa ovakve modele svrstavamo u grupu geometrijskih modela" (Malinovića, Malinović-Jovanović, 2002: 325). Zadaci koji se rešavaju metodom fokusnog dijagrama "igraju značajnu ulogu u razvijanju kombinatornog mišljenja" (Dejić, Egerić, 2003: 285).

Metoda lažne pretpostavke "sastoji se u davanju neke pretpostavke o rešenju, koja najčešće nije tačna. Dalje se zadatak sagledava u svetlu datog, *lažnog*, rešenja. Dolazi se do procene greške i korekcije lažnog rešenja, pri čemu se dobija pravo rešenje" (Dejić, Egerić, 2003: 285).

Metoda inverzije se primenjuje kod problemskih zadataka kada znamo krajnji rezultat, a nepoznati su nam početni uslovi. Suština je u tome da se krene od rezultata i u izvršavanju inverznih operacija od onih koje bi se upotrebile kada bismo išli od početka prema kraju.

Metoda logike se obično primenjuje pri rešavanju šaljivih zadataka, odnosno zadataka koji imaju neku zagonetku. Ovi zadaci su od posebnog značaja za "razvijanje logičkog mišljenja, ljubavi prema matematici, za motivisanje učenika i sl". (Malinovića, Malinović-Jovanović, 2002: 331).

Tokom rešavanja problema, učenici treba da:

a) samostalno upotrebljavaju ranije naučene pojmove, pravila i misaone strategije;

b) budu sposobni da izdvoje matematičke podatke iz datog konteksta i/ili da

v) kombinuju podatke na nov način;

g) postave plan rešenja (tj. da prethodno skiciraju više koraka za rešavanje);

d) raspravljaju o hipotezama i alternativama;

đ) izvlače logične zaključke iz poznatog i da ih obrazlože;

e) kontrolišu korake i rezultate rešavanja;

ž) predstave i formulišu rešenje zadatka ili dokaza;

z) postanu svesni misaonih strategija koje su od pomoći;

i) osmišljeno rešavaju srodne probleme;

j) pri rešavanju daljih problema upotrebe sadržajna i heurističa pravila koja su stekli rešavanjem problema (Ceh, 1998: 374).

Učenike od prvih dana školovanja treba navikavati, kada god je to moguće, da rešavaju problemske zadatke, iako njihovo rešavanje nije predviđeno neposredno na času. Jer, "krajnji cilj nastave rešavanja problema je dostignut kada učenici mogu bez tuđe pomoći da rešavaju nove probleme" (Ceh, 1998: 374). Na taj način, učenici će se postepeno navikavati i na rešavanje mnogobrojnih životnih problema. Oni će postepeno sticati naviku da o problemu logički misle i ulagaće misaone napore kako bi rešili dati problem. Osnovni problem na koji se nailazi u praksi je to što problemski zadaci, i pored brojnih vrednosti, nisu obavezni i koriste se po nahođenju učitelja, obično na dodatnoj nastavi.

Ovde ćemo navesti i osobenosti kreativnih sposobnosti učenika koje se u velikoj meri mogu podsticati rešavanjem problemskih zadataka:

1. Sposobnost da predstavi plan predstojećih akcija
   (a) Izbor osnovnih ideja
   (b) Shvatati šta mogu biti posledice (kako teorijskog, tako i praktičnog karaktera) izvedene iz ove ideje
   (c) Određivanje zakonitosti novih misli i ideja koje proizilaze iz misli i ideja identifikovanih u tesktu
   (d) Provera nekoliko opštih karaktera koje ima data ideja, misao i kakva je njena oblast primene
   (e) Planiranje odgovora
   (f) Raspodela pitanja izazvanih teškoćama
2. Sposobnost ulaska u aktivnu intelektualnu aktivnost (rad)
   (a) Shvatanje materijala (ne samo shvatati svaki priznak, pravilo, nego i vezu među njima)
   (b) Prenos poznatih metoda aktivnosti na nove materijale (podatke)
   (c) Veština da se vidi vrednost mesta svakog dela kao dela celine
3. Samostalno dobavljanje potrebnih znanja
   (a) Korišćenje izvora o ovom pitanju
   (b) Sposobnost da se koriste različite vrste čitanja
   (c) Kretanje u smisaonu strukturu organizacije teksta
4. Sposobnost korišćenja dodatne literature
   (a) Sposobnost da koriste osnovna pravila rada sa literaturom

(b) Sposobnost izbora literature koja je direktno povezana sa datim pitanjem, a i one koja se tiče njega indirektno

(c) Sposobnost mentalnog povezivanja elemenata pitanja i dobijenih rezultata

5. Sposobnost da kreativno primenjuju svoje znanje u praksi

(a) Sposobnost primene u sličnim i novim situacijama

(b) Sposobnost da prenose aktivnosti poznatih metoda na novi materijal (V.V. Drozina, V.L. Diljman i D.A. Drozin, 2010: 47).

2 Didaktičke vrednosti problemskih zadataka

Rešavanje problemskih zadataka u početnoj nastavi matematike ima niz didaktičkih vrednosti. Pobrojaćemo samo neke do kojih smo došli proučavanjem relevantne literature:

- Rešavanje problemskih zadataka aktivira misaone napore učenika što pozitivno utiče na razvoj saznajnih sposobnosti;

- Rešavanjem problemskih zadataka, posebno u fazi izbora hipoteza za rešavanje problema, podstiče se samostalnost učenika;

- Problemski zadaci pojačavaju motivaciju učenika za učenje. Kada se učenik nađe pred problemom, kod njega se javlja želja da reši i otkloni problem;

- Problemskim zadacima negujemo kod učenika kritičnost, kreativnost;

- Rešavanjem problemskih zadataka učenici rasuđuju, a to povoljno deluje na razvoj logičkog mišljenja;

- Rešavanjem problemskih zadataka mogu se podsticati i razvijati apstraktno i stvaralačko mišljenje učenika.

O vrednostima rešavanja problema, najbolje svedoče reči T. Malinovića i N. Malinović-Jovanović, koji ističu da: „...rešavanje problema nije cilj za sebe, nego sredstvo misaonog aktiviranja u funkciji sticanja naučnih znanja... Takođe, učiti učenike da rešavaju probleme isto je što i učiti ih da misle; da učenike nije moguće učiti da misle ukoliko ne rešavaju zadatke; da oni misle samo kad se suoče s realnim i zanimljivim problemima; jednom rečju: da se *misaona aktivizacija* učenika može obezbediti samo ako im se omogući da rešavaju određene probleme“ (2002: 312).

Govoreći o značaju rešavanja problemskih zadataka (nestandardni zadaci) M. Dejić i sar. posebno ističu značaj nestandardnih zadataka „za razvoj suštinskih elemenata matematičkog mišljenja učenika, matematičke inicijative koja se ispoljava kroz želju učenika da sam shvati problem, kroz težnju da samostalno pronađe načine i sredstva za rešenje zadatka; oštroumnosti, logičnosti, dosetljivosti, fleksibilnosti i kritičnosti uma. Uz sve nabrojano ne treba zaboraviti i snažnu motivacionu stranu nestandardnih zadataka“ (2013: 101). Pomenuti autori za pojedine vrste zadataka izdvajaju prednosti, a mi ćemo, za potrebe rada, pobrojati samo neke vrednosti rešavanja nekih problemskih zadataka:

1. rešavanje problemskih zadataka je interesantno za učenika (magični kvadrati),
2. učenici pri rešavanju problemskih zadataka istražuju, kombinuju i dolaze do rešenja ulaganjem misaonog napora (magični kvadrati),
3. rešavanje problemskih zadataka je korisno za razvijanje analitičkog mišljenja (zanimljive brojevne jednakosti),
4. razvijanje mišljenja kod učenika (zadaci sa neobičnim odgovorima),
5. razvijaju interes za matematiku (šaljivi zadaci),
6. razvijaju stvaralačke sposobnosti i logičko mišljenje (šaljivi zadaci),
7. razvijaju geometrijske sposobnosti (zanimljiva geometrija),
8. razvijanje matematičkog mišljenja i misaonih operacija - analiza, sinteza, upoređivanje (matematičke igre),
9. razvijaju inteligenciju i maštu (igre šibicama) i sl.

Takođe, tokom rešavanja problemskih zadataka razvijaju se i brojni kvaliteti ličnosti. Ovde ćemo navesti kvalitete ličnosti koji se pojavljuju i razvijaju u procesu stvaralačke aktivnosti, a koje u svom radu navode V.V. Drozina, V.L. Diljman i D.A. Drozin:

1. Sposobnost da se uključi u kreativan rad (uzimajući učešće u procesu)
   (a) Prihvatiti novo. Biti otvoren za novine (ne plašiti se)
   (b) Da se izbore sa svim situacijama. Biti uveren (siguran) u sebe
   (c) Kritično sagledati problem. Ima sposobnost da ispita
   (d) Vidi hijerarhiju važnosti problema
2. Sposobnost rešavanja problema (proces)
   (a) Obim znanja
   (b) Izbor neophodnog znanja
   (c) Izdvajanje značajnog i neznačajnog
   (d) Okupljanje znanja u nizu
   (e) Nalaženje nove interpretacije za nova i stara znanja
   (f) Transfer (prenošenje) načina kreativne aktivnosti na rešavanje novih problema
3. Sposobnost da se dobije konačan rezultat (rezultat procesa)
   (a) Sposobnost iskazivanja svog mišljenja
   (b) Sposobnost da se napuste rigidne opcije za rešavanje problema (2010: 48).

3 Zaključak

U radu je ukratko izneto teorijsko rasvetljavanje pojma problemski zadatak. Ukazano je na sam proces rešavanja problemskih zadataka, kao i na brojne vrednosti rešavanja problemskih zadataka, od kojih se u prvi plan ističe njihov uticaj na podsticanje i razvoj mišljenja učenika. Iznet je proces rešavanja problemskih zadataka, koji se u velikoj meri poklapa sa strukturom stvaralačkog procesa. Stoga, osposobljavanjem učenika za rešavanje problemskih zadataka, mi ih postepeno navikavamo da stvaralački misle, aktivno se odnose prema onome što rade, logički rasuđuju o problemima pred kojima se nađu, kritički se odnose prema informacijama koje dobijaju, i sl. Sve to ima veliki značaj na formiranje svestrane i kreativne ličnosti učenika, što je jedan od važnih zadataka današnje škole. Vrednosti rešavanja problemskih zadataka su brojne, pa uzimajući ih u obzir, u nastavnoj praksi, kada god je to moguće, treba nastavu obogatiti rešavanjem problemskih zadataka.

References

[1] M. Vilotijević, *Didaktika,* Učiteljski fakultet Beograd, 1999.

[2] [2] M. Dejić, M Egerić, *Metodika nastave matematike*, Učiteljski fakultet Jagodina, 2003.

[3] M. Dejić, K. Špijunović, S. Ćebić, Nestandardni zadaci u funkciji identifikacije matematičkih sposobnosti, *Zbornik*, 18, p.96-111, Visoka škola za obrazovanje vaspitača, Vršac, 2013.

[5] F. Zech, *Grundkurs Mathematikdidaktik, Theoretische und praktische Anleitungen fΓjr das Lehren und Lernen von Mathematik*, Weinheim-Basel, Beltz Verlag, 1999.

[6] S. Jukić, Ž. Lazarević i V. Vučković, *Didaktika*, Učiteljski fakultet u Jagodini, 1998.

[7] T. Malinović, N. Malinović-Jovanović, *Metodika nastave matematike*, Učiteljski fakultet Vranje, 2002.

[8] T. Malinović, D. Cvetković, D. Dimitrijević, *Zbirka problemskih zadataka za osnovnu školu*, Učiteljski fakultet u Vranju, 1998.

[9] S. Maričić, *Podsticanje stvaralačkog rada u matematici*, magistarski rad, Učiteljski fakultet Užice, 2006.

[10] *Nastavni program matematike za osnovnu školu u Republici Srbiji*, Arhimedes, Beograd, 1996.

[11] J. Pinter, Matemati čko-kibernetičko modelovanje u počrnoj nastavi matematike, Učiteljski fakultet, Sombor, 1995.

[12] Polya, G., *Kako ću riješiti matematički zadataka*, Zagreb, Školska knjiga, 1966.

[13] Prodanović, T., Ničković, R., *Didaktika*, Beograd, 1974.

[14] Ranđelović, J., *Ka angažovanoj didaktici*, Niš, Filozofski fakultet, 2005.

[15] Stevanović, M., *Inovacije u nastavnoj praksi*, Beograd, Prosvetni pregled, 1982.

[16] Stevanović, M. i Muradbegović, A.,*Didaktičke inovacije u teoriji i praksi*, Novi Sad, Dnevnik, 1990.

FOURTH MATHEMATICAL CONFERENCE OF THE REPUBLIC OF SRPSKA
Trebinje, 6 and 7 June 2014

Point Multiplication on Elliptic Curves Over F_p

Dragan Vidaković, Duško Parezanović
Gimnazija, 13. Septembar 58, 32250 Ivanjica, Serbia
ivanjickagimnazija@open.telekom.rs

Stručni rad

Abstract

National Institute of Standards and Technology (NIST) has added Elliptic curve cryptosystems (ECC) to its set of standard cryptographic algorithms. One of the most important operations for all applications of elliptic curves is scalar point multiplication- the operation of multiplying a random number by a point on an elliptic curve. This fact is the reason why in this paper we present a full software implementation for computing scalar point multiplication on non-supersingular elliptic curves defined over the finite field Fp. Weierstrass and Edwards curves are commonly used in real life cryptography. Weierstrass curves are already an industrial standard and point multiplication on them is amongst the fastest. Those are the reasons why Weierstrass curves are the basis of this paper.

1 Introduction

ECC were first suggested by Koblitz [4] and Miler [7]. The security of ECC relies on the presumed intractability of the discrete logarithm problem on elliptic curves. Keys and other parameters can be considered shorter than other public key cryptosystems, such as RSA, with the same level of security [9]. That is why ECC are implemented on devices with limited resources (memory, power,...)

On stage, therefore, with the transition from RSA to ECC our intention remains unchanged: More personal software is our permanent goal [10]. This means that more people should be interested in cryptography. We think that the encoding of cryptographic algorithms is an important step in it.

In this paper, we choose to encode the operation "Point multiplication" on elliptic curves, over finite field F_p ($E(F_p)$), where p is a prime number greather then or equal to three.

2 Task and Aim

In this paper we do not intend to deal with the theory of elliptic curves, because there is a lot of good work on that [1, 2, 5, 6, 7]. Considering our goal (1) we are primarily interested in the results of the theory.

Our task is to calculate k*P=Q, where P and Q are points of the set E on an eliptic curve: $y^2 = x^3 + ax + b$.

The operation '*' denotes the series of point doubling and point adding.

2.1 Point Adding

For two given points P(x_p,y_p), Q(x_q,y_q) ($P \neq \pm Q$) in the set E, the group operator allows us to calculate a third point R(x_r,y_r), also in the set E, so that P + Q = R.

It is not difficult to find the coordinates of point R: x_r = s^2–x_p - $x_q$where s^2 =2x_p + x_q +x_r – x_p

As R belongs to the straight line (PQ) then s=(y_r – y_p)/(x_r – x_p), and we find: y_r = y_p +s(x_r –x_p)

2.2 Point Doubling

For given point P(x_p,y_p) in the set E, the group operator also allows us to calculate a third point R(x_r,y_r), also in the set E, so that P + P = 2P= R.

x_r = s^2 -2$x_p$where s=(3$x_p{}^2$ –a)/2y_p and y_r= y_p +s (x_r – x_p)

3 Point Multiplication

One of the most important operations for all applications of elliptic curves is scalar point multiplication. Scalar point multiplication consists of calculating the value of an integer multiplied by a point by doing a series of point doublings and additions until the product point is reached. In this paper we will use approach for calculating k*P suggested by Montgomery (Binary Double-Add algotithm) [5].

INPUT: An integer k>0 and a point P.
OUTPUT: Q=k*P
1. Set k($k_{l-1} \ldots k_1 k_0$)$_2$
2. Set P_1P, P_2=2P.
3. for I from l-2 downto 0 do
If k_i=1 then
Set $P_1 P_1$ +P_2 , $P_2$2P.
Else
Set $P_2 P_2$+P_1, $P_1$2P_1.
4. RETURN (Q=P_1)

4 Console Application in Delphy7

In this paragraph, we will encode the algorithm above (and give the outputs) by a simple tool, and that is the Console Application Delfi 7 (see Appendix A1, A2). Our goal is not to develop the program that is characterized by faultless performance; our goal is to show that this program does its task (point multiplication) and that it is possible to solve such a serious task in a simple way which is good for learning and entering the problem, the way that breaks the concern about the cryptic of cryptography itself. This way can assure us that applied cryptography is not as difficult as it seems to be. This program is a really good base for those who want to optimize and develop their own tool that won't be just illustrative, but it will be able to serve, considering the fact that we work with arbitrarily large numbers for which it is only necessary to set the initial constant in the Unit (A3) [6], [11].

The central question of this paper and paragraph is the code. Our intention was to make a complete software for finding keys available, and later, to find the keys for signing messages. But, due to the size, we will not mention all the procedures, but only the two most important. It will be indicated where other procedures can be found.

4.1 Outputs

We will present the results of the program for point multiplication.

In the first example, we can verify that we get the same results as in [2].

In the second example, we will show that using a modest console application Delphy 7 can successfully solve the serious task working with the real parameters suggested by NIST [2].

Example 1

Let p=23, k=28. We will observe the elliptic curve E: $y^2 = x^3 + x + 4$ defined over F_{23} and P(7,3) [2]. We have a=1 and b=4. ($4a^3 + 27b^2 = 4 + 432 \equiv 22$ (mod 23))

The points in $E(F_{23})$ are (incuding P) (with a code (A1) we find):

2P=(22,18) 3P=(18,9) 4P=(4,7) 5P=(1,12) 6P=(0,21) 7P=(9,12) 8P=(10,18) 9P=(8,15) 10P=(14,5) 11P=(11,9) 12P=(13,11) 13P=(15,17) 14P=(17,14) 15P=(17,9) 16P=(15,6) 17P=(13,12) 18P=(11,14) 19P=(14,18) 20P=(8,8) 21P=(10,5) 22P=(9,11) 23P=(0,2) 24P=(1,11) 25P=(4,16) 26P=(18,14)

27P=(22,5) 28P=(7,20) Infinity Point

Example 2

NIST has recommended ten finite fields [2]. We will observe the prime finite field F_p for $p=2^{192} - 2^{64} - 1$

For curve P-192 a= - 3 and base point $P(X_G, Y_G)$,

X_G = 0x 188da80e b03090f6 7cbf20eb 43a118800 f4ff0afd 82ff1012

Y_G= 0x 07192b95 ffc8da78 631011ed 6b24cdd5 73f977a1 1e794811

Let k:

10000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000100101011,

(probably) prime large (160 bit) number (k[159]=1, k[8]=1, k[5]=1,k[3]=1, k[1]=1, k[0]=1) [11]. This number is not random ("good" for cryptography), and it was taken to illustrate the example.

Coordinates of the point Q(X, Y) =k* $P(X_G, Y_G)$ are (with a code (A2) we find) :

X: 0x 27b33303b944664d0def8ab0c8134666da6e8218a73ec525

Y: 0x 1b36987edb77e1f666a5698a45cbbfd470180ff642eabd7b

5 Use: The ECDSA key pair

The Elliptic Curve Digital Signature Algorithm (ECDSA) is the elliptic curve analogue of DSA (Digital Signature Algorithm).

Security of DSA based on the computational intractability of the discrete logarithm problem (DLP).

The mathematical basis for the security of elliptic curve cryptosystems (ECC) is the computational intractability of the elliptic curve discrete logarithm problem (ECDLP).

To put it simply: It is dificult to find a point P and integer k, given their product k*P.

1. Public key is Q.
2. Private key is k.
3. Modulus:

11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11111111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
11101111111111111111111111111111111111111111111111111111111111
111111

6 RSA parameters- comparasion

Elliptic curve cryptography can provide the same level and type security as RSA but with much shorter keys. More precisely, ECC takes one-sixth computational effort to provide the same security that ones get with 1024-bit RSA, what no comments confirmed the following example [11]:

1024 -bit RSA parameters

1. Public key pair (n,e)

e:111 (we choose)

n: (we count)

100000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000100000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000001000000000000000000000000001000
000000000000000000000000000000000000000000000001000000000000000000000
000000000000000001101001000010000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000001000000000000000000000000001000000000000000000000000
000000000000000000000000001000000000000000000000000000000000000001101
001000001000000000000000000000000010000000000000000000000000001000000
000000000000000010000000000000000000000000010000000000011010010000000
000000000000011010010000000000000000000000000000000000000000000011110

00000110000000000000000000000000000001010100010101001010111 (n =p*q, p and q are two distinct primes, each of them of 512 B.D. and roughly the same number of digits.)

p: 100000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000100000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000010000000000000
00000000000001000000000000000000000000000000000000000000000000010000
0000000000000000000000000000000000010110011101.

q: 10000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000001000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000100000000000000000000000000100000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000011110000011.

$\phi = (p-1)(q-1)$, modulus:
10000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000010000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000001000000000000000000000000001000000000000000
00000000000000000000000000000000000100000000000000000000000000000000000
00011010001111010000000000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
10000000000000000000000000001000000000000000000000000000000000000000000
00000001000000000000000000000000000000000000001101000111101000000000000
00000000000001000000000000000000000000000001000000000000000000000001000000
00000000000000000000100000000000110100011110000000000000000110100011110
00000000000000000000000000000000000000011110000010000000000000000000000
00000001010100001110100111000

We compute the unique integer d, 1<d<?, such that e*d≡1 (mod ?)

2. Private key d:
10010010010010010010010010010010010010010010010010010010010010010010010
01001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001001
00100100100100100100100100100100100100100100100100100100100100100100100
10010010010010010010010010010010010010010100100100100100100100100100100
10010010010010010010010010010010010010010010010010010010010010010010010
01001001001001001001001001010010010010010010010010010010011011011011011
01101101101101101101101101101101110010010010010010010010010010010010010

0110011100100001001001001001001001001001001001001001001001001001010010
0100100100100100100100100100100100100100100100100100100100100100100100101001001
1011011011011011011011011100100100100100100100100100100100100100100101001001
0010010110110110110110110110110110110110110110111110010110101001001001001010
0100100100101001001001001001001001001001011011011011011011011000000000
0000000000000000000100100100101100000100010010010010010011001110010000
000000000000000000000000000000000000001000100101001001001001001001001001001001000
10010011110010100010111111

7 Future Work

Now we have the tools for ECDSA and that will be the topic of our next paper.

Since we have the software for RSA digital signature at disposal, it will be interesting to compare ECDSA with RSA. We consider that it will be useful to provide this paper with an example (something like a preparation for our future paper) of RSA digital signature of a message, such as the message m: "*Elektrotehnicki fakultet u Beogradu.*" It is desirable to do it in order to see how the digital signature looks like and to understand how resposible and difficult work is to develop the procedures by which it is implemented, due to the enormous number of zeros and ones.

SHA1- hash value of the message m is
h(m):
0011111100011100101000100100011110111011101000110011111101000011110011
1110110001100001100011011101001001000010001010000100110111001001001110
00001011010000110110
Digital signature of hash value s=(h(m))^d mod n.
s:101110110001100000000111000100011001011111110100111001101010011001 01
0000101110010100000110010110101110110001110000101111111110000010010001
1000001010001110111110000100100100000111000011010001000111000111100001
0110101010011010010011111100011100011000000111001111010101010000111111
0010110111111101000111001100101100100110001100111000000101111001100001
0111100000101001011011100010000011000101000011000101100011011011100011
0111011011010011111001010000100101100111001100101001010010001101000100
0011111101011001110011010100110111000011001111111011101001011101000101
1010111110110000101110000101000101000101110111000100110100011000110000
1100010100001000101101010111000100010011000101110111110111100100000100
0010111000001111011011000000001111100001110011110101110111111011111011
0000001111110001001101000010011111110111010101011110010110110011111111
1011110110111110110110000110110011001111011000111011101101111000010110
1100001000000011110101010100001101010110010111001000010101010101001100
1101011111011010110111011111011000011010100 1

8 Conclusion

We believe that each country must stimulate young people's interest in cryptography[3], because we doubt that our secret data can be protected using someone else's software [10].

Of course, it is very difficult to develop our own protection mechanisms, but we think it is far better to protect data using our own mechanisms first, and then, thus modified, leave them to someone else's software, than to allow the original data to be protected by somebody else's mechanisms, which is a logical nonsense.

9 Appendix

A1 An Example With a Small Number

```
program multiplikacija;
{ Point multiplication - algorithm in 3}
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
SysUtils,
multiplikacija_dalje in 'multiplikacija_dalje.pas';
label 1;
var pxp,pyp,p1x,p1y,p2x,p2y,x2,y2,rez1,rez2:array [0..nn] of integer;
var modu,a,b1,k:array [0..nn] of integer;
i,j,s1,l,i1,s,p:integer;
begin
b1[0]:=1;
{find k*P, k=1, 2,...,28}
for j:= 1 to 28 do
begin
{addition of two binary numbers}
saberi(k,b1,k);
s1:=0;
{DEC p=23 to BIN modu=10111}
modu[0]:=1;modu[1]:=1;modu[2]:=1;modu[3]:=0;modu[4]:=1;
a[0]:=1;
for i:=0 to nn do pxp[i]:=0;
for i:=0 to nn do pyp[i]:=0;
{the starting point P(7, 3)}
pxp[0]:=1;pxp[1]:=1;pxp[2]:=1;
pyp[0]:=1;pyp[1]:=1;
{Binary Double-Add algotithm}
for i:=0 to nn do
begin
p1x[i]:=pxp[i];
p1y[i]:=pyp[i];
```

```
end;
{doubling of point (pxp,pyp)}
duplope(pxp,pyp,a,modu,x2,y2);
for i:=0 to nn do
begin
p2x[i]:=x2[i];
p2y[i]:=y2[i];
end;
{s1 - largest binary position}
dokle(k,s1);
for i:=s1-1 downto 0 do
begin
if k[i]=1 then
begin
s:=1;
{which number is greather: p1x or p2x}
koji(p1x,p2x,s);
if (s=0) then
begin
duplope(p2x,p2y,a,modu,p2x,p2y);
goto 1;
exit;
end;
{addition points (p1x, p1y) and (p2x, p2y)}
dverazne(p1x,p1y,p2x,p2y,modu,p1x,p1y);
duplope(p2x,p2y,a,modu,p2x,p2y);
end
else
begin
s:=1;
koji(p1x,p2x,s);
if (s=0) then
begin
duplope(p1x,p1y,a,modu,p1x,p1y);
goto 1;
exit;
end;
dverazne(p2x,p2y,p1x,p1y,modu,p2x,p2y);
duplope(p1x,p1y,a,modu,p1x,p1y);
end;
end;
s:=0;p:=0;
{BIN to DEC}
vrati(p2x,s);
```

```
vrati(p2y,p);
vrati(k,l);
write(l+1,'P=');
write('(',s,',',p,') ');
if (j mod 5)=0 then
begin
writeln;
end;
end;
1: begin
if s=0 then
begin
write(' Infinity Point ');
end;
readln;
end;
end
```

References

[1] Blake I., Seroussi G. and Smart N., *Elliptic Curves in Cryptography*, Cambridge University Press, 1999.

[2] Johnson D., Menezes A. and Vanstone S., *The Elliptic Curve Digital Signature Algorithm (ECDSA)*, Certicom Research, Canada, http://cs.ucsb.edu/~koc/ccs130h/notes/ecdsa-cert.pdf, Accessed May 2013.

[3] Koblitz N., *Cryptography As a Teaching Tool*, Cryptologia, Vol. 21, No. 4 (1997).

[4] Koblitz N., *Elliptic Curve Cryptosystems*, Mathematics of Computation, 48, pp. 203-209,1987.

[5] Lopez J. and Dahab R., *Fast multiplication on elliptic curves over GF(2^m) without precomputation*, http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.26.4712, Accessed May 2013.

[6] Menezes A., van Oorschot P. C.,Vanstone S., *Handbook of Applied Cryptography*, CRC Press, New York, 1997.

[7] Miller V., *Uses of elliptic curves in cryptography*, Advances in Cryptology: proceedings of Crypto '85, Lecture Notes in Computer Science, vol. 218. New York: Springer-Verlag, 1986 pp 417-426.

[8] Schoof R., *Elliptic curves over finite fields and the computation of square roots mod p*, *Mathematics of Computation*, **4**4 (1985) pp. 483-494.

[9] Vidakovic D., Nikolic O., Parezanovic D., *Acceleration Detection of Large (Probably) Prime Numbers*, International Journal of UbiComp (IJU), Vol.4, No.1, January 2013

[10] Vidakovic D., Simic D., *A Novel Approach To Building Secure Systems,* ARES 2007, Vienna, Austria, pp. 1074-1084.

[11] Vidakovic D., *Analysis and implementation of asymmetric algorithms for data secrecy and integrity protection,* Master Thesis (mentor prof Jovan Golic), Faculty of Electrical Engineering, Belgrade, Serbia, 1999.

[12] Vidakovic D., Nikolic O, Kaljevic J. and Parezanovic D., *Joint Operation in Public Key Cryptography,* (IJACSA) International Journal of Advanced Computer Science and Applications, Vol. 4, No.3, 2013

[13] Vidakovic D., Parezanovic D., Nikolic O. and Kaljevic J., *Rsa Signature: Behind The Scenes,* Advanced Computing: An International Journal (ACIJ), Vol.4, No.2, March 2013.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Kompetencije studenata za matematičko modelovanje

Dragica Milinković
Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Pedagoški fakultet
Bijeljina, BiH, Republika Srpska
sadra@teol.net

Stručni rad

Apstrakt

Ishodi učenja u visokom obrazovanju predstavljaju kompetencije koje student treba razviti tokom studija, a koje su profilisane kompetencijama fakulteta koji ih školuju. Evropska komisija za unapred-ivanje obrazovanja i stručnog usavršavanja, naglašava interdisciplinarno i multidisciplinarno obrazovanje budućih učitelja koje podrazumijeva znanja iz predmeta koje predaje, ali i drugih, njima sličnih predmeta, pedagoško-psihološka znanja koja se odnose na razumijevanje razvojnih karakteristika učenika, stilova učenja i kulture učenika, vještine poučavanja u smislu poznavanja strategija, metoda i tehnika poučavanja, te razumijevanje društvenog i kulturnog konteksta obrazovanja.

U tom smislu, u radu se daje teorijski osvrt na opšte i specifične matematičke kompetencije studenata učiteljskog studija, te vrši detaljnije razmatranje kompetencija u oblasti matematičkog modelovanja. U fokusu su "školska znanja" matematičkog modelovanja, znanja učitelja iz oblasti matematičkog modelovanja, te kompetencije učitelja za matematičko modelovanje.

Da bismo što konkretnije odgovorili na pitanje o matematičkim kompetencijama studenata učiteljskog studija, koncipirali smo istraEsivanje koje se bavi kompetencijama u oblasti matematičkog modelovanja, a za ispitanike smo uzeli studente četvrte godine studijskog programa razredne nastave Univerziteta u Istočnom Sarajevu (akademska 2013/14. godina). U obzir smo uzeli pokazatelje ulaznih (UK) i izlaznih kompetencija (IK), vršili njihovu komparativnu analizu, te uporedjivanje rezultata IK sa kurikularnim kompetencijama.

S obzirom na značaj matematičkog modelovanja u savremenom svijetu, očekujemo da pitanje kompetencija za tu oblast postane ključna tema u pravcu osiguranja kvaliteta matematičkog obrazovanja na svim nivoima.

1 Uvod

Brojni reformski procesi visokog obrazovanja postepeno dovode do pomaka u planiranju obrazovnih programa, s obzirom da sve veći broj univerzitetskih nastavnika ciljeve izučavanja nastavnog predmeta izražava terminima "ishodi učenja" i "kompetencije studenata". Imajući u vidu činjenicu da se univerzitetsko obrazovanje u razvijenim zemljama zasniva na nacionalnom kurikulumu utemeljenom na kompetencijama kao novoj paradigmi obrazovanja, stavlja se akcenat na pitanje "Šta student treba znati i može znati, koje vještine, sposobnosti i stavove treba i može razviti". U tom smislu, pred nastavnika se postavlja zahtjev da obrazovnim programom "pokaže" zašto se uči, šta se uči i kako se uči, odnosno da definiše ishode učenja nastavnog predmeta (nastavne teme), sadržaje učenja i metode i postupke koji omogućavaju izgrađivanje propisanih kompetencija.

Ishodi učenja u visokom obrazovanju predstavljaju kompetencije koje student treba razviti tokom studija, a koje su profilisane kompetencijama fakulteta koji ih školuju. Evropska komisija za unapredjivanje obrazovanja i stručnog usavršavanja, naglašava interdisciplinarno i multidisciplinarno obrazovanje budućih učitelja koje podrazumijeva znanja iz predmeta koje predaje, ali i drugih, njima sličnih predmeta, pedagoško-psihološka znanja koja se odnose na razumijevanje razvojnih karakteristika učenika, stilova učenja i kulture učenika, vještine poučavanja u smislu poznavanja strategija, metoda i tehnika poučavanja, te razumijevanje družt-venog i kulturnog konteksta obrazovanja.

2 Kompetencije studenata u oblasti matematičkog modelovanja

Složenost zanimanja učitelja (nastavnika, profesora razredne nastave) ispoljava se u organizaciji i realizaciji nastave iz šest nastavnih predmeta, što podrazumijeva njihovu osposobljenost da adekvatno odgovore na pitanja zašto, šta i kako iz oblasti srpskog jezika i književnosti, matematike, prirode i društva, likovne i muzičke kulture, te fizičkog vaspitanja.

Imajući u vidu da se u mladjim razredima osnovne škole učenici svakodnevno "bave" matematikom s obzirom da je, prema Nastavnom planu i programu Republike Srpske, pet časova matematike od prosječnih 22 časa sedmično, sa izuzetkom prvog razreda zbog specifičnosti organizacije nastavnog rada, neophodno je posvetiti posebnu pažnju definisanju i razvijanju matematičkih kompetencija studenata.

Imajući u vidu kompleksnost postavljenog problema, s obzirom na različite stavove o kompetentnim znanjima i sposobnostima za organizaciju i realizaciju savremene nastave matematike, opredijelili smo se za model koji najbolje odgovara našim uslovima, a koji su definisali i koristili Verschaffel, Janssens i Janssen. Oni kompetencije učitelja za poučavanje matematike dijele u tri kategorije.

1. Prvu kategoriju predstavljaju matematičke kompetencije, odnosno poznavanje matematičkih sadržaja u okviru kojih ističu: visok nivo ovladanosti i duboko razumijevanje ključnih činjenica, koncepata, obrazaca, pravila i dokaza, procedura i strategija rješavanja problema.

2. Drugu kategoriju čine specifična metodičko pedagoška znanja, koja podrazumijevaju umijeće prikazivanja matematičkih sadržaja djeci različitih sposobnosti i interesa, izbor optimalnih strategija i oblika rada, visok nivo znanja o

vrstama matematičkih zadataka, poznavanje udžbenika i drugih nastavnih materijala.

3. Treću kategoriju kompetencija čine učiteljeva psihološka znanja o razvojnim karakteristikama i iskustvu učenika, te kako učenici misle i uče matematiku (Verschaffel, Janssens, Janssen, 2005).

Evidentno je da neophodnost njihovog determinisanja zahtjevima savremene nastave matematike, prvenstveno ukazuje na potrebu izgrađivanja matematičke pismenosti.

Prema OECD-u matematička pismenost je kapacitet pojedinca da identifkuje i razumije ulogu koju matematika ima u savremenom svijetu, da izvede dobro zasnovane matematičke procjene i da primjenjuje matematiku tako da zadovolji svoje sadašnje i buduće potrebe kao konstruktivnog, zainteresovanog i refleksivnog građanina (OECD, 2001).

Da bi se definicija prevela u procjenu matematičke pismenosti, utvrđene su tri dimenzije:

1. matematički sadržaj ili struktura znanja na koje se oslanjaju pojedini problemi i zadaci, odnosno koji se koriste da se riješi problem;

2. kompetencije (sposobnosti) koje moraju da se dostignu da bi se povezao stvarni svijet u kome je problem generisan, sa matematikom pomoću koje se rješava problem, odnosno procesi koje je potrebno da učenik aktivira kako bi povezao problemsku situaciju sa matematičkim sadržajem;

3. situacija ili kontekst u koji je smješten problem (Baucal, Pavlović Babić, 2010).

Kompetencije studenata učiteljskog studija, za razliku od kompetencija drugih obrazovnih profila, uslovljene su kompetencijama učenika koje će poučavati, s obzirom da kompetentno moraju podsticati. U tom smislu, osnovno polazište u razmatranju kompetencijskog okvira jeste analiza stručnih aktivnosti koje će, po završetku studija obavljati.

Shodno tome, definisano je pet kategorija opštih kompetencija koje bi u razrednoj nastavi matematike trebalo razviti (shema 1):

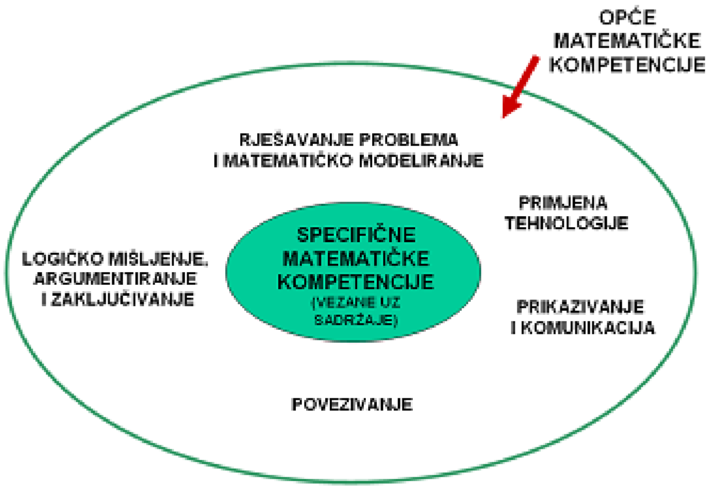
1. rješavanje problema (matematičko modelovanje);

2. mišljenje, dokazivanje i zaključivanje;

3. povezivanje;

4. komunikacija,

5. reprezentacija (primjena tehnologije).



Slika 1: Matematičke kompetencije (Kraljević, Čižmešija, 2009)

Osim opštih, na shemi se ističu i specifične kompetencije, koje se odnose na razvijanje matematičkih koncepata, odnosno formiranje matematičkih pojmova i pravila. To su, u stvari, matematički sadržaji ili područja matematike, koje bi svaki pojedinačni učenik morao upoznati.

Evidentno je da se, za razliku od matematičkog obrazovanja u konvencionalnoj nastavi u kome se akcenat stavlja na programske sadržaje, u savremenoj nastavi potencira razvijanje sposobnosti za primjenu matematike u konkretnim životnim situacijama, što podrazumijeva kompetencije za rješavanje kontekstualnih problema, odnosno matematičko modelovanje.

Sposobnost rješavanja problema podrazumijeva sposobnost razumijevanja i analiziranja problema, izbora i konstruisanja adekvatnog modela, poznavanja i razumijevanja matematičkih koncepata i sposobnost primjene matematike u realnim problemskim kontekstima.

Mogućnost razvijanja sposobnosti matematičkog modelovanja može se smatrati delom (ali i posledicom) razvoja sposobnosti samostalnog rešavanja problema kod dece (Dejić, Milinković, 2014).

Kada su u pitanju kompetencije za matematičko modelovanje, one su, u okviru nastavnog kurikuluma, definisane na sljedeći način:

1. Sticanje osnovne matematičke kulture potrebne za otkrivanje uloge i primjene matematike u različitim područjima čovjekove djelatnosti;

2. Ovladavanje osnovnim matematičkim metodama i njihovim primjenama u različitim oblastima (matematičko modelovanje);

3. Osposobljavanje za primjenu usvojenih znanja u rješavanju raznovrsnih zadataka iz životne prakse.

Modelovanje u razrednoj nastavi matematike teži da kod učenika razvije bolje razumijevanje matematičkih koncepata, uči ih razumijevanju matematičkih problema, uočavanju činjenica, formulisanju i rješavanju problema koji su rezultat specifičnih realnih situacija, te razvijanju kritičkog i stvaralačkog mišljenja.

Kada je u pitanju matematičko modelovanje kao oblast koja se izučava u okviru Metodike nastave matematike na četvrtoj godini učiteljskog studija, kao cilj se postavlja:

1. sticanje znanja o matematičkom modelovanju kao naučnoj i nastavnoj metodi, o kibernetičko-modelskom pristupu početnoj nastavi matematike koji se zasniva na metodama i tehnikama matematičkog modelovanja;
2. ovladavanje osnovnim znanjima iz matematičkog modelovanja, primjenljivog u razrednoj nastavi:
3. upoznavanje studenata sa formiranjem matematičkih pojmova putem modelovanja;
4. usvajanje metodičkih znanja o izgrađivanju i primjeni matematičkih metoda u modelovanju životnih situacija;
5. osposobljavanje studenata za uspješno modelovanje i rješavanje zadataka i diferenciranu pomoć učenicima u rešavanju.

Shodno tome, za datu oblast su definisani sljedeći očekivani ishodi:

1. ovladavanje studenata teorijskim osnovama matematičkog modelovanja,
2. osposobljavanje za uspješno modelovanje i rješavanje svih tekstualno - problemskih zadataka iz redovne i dodatne nastave;
3. primjena modelsko – problemskog pristupa, prvenstveno u diferenciranoj nastavi matematike.

Oni se ostvaruju izučavanjem sljedećih sadržaja:

1. Teorijske osnove matematičkog modelovanja;
2. Matematičko modelovanje kao metoda u razrednoj nastavi matematike;
3. Modeli osnovnih računskih operacija;
4. Logičko-kombinatorni modeli (metoda logike, metoda skupova, metoda prebrojavanja, matematički modeli kombinatorike, metoda lažne pretpostavke);
5. Aritmetičko-logički modeli (Dirihleov princip, metoda jednačina i nejednačina, metoda inverzije);

6. Geometrijski modeli rješavanja problema (metoda duži, metoda tablica, metoda grafova, metoda pravougaonika, metoda fokusnog dijagrama);
7. Modeli geometrijskih problema (problemi rezanja i sastavljanja, problemi razlaganja i slaganja, problemi parketiranja i popločavanja, topološki geometrijski problemi);
8. Modeli problema mjerenja, vaganja, prelivanja, presipanja, prenošenja i prevoženja;
9. Modeli problema na kvadratnoj mreži (magični kvadrati, problemi šahovske table);
10. Modeli stohastičkih pojava;
11. Matematičke igre;
12. Diferenciran pristup matematičkom modelovanju (Milinković, 2013).

Navedeni aspekti metodike nastave matematike upućuju na savremeni pristup osmišljavanju i realizaciji matematičkog obrazovanja u razrednoj nastavi, odnosno obazovanju profesora razredne nastave. Kako se sadržaji o matematičkom modelovanju u okviru metodike izučavaju više od jednu deceniju, evidentna su nastojanja da se unaprijedi i osavremeni nastava matematike u mlađim razredima osnovne škole. S obzirom da naši studenti već imaju značajno učešće u vaspitanju i obrazovanju učenika baz ičnog ciklusa, odnosno u izgrađivanju njihovih kompetencija, evidentni su i rezultati kada je u pitanju osposobljenost učenika za rješavanje realnih problema iz društvenog konteksta, odnosno za matematičko modelovanje.

3 Metodološki pristup problemu istraživanja

Da bismo što konkretnije odgovorili na pitanje o kompetencijama studenata učiteljskog studija za matematičko modelovanje, koncipirali smo istraživanje u kome smo kao cilj postavili ispitivanje osposobljenosti studenata, budućih učitelja za rješavanje realnih životnih problema, to jest za matematičko modelovanje. Istraživanje je realizovano na uzorku od 174 ispitanika, studenta četvrte godine studijskog programa razredne nastave Univerziteta u Istočnom Sarajevu akademske 2013/14. godine, nakon "odslušane" teme *Matematičko modelovanje u razrednoj nastavi* u sklopu nastavnog predmeta Metodika nastave matematike 2. Prethodno smo, na početku semestra "testirali" studente primjenom modela testa (T_{UK}) koji se sastojao od 10 problemskih zadataka, koje smo odabrali iz udžbenika matematike za V razred iz svih nastavnih tema koje se obrađuju. Na taj način smo dobili pokazatelje ulaznih kompetencija za matematičko modelovanje (UK), iskazane uspjehom studenata s obzirom na broj tačno riješenih zadataka (tabela 1).

Broj tačno riješenih zadataka		**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
Broj ispitanika	N	0	0	0	0	0	6	16	15	42	32	63
	%	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,45	9,20	8,62	24,14	18,39	36,21

Tabela 1: Ulazne kompetencije studenata za matematičko modelovanje

Zadatak		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Tačno	N	29	7	24	11	41	8	2	**77**	**1**	55
	%	16,67	4,02	13,79	6,32	23,56	4,60	1,15	**44,25**	**0,57**	31,61
Netačno	N	32	11	5	19	7	24	19	23	**41**	37
	%	18,39	6,32	2,88	10,92	4,02	13,79	10,92	13,22	**23,56**	21,26
Bez pokušaja	N	113	**156**	145	144	126	142	153	**74**	132	82
	%	64,94	**89,66**	83,33	82,76	72,42	81,61	87,93	**42,53**	75,87	47,13

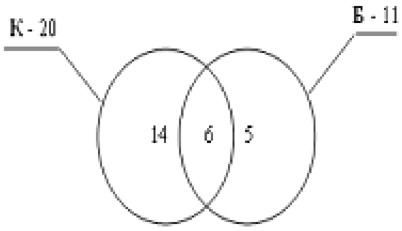
Tabela 2: Rezultati ispitanika po zadacima

Evidentno je da su studenti pokazali izuzetno nizak nivo matematičkih kompetencija s obzirom da se rezultati kreću od 0 do najviše 5 tačno riješenih zadataka, te da najveći broj studenata nije riješio ni jedan zadatak (63 ili 36, 21%), dok ih samo 6 ili 3,45% ima 5 tačno riješenih zadataka.

Kompletnosti definisanja ulaznih kompetencija doprinosi analiza rezultata po zadacima, to jest koliko ispitanika je za svaki zadatak dalo tačnih, koliko netačnih rješenja, a koliko ih nije ni pokušalo rješavati (tabela 2). Vidljivo je da je najbolji rezultat postignut u 8. zadatku, koji se odnosio na prebrojavanje pravougaonika na slici (77 ili 44,25% tačnih rješenja), a najslabiji u 9. zadatku pri rješavanju nejednačine sa množenjem i dijeljenjem (1 ili 0,57%) u kome je i najviše netačnih rješenja (41 ili 23,56%). Najveći broj ispitanika nije pristupio rješavanju 2. zadatka tj. rješavanju jednačine sa više operacija različitog stepena (156 ili 89,66%), a najmanji rješavanju 8. zadatka.

Instrument istraživanja izlaznih kompetencija (IK) za matematičko modelovanje bio je test sposobnosti primjene matematičkih znanja u modelovanju i rješavanju problemskih zadataka, koji smo, shodno obrađenim sadržajima, sami sastavili. Test (T_{IK}) se sastojao od 10 zadataka koji se kontekstualno i strukturalno mogu svrstati u zadatke za rad sa nadarenim učenicima mlađih razreda osnovne škole, te ga smatramo razumljivim, sadržajno prilagođenim i ne previše zahtjevnim. Studenti su za rješavanje imali 90 minuta.

Da bismo, uz izlazne kompetencije dobili i povratnu informaciju o efikasnosti interpretacije i usvojenosti sadržaja o matematičkom modelovanju u razrednoj nastavi, opredijelili smo se za sljedeće zadatke:



	narodna muzika	zabavna muzika	pop muzika	rok muzika	V_1	V_4
Gorana	–	–	–	+	+	–
Petra	–	+	–	–	+	–
Vedrana	–	–	+	–	–	+
Irma	+	–	–	–	–	+

1. U odjeljenju od 35 učenika, 20 trenira karate, 11 boks, dok se 10 učenika ne bavi nijednim sportom. Koliko učenika trenira i karate i boks, a koliko samo karate?

Rješenje:

$20 + 11 + 10 = 41$
$41 - 35 = 6$
I karate i boks trenira 6 učenika.
Samo karate trenira 14 učenika.

1. Gorana, Petra, Vedrana i Irma stanuju u istoj zgradi. One su učenice petog razreda, dvije odjeljenja V_1, a dvije odjeljenja V_4i vole različite vrste muzike. Gorana i drugarica iz odjeljenja ne vole narodnu i pop muziku. Petra voli zabavnu, a Irma više narodnu nego rok muziku i ona je učenica V_4 odjeljenja. U kom odjeljenju je i koju vrstu muzike voli svaka djevojčica?

Rješenje:

Gorana i Petra su učenice V_1, a Vedrana i Irma učenice V_4odjeljenja. Gorana voli rok muziku, Petra zabavnu, Vedrana pop, a Irma narodnu muziku.

1. U Lukinoj ulici se sa desne strane nalazi 108, a sa lijeve 92 kuće (kuće na desnoj strani su numerisane redom uzastopnim parnim, a na lijevoj uzastopnim neparnim brojevima). Koliko je cifara upotrijebljeno za njihovu numeraciju?

Rješenje:

- ukupan broj kuća: $108 + 92 = 200$,
- ukupan broj cifara: $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + (200 - 99) \cdot 3 = 189 + 303 = 492$.

Upotrijebljene su 492 cifre.

1. Mlijeko je pakovano u kante po 16 i 30 litara. Prema narudžbi neophodno je na tržnicu isporučiti 390 litara mlijeka u 20 kanti bez dodatnih mjerenja. Koliko je isporučeno kanti po 16, a koliko po 30 litara mlijeka?

Rješenje:
Pretpostavimo da su sve kante imale po 30 litara. Tada bi ukupno bilo 600 litara mlijeka, tj.

$$20 \cdot 30 = 600.$$

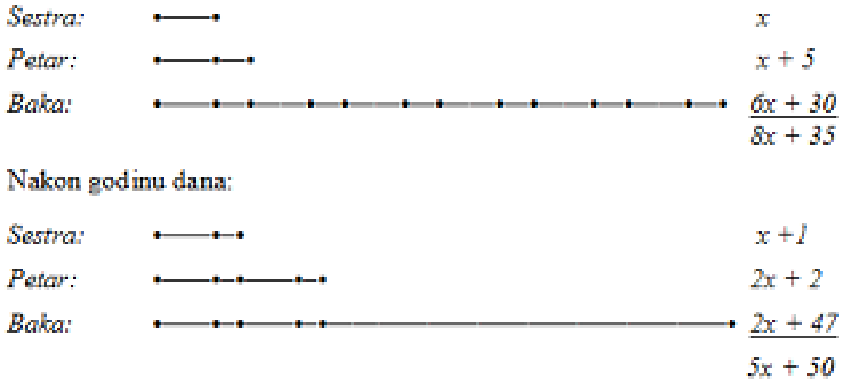
Kako je ukupno 390 litara mlijeka, izvršićemo potrebne korekcije, tj.
$600 - 390 = 210$ i
$210 : 14 = 15$.
Zaključujemo da je isporučeno 15 kanti po 16 litara i 5 kanti po 30 litara mlijeka.

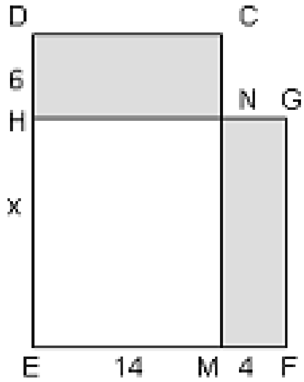
1. 40 pločica oblika kvadrata dužine stranice 3 dm treba složiti na podu u kupatilu tako da se dobije pravougaonik najvećeg mogućeg obima. Koje su dimenzije tog pravougaonika?

Rješenje:
$O = 2 \cdot (40 \cdot 3 \text{ cm} + 3\text{cm}) = 2 \cdot 123 \text{ cm} = 246 \text{ cm}$
Dimenzije tog pravougaonika su $a = 120$ dm i $b = 3$ dm.

1. Milen je ocjenu koju je dobio na testu iz matematike, saopštio sestri putem zadatka: Ako ocjenu koju sam dobio pomnožim brojem 6, pa dobijeni proizvod povećam za 24, zatim rezultatu dopišem dvije nule, te sve utrostručim i na kraju podijelim brojem 12, dobiću broj 1200. Koju ocjenu je Milen dobio na testu iz matematike?

Rješenje:
Pođimo od posljednjeg podatka (1200) i obavljajmo inverzne operacije obrnutim redoslijedom:
1) $1200 \cdot 12 = 14400$,
2) $14400 : 3 = 4800$,
3) $4800 : 100 = 48$,
4) $48 - 24 = 24$,
5) $24 : 6 = 4$.
Na testu iz matematike Milen je dobio četvorku.





1. Petar je 6 puta mladji od bake i 5 godina stariji od sestre, a u ovo doba sljedeće godine biće 45 godina mlađi od bake i 2 puta stariji od sestre. Koliko Petar, njegova sestra i baka imaju godina?

Rješenje:

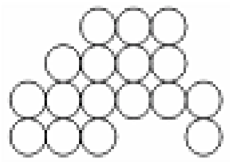
$8x + 35 + 3 = 5x + 50$
$3x = 12$
$\underline{x = 4}$
Sestra: 4
Petar: $4 + 5 = 9$
Baka: $9 \cdot 6 = 54$
Petar ima 9 godina, njegova sestra 4, a baka 54 godine.

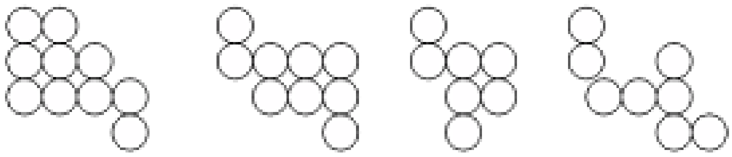
1. Vozeći uz vjetar, biciklista predje odredjeno rastojanje za 18 časova. Da je išao niz vjetar, vozio bi 6 km/h brže i za prelazak istog rastojanja utrošio bi 4 časa manje. Kojom brzinom je biciklista vozio uz vjetar?

Rješenje:
$4 \cdot x = 14 \cdot 6$
$x = 84 : 4$

$x = 21$
Biciklista je vozio uz vjetar brzinom od 21 km/h.

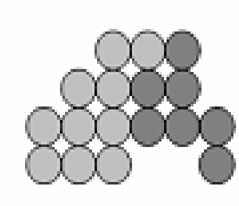
1. Figura na prvoj slici nastala je sastavljanjem dvije od četiri date figure sa druge slike (A, B, V, G). Odredi koje!





A B V G

Rješenje:



Data figura je nastala sastavljanjem figura A i V.

1. Sandra je kupila 11 kg luka. Za miješanu salatu, koju priprema za zimu, prema receptu joj je potrebno 2 kg i 500 g luka. Da bi izmjerila tu količinu, na raspolaganju su joj vaga sa dva tasa, dva tega po 100 g i jedan teg od 50 g. Objasni kako će Sandra u tri koraka izmjeriti 2 kg i 500 g luka.

Rješenje:
- 1. korak: na vagi će podijeliti 11 kg luka na dva jednaka dijela (5 kg 500 g);
- 2. korak: na vagi će podijeliti 5 kg 500 g luka na dva jednaka dijela (2 kg 750 g);
- 3. korak: na jedan tas stavi tegove (dva tega od 100 g i teg od 50 g), a na drugi količinu luka koja će biti u ravnoteži sa tegovima. Na taj način će iz mase od 2 kg 750 g, odvojiti 250 g, što znači da će joj ostati 2 kg i 500 g luka.

Rezultati istraživanja i diskusija

Da bismo što konkretnije odgovorili na pitanje o trenutnim kompetencijama studenata četvrte godine učiteljskog studija za matematičko modelovanje, empirijske podatke smo podvrgli statističkoj obradi primjenom F- testa. Odredili smo određene mjere deskriptivne statistike i procijenili naša očekivanja (tabela 1)

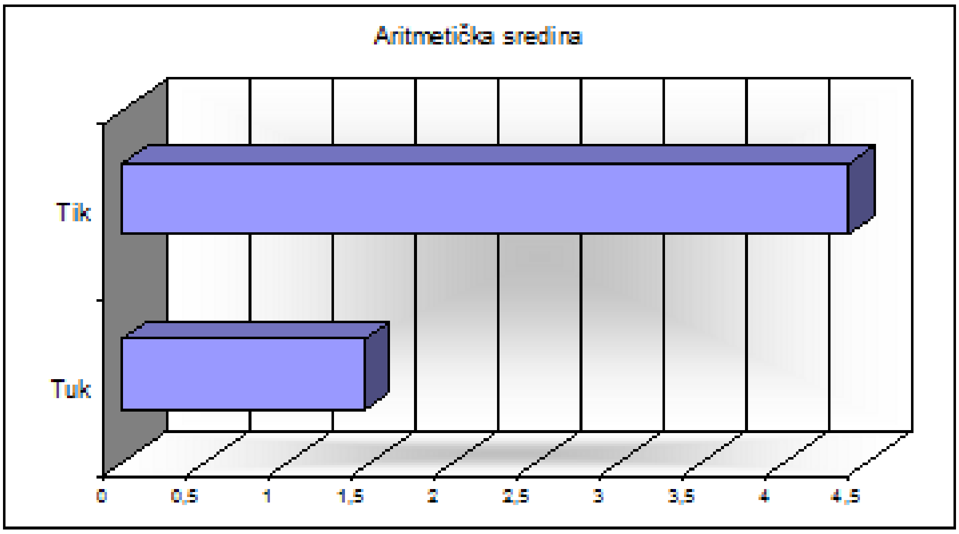
Testovi	N	Min.	Maks.	M	SD	F	df	p
T_{UK}	174	0	5	1,465	1,457	29,015	346	0,0001
T_{IK}	174	1	9	4,391	2,166			

Tabela 3: Zbirni rezultati ostvareni na testovima T_{UK} i T_{IK} (M, t, p)

kada je u pitanju podizanje kompetentnosti studenata programskim sadržajima nastavnog predmeta Metodika nastave matematike 2. Evidentno je da su ostvareni rezultati na testu ulaznih kompetencija (T_{UK}) izmed–u 0 i 5, a na testu izlaznih kompetencija (T_{IK}*)* izmed–u 1 i 9, dok aritmetičke sredine upućuju na značajan, ali ne i zadovoljavajući napredak (T_{UK}- 1,465; T_{IK}- 4,391), s obzirom da je prosječan uspjeh na T_{IK}još uvijek ispod očekivanja. F vrijednost je značajna na nivou p = 0,0001 za F = 29,015 i df = 346, što znači da su razlike izmed–u navedenih aritmetičkih sredina statistički značajne.

Razlike u aritmetičkim sredinama, s obzirom na broj tačno riješenih zadataka na testovima T_{UK} i T_{IK} prezentovane su grafikonom 1.

Grafikon 1. Razlike u aritmetičkim sredinama izmed–u T_{UK} i T_{IK}



Potpunijoj analizi doprinosi diskusija testa izlaznih kompetencija s obzirom na broj tačno riješenih zadataka (tabela 4). Evidentno je da je najveći broj studenata tačno riješio 4 zadatka (17,82%), a najmanji broj 9 zadataka (1,73%), te da nema studenata koji nisu riješili ni jedan zadatak, kao što nema onih sa svih 10 tačnih zadataka.

Kompletnosti definisanja izlaznih kompetencija doprinosi analiza rezultata po zadacima (tabela 5), s obzirom da smo za svaki zadatak dali broj i postotak studenata koji su došli do tačnog rješenja, broj i postotak studenata koji su zadatak riješili pogrešno, te broj i postotak studenata koji nisu pokušali rješavati zadatak. Vidljivo je da je najbolji rezultat postignut u 9. zadatku (144 ili 82,76% tačnih

Broj tačno riješenih zadataka		**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
Broj ispitanika	N	0	3	9	20	26	28	31	17	14	26	0
	%	0,00	1,73	5,17	11,49	14,94	16,09	17,82	9,77	8,05	14,94	0,00

Tabela 4: Izlazne kompetencije studenata za matematičko modelovanje

Zadatak		**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
Tačno	N	94	109	41	78	55	131	57	**23**	**144**	32
	%	54,02	62,64	23,56	44,83	31,61	75,29	32,76	**13,22**	**82,76**	18,39
Netačno	N	54	50	73	58	83	29	49	70	**25**	**93**
	%	31,04	28,74	41,96	33,33	47,70	16,67	28,16	40,23	**14,37**	**53,45**
Bez pokušaja	N	26	15	60	38	36	14	68	**81**	**5**	49
	%	14,94	8,62	34,48	21,84	20,69	8,04	39,08	**46,55**	**2,87**	28,16

Tabela 5: Rezultati ispitanika po zadacima u T_{IK} testu

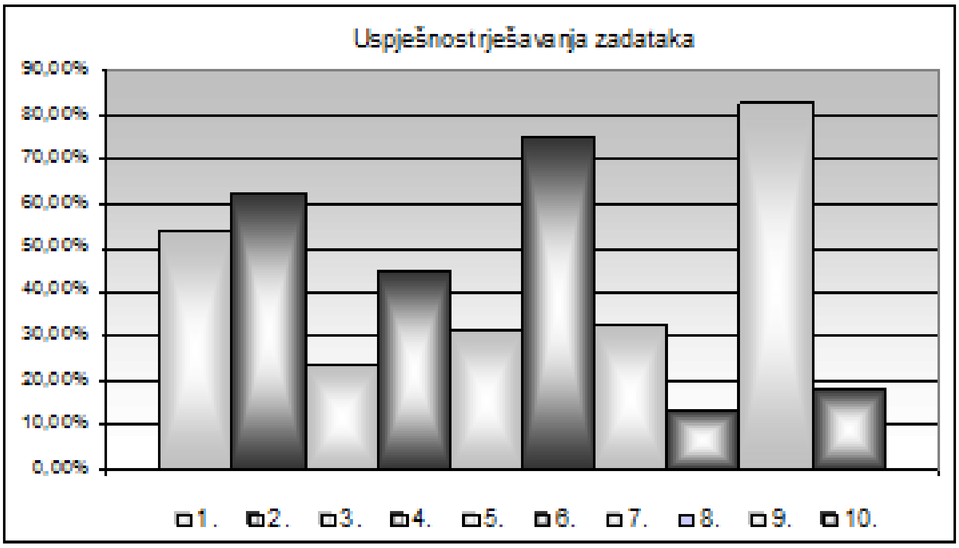
rješenja), a najslabiji u 8. zadatku (23 ili 13,22%). Kada su u pitanju netačna rješenja, najviše ih je u 10. zadatku (93 ili 53,45%), a najmanje u 9 zadatku (25 ili 14,37%). S druge strane, najveći broj ispitanika nije pristupio rješavanju 8. zadatka (81 ili 46,55%), a najmanji rješavanju 9. zadatka (5 ili 2,87%)..

Pregled izlaznih kompetencija studenata učiteljskog studija za matematičko modelovanje s obzirom na uspješnost rješavanja zadataka predstavljena je grafikonom 2.

4 Zaključak

Kompetencije studenata za matematičko modelovanje, u okviru kompetencija na nivou nastavnog predmeta, usklađene su sa kompetencijskim profilom profesora razredne nastave. Imajući u vidu njihov značaj u savremenom svijetu u okviru matematičkih kompetencija, te nedovoljnu zastupljenost matematičkog modelovanja u nastavi matematike bazičnog ciklusa, prvenstveno zbog neosposobljenosti nastavnika, nameće se potreba za podizanjem nivoa znanja studenata učiteljskog studija iz te oblasti, kako bi, u svom budućem radu, nastavu matematike prilagodili zahtjevima savremenog društva i učenika kao aktivnih učesnika u njemu.

U tom smislu provedeno istraživanje ima svoj značaj s obzirom da smo utvrdili trenutno stanje kompetencija studenata završne godine učiteljskog studija za matematičko modelovanje s obzirom na nivo poznavanja i razumijevanja matematičkih struktura i koncepata, sposobnosti logičkog mišljenja i zaključivanja, te njihove



Slika 2: Uspješnost rješavanja zadataka na T_{IK}

praktične primjene.

Evidentno je da generacija studenata četvrte godine studijskog programa razredne nastave nije dovoljno kompetentna za matematičko modelovanje i njegovu primjenu u realizaciji razredne nastave matematike, ali je uočljiv doprinos programskih sadržaja nastavnog predmeta s obzirom na statistički značajan napredak pri testiranju izlaznih kompetencija.

Imajući u vidu značaj matematičkog modelovanja u savremenom svijetu, očekujemo da pitanje kompetencija za tu oblast postane ključna tema u pravcu osiguranja kvaliteta matematičkog obrazovanja na svim nivoima.

Literatura

[1] Baucal, A., Pavlović Babić, D. *Nauči me da mislim, nauči me da učim. PISA 2009 u Srbiji: prvi rezultati.* Beograd: Institut za psihologiju Filozofskog fakulteta u Beogradu, Centar za primenjenu psihologiju, 2010.

[2] Dejić M., Milnković D., *Matematičko modelovanje u početnoj nastavi matematike*, Zbornik radova sa Naučnog skupa "Nastava i učenje - savremeni pristupi i perspektive", Užice, Učiteljski fakultet Univerziteta u Kragujevcu.

[3] Kraljević, H., Čižmešija, A. *Matematika u nacionalnom okvirnom kurikulumu – ishodi učenja.* Zagreb: PMF – Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2009..

[4] Milinković D., *Metodika matematičkog modelovanja za razrednu nastavu*, Filozofski fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu, 2013.

[5] OECD, *Knowledge and Skills for Life: First Results from PISA 2000*, Paris, OECD, 2001.

[6] Verschaffel, L.; Janssens, S.; Janssen, R. *The development of mathematical Competence*, In Flemish preservice elementary school teachers, Teaching and Teacher Education, 21, 49–63, 2005.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Primena Open Source softvera u nastavi web dizajna i programiranja

Gordana Maksimović
Gimnazija, Kruševac
maksimovic.gordana@gmail.com

Stručni rad

Apstrakt

Nastava informatike nije ograničena na jedan softverski alat ili razvojno okruženje. Termin "slobodan" i "open" softver ne umanjuje kvalitet softvera i mogućnosti primene. U radu su objašnjeni termini softverska licenca, Free softver, Open softver i sistemi otvorenog koda za upravljanje sadržajem CMS. U nastavi informatike - web dizajna izučava se dizajn statičkih web stranica (HTML i CSS) i rad sa gotovim dizajn rešenjima CMS. U ovom radu je prikazano razvojno okruženje NetBeans. NetBeans IDE je integrisano razvojno okruženje koje omogućava kreiranje web stranica, desktop i mobilnih aplikacija. Pored HTML, CSS, JavaScript, PHP za izradu web stranica, NetBeans podržava i sledeće programske jezike C/C++, Java tako da svoju primenu može imati i u nastavi programiranja.

1 Uvod

U savremenoj nastavi informatike u srednjim školama izučavaju se teme web dizajna i programiranja. Nastavne teme su praćene uputstvima za realizacuju u kojima se nalazi preporuka određenog softverskog alata ili se sa opisom realizacije nastave utiče na izbor softverskog alata. Jedan od ciljeva nastave informatike je sticanje znanja koja doprinose razvoju informatičke pismenosti kao osnove za dalje školovanje uz racionalno i efikasno korišćenje računara. U okviru nastave web dizajna izučavaju se osnovni koncepti i principi izrade web stranica. Zadaci nastave programiranja su definisanje problema, algoritmi, pisanje programa vođenih događajima, razumevanje principa modularnih i struktuiranih programa, upoznavanje koncepta klasa. Da bi se realizovali postavljeni ciljevi i zadaci treba obezbediti i odgovarajuće softverske alate ili razvojna okruženja. Problemi koji nastaju su u izboru programskih jezika, sistema za upravljanje sadržajem CMS i web tehnologije sa jedne strane, i sa druge strane izbor različitih softverskih alata za svaku nastavnu celinu i temu. Većina učenika se sa tehnikama web dizajna i programiranja upoznaje u srednjim školama. Manji broj učenika je radio sa komercijalnim razvojnim okruženjima starijih verzija čije je održavanje otežano zbog neodgovarajućih licenci. Tema ovog rada je mogućnost i načini primene razvojnog okruženja otvorenog koda sa opštom javnom licencom NetBeans IDE u realizaciji nastavnih celina i tema web dizajna i programiranja.

2 Softverske licence

Softverska licenca je vrsta ugovora između proizvođača softvera i krajnjeg korisnika. Ugovor uređuje prava i obaveze proizvođača i korisnika softvera kao što su: ko je vlasnik softvera odnosno kopije softvera, kako korisnik može da dobije kopiju softvera, uslovi kako korisnik može da koristi, menja i distribuira softver, obaveze proizvođača u delu održavanja i ažuriranja softvera [1]. Softverske licence se mogu podeliti na **vlasničke licence (propertiary)** i **licence slobodnog koda i licence otvorenog koda (free and open source licences)** [3]. Kod vlasničke licence proizvođač softvera je vlasnik svake kopije softvera. Vlasnik softvera daje pod određenim uslovima korisniku pravo da koristi jednu ili više kopija softvera. Bez prihvatanja ovih uslova korisnik nema pravo korišćenja softvera. Primer ovog softvera je Microsoft Visual Studio Professional, Windows, Microsoft Office. Karakteristika licence slobodnog koda je da proizvođač softvera ne zadržava pravo vlasništva nad kopijama softvera, već pravo vlasništva prenosi na krajnjeg korisnika. Krajnji korisnik nije obavezan da prihvati uslove licence ako menja ili koristi softver ali ako korisnik distribuira softver mora da prihvati uslove softverske licence. Licence otvorenog koda su **copyleft** licence i **permissive** licence. Copyleft licence imaju za cilj da sačuvaju slobodu i otvorenost softvera. Izvedeni softver je softver koji je nastao promenom softvera koji ima copyleft licencu. Primer ove licence je **GNU** *opšta javna licenca General Public License.* Krajnji korisnik ima pravo na redistribuciju, na menjanje koda softvera ali i obavezu da objavi izvorni kod za sve izmene koje je napravio [2]. Permissive licence daje slobodu krajnjim korisnicima i dosta je popustljiva u odnosu na copyleft licencu. Korisnik ne mora izvedeni softver licencirati pod istim uslovima kao originalni. Korisnik može delove softvera iskoristiti kao deo zatvorenog koda. Primer ove licence je **BSD** licenca *Berkley Software Distribution* [2][3].

3 Izbor softvera

U realizaciji nastavnih sadržaja treba izabrati odgovarajući softver. Kriterijumi kod izbora softverskog alata su mogućnost primene u realizaciji nastavnih celina i tema, troškovi nabavke i održavanja softvera, hardverska opremljenost računara i tehnička podrška kod održavanja odgovarajućeg softverskog alata, obučenost i motivisanost nastavnika za rad sa određenim softverom, dostupnost softvera, predznanja učenika. Nastavni sadržaji su definisani planom i programom. Troškovi nabavke i održavanja se odnose na cenu odgovarajuće licence za obrazovne ustanove i učenike. Izbor softvera treba da se zasniva na znanju i spremnosti nastavnika da primeni nove tehnologije u nastavi. Kada su u pitanju predznanja učenika, ne očekuje se da imaju znanja u radu sa određenim softverom odnosno razvojnim okruženjem, već kakva su njihova osnovna informatička znanja operativnih sistema, da li pored Windowsa znaju i za druge operativne sisteme, koliko poznaju organizaciju file sistema određenog operativnog sistema.

Neki od softverskih alata koji se koriste u nastavi web dizajna za razvoj i editovanje HTML koda i programiranja su: Notepad, Wordpad, MS Visual Studio IDE, NetBeans IDE. Notepad i Wordpad su editori, pomoćni programi komercijalnog operativnog sistema Windows, u toku rada ne kontrolišu sintaksu. Microsoft Visual Studio je besplatan samo u Express verziji, sistemski zavisan, instalira se na Windows operativnom sistemu. NetBeans IDE je razvojno okruženje sa GNU "*General Public License version 2 with Classpath exception i CDDL Common Development and Distribution License*"[5].

NetBeans je open source IDE *Integrated Development Environment*, namenjen za razvoj Java desktop, mobilnih i web aplikacija. Postoji instalacija na različitim operativnim sistemima Windows, Linux i OS X. Veliki broj dodataka omogućava razvoj aplikacija i u drugim programskih jezicima C/C++, PHP kao i podršku web dizajnu HTML/CSS. **IDE** je integrisano razvojno okruženje koje podržava razvoj grafičkog interfejsa (GUI), editor koda, kompajler, interpreter i dibager (debugger) [7].

Karakteristike NetBeans IDE:

1. Podrška za najnovije Java tehnologije
2. Editor koji proverava sintaksu i ima podršku za jezike Java, C/C++, HTML, PHP
3. Podrška za HTML5 i CSS3
4. Efikasno upravljanje projektima, datotekama
5. Razvoj grafičkog korisničkog interfejsa (GUI)
6. Mogućnost rada na različitim operativnim sistemima (Windows, Linux) [4]

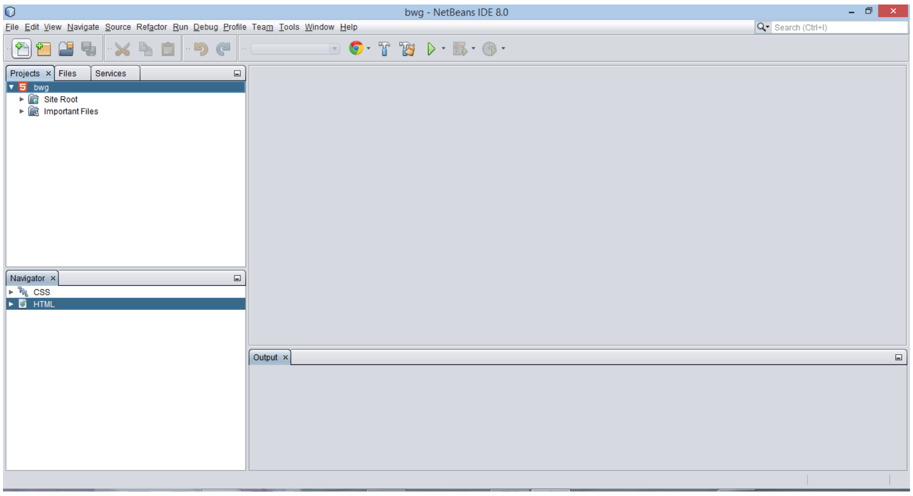
3.1 Izgled okruženja

U glavnom prozoru Netbeans radnog okruženja u gornjem delu nalaze se linija menija i linija sa alatkama. Preostali deo glavnog prozora čine paneli. U levom delu nalazi se panel projekata i panel navigatora, desno je radni panel, u donjem delu glavnog prozora je izlazni panel (slika 1) [6].

Linija menija sadrži sledeće stavke: File meni služi sa kreiranje novih i otvaranje postojećih projekata i fajlova, Edit meni je namenjen za rad sa tekstom (undo, redo, copy, paste, cut, find, replace), Run meni se koristi za prevođenje i izvršavanje programa ili aplikacije, Debugger meni služi za otklanjanje grešaka, testiranje i praćenje promenljivih. Linija alatki se nalazi ispod linije menija. Prikaz alatki podešava se u meniju View izborom opcije Toolbars.

Panel projekata Projects ima tri kartice: projekti, datoteke i servisi. U ovom panelu prikazuje se hijerarhijska struktura projekata, fajlova i servisa. Panel navigatora Navigator prikazuje strukturu objekata koja je izabrana u panelu projekata (slika 4). U radnom panelu prikazuje se sadržaj fajlova koji se menjaju. U izlaznom panelu prikazuju se rezultati tokom prevođenja i izvršavanja programa i odgovarajuće poruke [6].

U toku rada sa različitim tipovima NetBeans projekata otvaraju se dodatni paneli. U radu sa web projektima otvara se CSS panel, u radu sa Java formama Palette panel. Prikaz panela podešava se u meniju Window. Instalacija pluginova odnosno dodataka podešava se u meniju Tools izborom stavke Plugins.



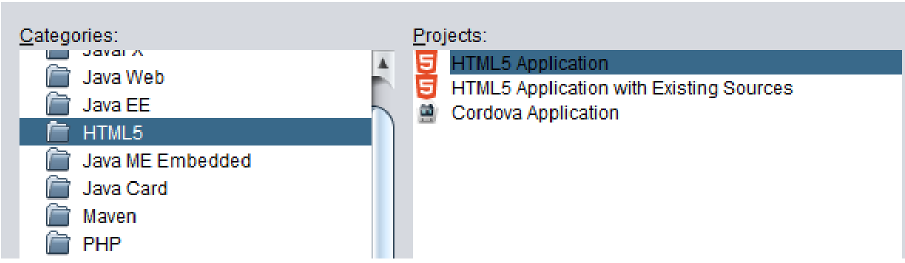
Slika 1: NetBeans IDE Radno okruženje

Osnova rada u NetBeans IDE okruženju je formiranje različitih kategorija projekata. Projekat predstavlja jedinstvenu strukturu koju čine folderi i fajlovi. Kreiranje projekata se radi u meniju File izborom stavke New Project. Za svaki novi projekat se vrši izbor tipa projekta, naziva i lokacije. Ovakva struktura projekta dozvoljava u toku rada uključivanje i drugih fajlova i foldera: slika, JavaScript fajlova, klasa.

3.2 Primena u izradi web stranica

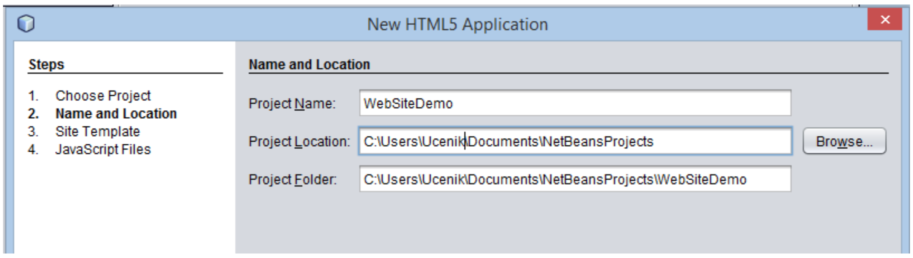
Izrada web sajtova i web stranica počinje kreiranjem HTML5 projekta i HTML stranica. HTML je opisni jezik namenjen opisu web stranica. Na početku HTML dokumenta nalazi se definicija tipa, standarda dokumenta. U strukturi dokumenta nalaze se delovi koji opisuju način predstavljanja i sadržaj dokumenta. Elementi HTML dokumenta su tagovi <tag> </tag> ili <tag/>.

Za kreiranje web sajta u meniju File izabrati novi projekat New Project (slika 2). U spisku kategorija izabrati tip projekta HTML5, naziv projekta i lokaciju (slika 3). Sledi izbor šablona Template i JavaScript fajlova. Za potrebe osnova kreiranja web stranice ne moraju se uključiti opcije za izbor šablona i JavaScript fajlova. U postojeću strukturu projekta dodaju fajlovi i folderi u toku rada.



Slika 2: Kreiranje HTML5 projekta

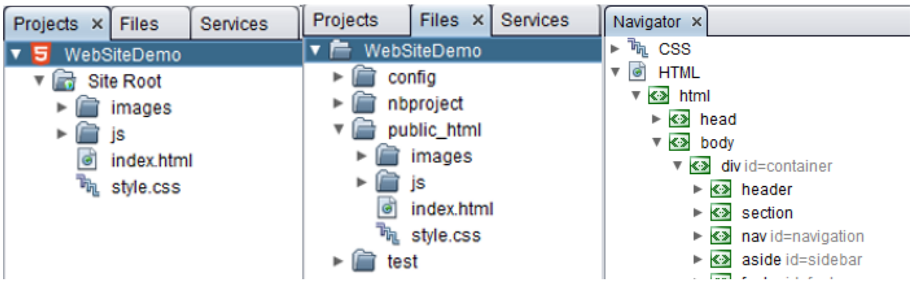
U formiranom fajlu *nazivfajla.html* na prikazanom primeru *index.html* u okviru projekta je data osnovna struktura HTML dokumenta sa opisanim delovima (slika 4). Standard dokumenta je HTML5. Za uređivanje izgleda strane može se kreirati fajl eksternih obrazaca stilova *nazivfajla.css* na prikazanom primeru *style.css* (slika 4). Ukoliko se ubacuju slike, video i zvučni zapisi, njihove fajlove grupisati u okviru posebnih foldera, na primer slike u okviru foldera images. Sve dodatne fajlove i foldere kreirati u okviru strukture istog projekta izborom iz menija File opcije New File ili iz kontekst menija opcije New Folder.



Slika 3: Naziv i lokacija web sajta

Izborom fajla u kartici projekata, u radnom panelu prikazaće se sadržaj fajla. U panelu navigatora prikazaće se struktura HTML strane (slika 4). Izborom određenog HTML taga u panelu navigatora, pristupa se istom elementu sadržaja fajla u radnom panelu. Deo html koda:

```
<!DOCTYPE html>
<html>
<head>
<title>Web Site Title</title>
    <meta charset="UTF-8"/>
    <meta name="viewport" content="width=device-width,
    initial-scale=1.0"/>
```



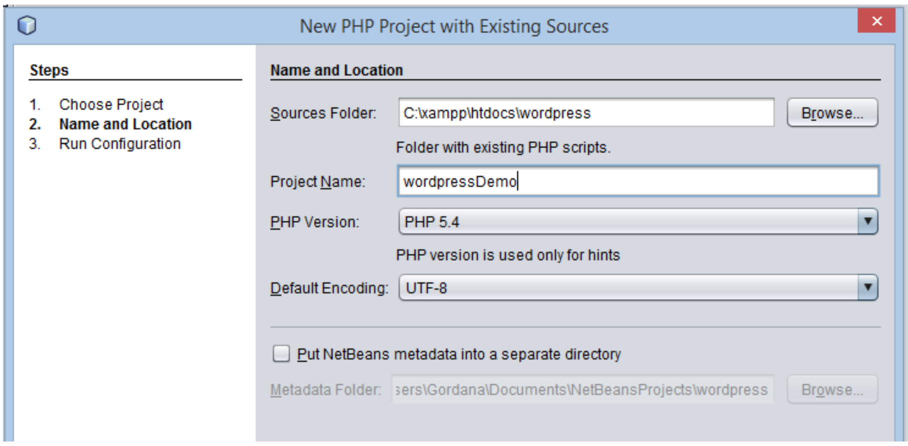
Slika 4: Panel projekata i panel navigatora

```
    <link rel="stylesheet" type="text/css"href="style.css" />
  </head>
  <body>
    <div id="container">
      <header><h1><a href="#">Header</a></h1></header>
      <section>
        <article id="content">
          <p><strong>Content</strong></p>
        </article>
     </section>
     <nav id="navigation" role="navigation">
       <p><strong>Navigation</strong></p>
       <ul>
       <li><a href="http://somelinkCSS.com/">CSS Templates</a></li>
       </ul>
     </nav>
     <aside id="sidebar">
       <p><strong>Sidebar</strong></p>
     </aside>
     <footer id="footer">
       <p>Footer</p>
     </footer>
  </div>
  </body>
```

Za dodavanje funkcionalnosti web stranici može se koristiti programski jezik JavaScript. JavaScript fajlovi uključuju se prilikom kreiranja novog projekta korišćenjem biblioteke, formiranjem novih fajlova i korišćenjem obrazaca. JavaScript može predstavljati dobar uvod u web orijentisano programiranje. Uključivanjem fajlova iz JavaScript biblioteka, fajlovi će biti smešteni u folderu projekta *js/libraries*. Panel navigatora prikazuje strukturu JavaScript fajla sa jednostavnom navigacijom elementima koda.

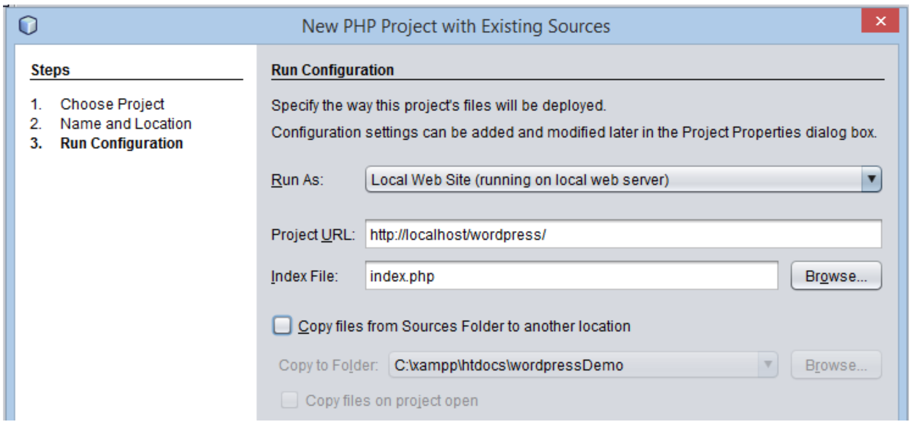
3.3 Primena u CMS sistemima za upravljanje web sadržajem

CMS - Content Management System je dinamičko upravljanje web sadržajem korišćenjem HTML-a, JavaScript jezika za prikazivanje sadržaja, PHP skriptni jezik za izvršavanje upita nad bazom i MySql baze podataka [8]. Postoji veliki broj besplatnih CMS platformi. WordPress je jedan od sistema otvorenog koda za upravljanje web sadržajem. Wordpress koristi sistem unapred definisanih šablona koja se koristi u izradi web sajtova. Korisnici upotrebljavaju, menjaju i kreiraju šablone. Sistemi otvorenog koda za upravljanje sadržajem u nastavnim sadržajima realizuju se kroz korišćenje gotovih besplatnih šablona. Izgled šablona menja se preko stilskih obrazaca CSS. Korisnici besplatnih šablona podešavaju izgled tema preko stilova u okviru Wordpress platforme. Za ovakav način podešavanja izgleda teme neophodno je znanje osnovnih elemenata HTML i CSS, dok je za kreiranje jednostavne Wordpress teme potrebno osnovno poznavanje PHP jezika, JavaScript i strukture Wordpress okruženja [8].

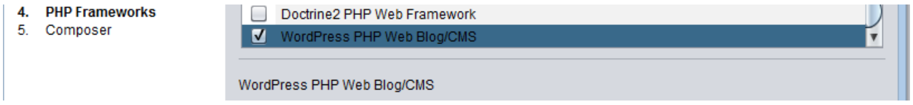


Slika 5: Kreiranje WordPress šablona, naziv i lokacija

NetBeans IDE podržava rad sa PHP programskim jezikom, uz instalaciju dodataka pluginova **PHP WordPress Blog/CMS**, rad sa Wordpress temama ili šablonima. U radu sa šablonima, nakon instalacije Wordpressa, formirati PHP projekat, izabrati iz kategorija projekata PHP tip projekta *PHP Applications with Existing Sources*, uneti naziv projekta, izabrati folder gde se nalazi Wordpress instalacija i verziju PHP skritnog jezika (slika 5), raspored fajlova u okviru projekta (slika 6) [5]. Wordpress temu kreirati izborom *PHP Applications* projekta. Pored navedenih opcija izabrati PHP Frameworks *PHP WordPress Blog/CMS* (slika 7).
Formiranje strukture teme uraditi konvertovanjem jednostavnog HTML šablona i CSS obrasca u fajlove WordPress teme. CSS obrazac je važan deo teme. Na početku CSS fajla dodati odgovarajuće linije koda, da bi ovaj fajl mogao da se koristi kao deo teme: naziv teme, opis teme, link, autor, ključne reči. Fajl *index.html* konvertovati u *index.php*. Na ovaj način moguće je postupno upoznavanje struktu-



Slika 6: Raspored fajlova u okviru projekta



Slika 7: Izbor PHP Frameworks Wordpress

re teme i PHP funkcija bez prethodnog znanja PHP kao programskog jezika. PHP funkcije koje treba uključiti: *bloginfo(), wp_title(), have_posts(), the_posts(), the_permalink(), the_title(), the_author(), the_content(), wp_list_pages(), wp_list_categories().*

Primer PHP funkcija kod prikaza naslova web sajta:

```
<header id="header">
<h1><a href="<?php bloginfo('url') ?>"><?php bloginfo('name');?></a>
</h1>
</header>
```

Korišćenje PHP while petlje i razgranate strukture if kod prikaza sadržaja web strane:

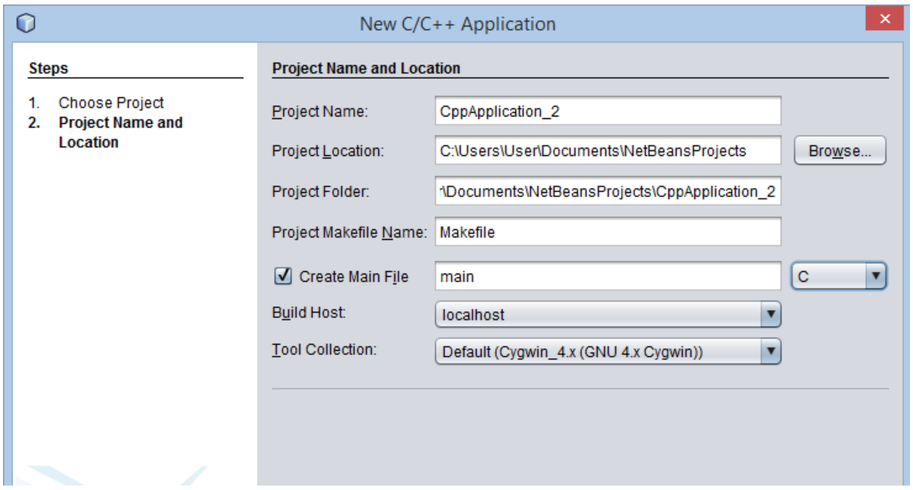
```
<?php if (have_posts()) : while (have_posts()) : the_post(); ?>
<p><strong><a href="<?php the_permalink(); ?>">
<?php the_title(); ?></a></strong></p>
<p>Published on <?php the_time('m d Y'); ?>
by <?php the_author(); ?></p>
<p><?php the_content(); ?></p>
<?php endwhile; else: ?>
```

WordPress tema najčešće ne sadrži samo dva fajla index.php i style.css. U zavisnosti od toga kakva je struktura teme, da li je u pitanju blog, prikaz punih ili uvodnih postova, statička web strana, kreiraju se posebni php fajlovi. Izdvojiti i formirati ostale php fajlove koji čine strukturu teme: *header.php*, *footer.php*, *functions.php*, *content.php*, *page.php*, *single.php*, *sidebar.php*, itd.

3.4 Programiranje u NetBeans okruženju

Kreiranjem C/C++ projekata izučavaju se principi struktuiranog i modularnog programiranja. Struktuirano programiranje je paradigma programiranja koja koristi elemenate potprograma, blok strukture i kontrolne strukture: selekcije, sekvence i iteracije. Modularno programiranje je paradigma programiranja u kojoj se programi dele na nezavisne module.

Iako je NetBeans IDE prvenstveno namenjen za JAVA aplikacije, omogućava korišćenje programskog jezika C/C++. NetBeans ne sadrži C/C++ kompajler, potrebno ga je instalirati. NetBeans podržava konzolne i grafičke aplikacije kroz različite tipove projekata za C/C++ [5]. Postupak kreiranja konzolne aplikacije odraditi izborom novog projekta C/C++ Application, pored naziva projekta, lokacije, izabrati i kompajler C, C++ (slika 8).



Slika 8: C/C++ projekat

Pored konzolnih aplikacija, formiraju se i projekti na osnovu postojećih fajlova koji su nastali u drugim razvojnim okruženjima, zatim grafički interfejs GUI forme izborom projekta C/C++ Qt Application. U toku unosa i menjanja programa postoji pomoć u obeležavanju sintakse, kompletiranju i refaktorisanju koda. Na ovaj način izbegavaju se greške i nastaje kvalitetan kod. Izvršavanje i testiranje programa prati se u izlaznom panelu Output.

U NetBeans IDE moguće je raditi sa objektno orijentisanim programskim jezicima kao što su Java i C++. Objektno orijentisano programiranje koristi objekte kao glavne elemente. Objekat je model entiteta sa trenutnim stanjem i definisanim ponašanjem. Klase opisuju stanje preko atributa i ponašanje objekata korišćenjem metoda. Objekat je instanca klase. Osnovni koncepti objektno orijentisanog programiranja su: apstrakcija, enkapsulacija, polimorfizam i nasleđivanje. Primenom objektno orijentisanog programiranja složeni programi postaju jednostavni za razumevanje i održavanje i važan je deo nastave programiranja u školama.

Java je objektno orijentisan, mašinski nezavistan programski jezik. Vrste programa u Javi su: Java aplikacije koje se izvršavaju samostalno na bilo kom operativnom sistemu i Java apleti koji se izvršavaju u okviru web stranice. Da bi se Java programi izvršavali treba instalirati Java platformu. Java platforma obuhvata: Java SE, Java EE, Java ME i Java FX [10]. Java Standard Edition, Java SE, standardno okruženje, skup softverskih komponenti, rutina i protokola za Java aplikacije. Java Enterprise Edition, Java EE, omogućava razvoj softverskih rešenja na serverima. Java Micro Edition, Java ME, mikro izdanje, je okruženje za aplikacije na mobilnim uređajima. Java FX Script je skriptni jezik za kreiranje desktop i web Java aplikacija [10].

Kreiranje standardne Java aplikacije, iz menija File izabrati New Project. Iz liste kategorija izabrati Java, projekat Java Application. Označiti kreiranje glavne klase, klase koja sadrži glavni metod.

```
package javaCalc;
/**
 *
 * @author User
 */
public class JavaCalc {
    /**
     * @param args the command line arguments
     */
    public static void main(String[] args) {}
        // TODO code application logic here
    }
```

U panelu projekata prikazana je struktura koja sadrži Java pakete i Java klase. Za Java klasu koja je izabrana u panelu projekata, u panelu navigatora prikazana je lista argumenata i metoda. U radnom panelu u kodu se kontroliše sintaksa i obeležavaju greške. U izlaznom panelu pojaviće se dve kartice. Jedna kartica sa nazivom projekta koji se izvršava *nazivProjekta* (run). U toku rada unose se vrednosti promenljivih i prikaz rezultata izvršavanja Java aplikacije. Druga kartica je Debbuger Console koja sadrži poruke o greškama u kodu, oznakama u kodu breakpoint.

Kreiranje grafičkog interfejsa GUI formi uraditi prvo kreiranjem standardne Java aplikacije na način koji je već opisan bez kreiranje glavne klase. Formirati novi fajl Application Sample Form iz kategorije Swing GUI Forms i u okviru njega glavnu klasu main [9]. Na ovaj način nastala je forma sa stavkama menija File, Edit i Help. Forma aktivira panel Pallete iz kojeg se dodaju komponente na postojeću formu. Komponente grafičkog okruženja koje se uključuju iz kategorije

Application Sample Form su JPanel koji deli prozor na delove, JDialog, JFrame kreira prozor aplikacije. Na ove komponente dodaju se stavke iz panela Pallete.

4 Zaključak

Upotrebom Open Source softvera realizuje se veliki deo nastavnih sadržaja kroz nastavne i vannastavne aktivnosti. Njegova prednost je u unapređivanju i osavremenjavanju procesa nastave i komunikacije između nastavnika i učenika, kao i između učenika. Učenici i nastavnici bez ograničenja koja postoje u softveru sa komercijalnim licencama mogu razmenjivati, objavljivati, analizirati i unapređivati rešenja i primere koji su nastali u okviru programa i projekata korićenjem NetBeans IDE. Open Source softver nije samo alternativa komercijalnom softveru koja se primenjuje da bi se izbegle skupe licence. To su kompletna rešenja sa potpunom funkcionalnošću, kompletnom dokumentacijom i održavanjem.

Literatura

[1] Kategorije softvera po vrstama licenci, http://www.linuxzasve.com/kategorije-softvera-po-vrstama-licenci, 2014

[2] Softverske licence, http://sr.wikipedia.org/sr/Softverske_licence, 2014

[3] Softverska licenca, http://www.digitconsulting.rs/index.php/licenciranje-microsoft/licenciranje/sofverska-licenca.html, 2014

[4] NetBeans IDE, http://wiki.ubuntu-me.org/index.php?title=Netbeans, 2014

[5] Documentation, Training & Support, https://netbeans.org/kb/index.html, 2014

[6] Osnove Java programiranja, Dejan Živković, Univerzitet Singidunum, 11-12, 2012

[7] Netbeans The Definitive Guide, Tim Boudreau, Jesse Glick, Simeon Greene, Vaughn Spurlin and Jack J. Woehr, 2002

[8] CMS, http://sr.wikipedia.org/sr/CMS, 2014

[9] Kreiranje formi u Java NetBeans razvojnom okruženju, Olga Ristić, Vlade Urošević, Tehnika i informatika u obrazovanju, Čačak, 496, 2008

[10] Java Documentation, http://docs.oracle.com/en/java, 2014

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Jačanje intuitivnog usvajanja koncepata limes i neprekidnost

Diković Ljubica
Visoka poslovno-tehnička škola, Užice, Srbija
dikoviclj@gmail.com

Stručni rad

Abstract

Jedan od ciljeva ovog rada svakako je da ukaže na potrebu uvodjenja jednog broja interaktivnih primera sa jasnom vizuelizacijom, koji se odnose na ove fundamentalne pojmove diferencijalnog računa, radi njihovog lakšeg usvajanja i radi jačanja, u ovom slučaju, geometrijske intuicije.
U cilju dostizanja i razvijanja intuitivnog razumevanja ovih koncepata potrebno je dobro pripremiti primere koji će omogućiti odgovore na ključna pitanja iz ove oblasti. U radu je pokazano kako pogodno softversko okruženje kakvi su, na primer, Geogebrini Java apleti, omogućava nastavniku da efikasno predje put od intuicije do definicije, od neformalnog ka formalnom kada su u pitanju ove teme diferencijalnog računa.

Ključne reči: matematička intuicija, limes, neprekidnost, vizuelizacija

1 Matematička intuicija

Tokom čitave istorije matematike, postojala je odredjena tenzija izmedju intuitivne očiglednosti i formalne strogosti, pri čemu se menjao stepen u kojem je intuicija mogla pratiti proces formalizacije, ili obrnuto. Današnja matematika iako daleko uznapredovala u apstrakciji i formalizaciji nalaže i dalje modifikovanje zatečenih pojmova i intuitivno preispitivanje prethodnih rezultata. Obično intuicija prethodi rigoroznim dokazima, odnosno ponekad stroga zasnivanja, formalno besprekorna, nameću potrebu najpre za intuitivnim pojmovnim razjašnjenjima. [1]
U matematici, kao i svakoj drugoj naučnoj disciplini, dolaze do izražaja posredna i neposredna saznanja. Saznanja čini sistem istina koji je logički koherentan i formalizovan. Aksiome su prihvaćene kao neposredne istine, koje se u logičkom smislu prihvataju bez dokaza i koji izražavaju jedan oblik neposrednog saznanja. Teoreme, pak, predstavljaju jedan od oblika posrednih istina, koje usvajamo na osnovu dokaza, pa su saznanja stečena na osnovi njih posredna. Pod intuitivnim saznanjem, za razliku od logičkog saznanja, podrazumeva se direktno uočavanje matematičkih istina apstrakcijom, što nazivamo intelektualna intuicija, ali i pomoću čula, što nazivamo senzorna intuicija i što predstavlja podlogu velikog broja očiglednih istina. Valja istaći da se u matematici pod intuicijom često

shvata predvidjanje ili naslućivanje neke matematičke istine, odnosno njeno globalno sagledavanje. [2]
Matematičari se tradicionalno oslanjaju na intuiciju kao način za razumevanje dokaza i konceptualizaciju problema (Hadamard, 1954). Jung definiše intuitivnu percepciju kao mišljenje u slikama. Poreklo tih slika često je u emociji i relacija izmedju kreativne intuicije i emocije je jedan od najvažnijih elemenata kreativnog procesa (Hague, 2003).
Na primeru, Bolzano-Cauchyjevog stava, najpre je intuitivno spoznato da grafik neprekidne funkcije, na osnovu datih uslova, mora bar jedanput preseći x osu i da je apscisa te tačke preseka x_0: Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ i ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, tada na segmentu $[a, b]$ postoji barem jedan broj x_0 takav da je $f(x_0) = 0$.Dakle, istinitost ovoga stava je najpre intuitivno naslućena na osnovu grafika funkcije $f(x)$ u pravouglom koordinatnom sistemu, pa je zatim strogo aritmetički dokazana, bez pozivanja na geometrijsku intuiciju, odnosno geometrijsku očiglednost.
Uopšte gledano, može se reći da intuitivna spoznaja dominira nad logičkom u istorijskoj genezi jednog matematičkog pojma ili teorije, ali i da se njihov uzajamni odnos menja tokom evolucije tog pojma, odnosno teorije, tako što se one uzajamno prate u razvoju matematike, jedna drugu podstiču, dopunjuju i koriguju.

2 Od intuicije do definicije limesa i neprekidnosti

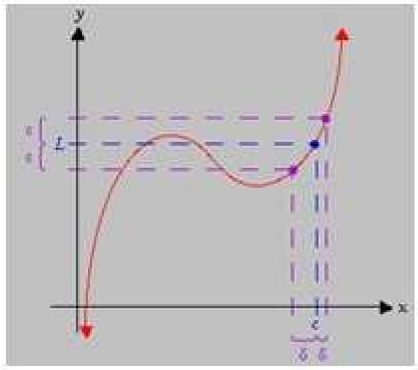
Nastava diferencijalnog računa bila je predmet brojnih naučnih istraživanja dugi niz godina. Rezultati naučnih istraživanja u toj oblasti pokazuju da studenti imaju spoznajne teškoće u razumevanju koncepta granične vrednosti odnosno limesa (Cornu, 1991; Szydlik, 2000; Tall i Vinner, 1981; Williams, 1991).
Koncept granične vrednosti indukuje brojne spoznajne (kognitivne) teškoće uključujući sledeće: izraz "lim(es)", "teži ka", "približava se", "dovoljno blisko nekoj vrednosti", "proizvoljno blisko nekoj vrednosti", "pojam beskonačno male veličine", "pojam beskonačno velike veličine", razumevanje pojma "za svako" ε, formalne $\varepsilon - \delta$ definicije, odnosno teškoće pri korišćenju sintakse i semantike, veza izmedju ε i N, konfuzija pri prelasku iz "konačnog ka beskonačnom", u razumevanju "šta se dešava u beskonačnosti" ...
Zato se nameće logično pitanje: Kako pomoći studentima da što kvalitetnije usvoje ove fundamentalne pojmove diferencijalnog računa?
Integracija odgovarajućih softverskih rešenja i alata, poput GeoGebre, u nastavi diferencijalnog računa omogućiće studentima da vizuelizuju ove teške matematičke koncepte. Na primer, interaktivna softverska rešenja mogu pomoći studentima da "vide" procese, kao i da bezbolno prodju kroz tranziciju od neformalne ka formalnoj definiciji koncepta granične vrednosti funkcije.
Kako je većini studenata nejasna simbolička, formalna definicija limesa, može se, na primer, pre njenog uvodjenja, iskoristiti jedan Java aplet specijalno dizajniran da pomogne u prevazilaženju teškoća pri usvajanju tzv. "epsilon-delta" definicije

granične vrednosti funkcije u proizvoljnoj tački x_0:
Za svaku, proizvoljno izabranu malu vrednost $\varepsilon > 0$, postoji neka vrednost $\delta > 0$ takva da, kad god je razlika, $|x - x_0| < \delta$, tada je $|f(x) - L| < \varepsilon$ (za sve vrednosti x iz domena funkcije f), odnosno zapisujemo

$$\lim_{x->x_0} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(|x - x_0)| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Intuitivno, možemo reći da je $\lim\limits_{x->x_0} f(x) = L$ ako je funkcija $f(x)$ definisana u okolini tačke (ali nije neophodno u samoj tački) x_0 i ako $f(x)$ teži ka nekoj vrednosti L, kada promenljiva x teži ka x_0 (dinamička i neformalna definicija).
Takodje kažemo da je $L \in R$ granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački $x_0 \in R$ i pišemo $\lim\limits_{x->x_0} f(x) = L$ ako vrednosti $f(x)$ mogu postati proizvoljno bliske vrednosti $L \in R$, kada x postane dovoljno blisko vrednosti x_0. [3]
Pri tome, termini "proizvoljno" i "dovoljno" su veoma važni i treba ih dobro razjasniti. Termin "proizvoljno" povezujemo sa "unapred odabrano" ili "ma kako zadato", a termin "dovoljno" sa nečim što nastojimo da postignemo u skladu sa datim uslovima.
Takodje je važno uočiti trend da u slučaju kada "x postane dovoljno blisko vrednosti x_0", tada vrednosti funkcije $f(x)$ ostaju bar jednako, ili više, bliske vrednosti L.
Pri tome, veoma je važno naglasiti da vrednost funkcije $f(x)$ u tački $x = x_0$ u kojoj odredjujemo graničnu vrednost ne utiče na limes, što znači da nije od značaja da li je funkcija definisana u samoj tački $x = x_0$. Drugim rečima, granična vrednost funkcije u tački se bavi ponašanjem funkcije u okolini te tačke, a ne u samoj tački.
Još jedan način za intuitivni pristup ovom konceptu tokom izračunavanja granične vrednosti funkcije u tački, jeste da odgovorimo na pitanje: Da li se može utvrditi da se u okolini tačke $x = x_0$ vrednosti funkcije $f(x)$ "gomilaju" oko neke vrednosti L?
U tom smislu, pretpostavimo da nam je cilj da odredimo koliko brzo se funkcija $f(x)$ menja u samoj tački $x = x_0$, što nazivamo brzinom promene funkcije $f(x)$, u tački $x = x_0$. U svim takvim slučajevima, zapravo se pitamo šta se dešava u okolini tačke $x = x_0$ i koliko daleko se pomeramo od tačke $x = x_0$?
Pre usvajanja formalne definicije limesa, korisno bi bilo razumeti neformalnu definiciju limesa i koristiti vizuelizaciju ovog dinamičkog procesa, kao što je prikazano na sledećoj slici (slika 2) [19].

Grafički, definiciju možemo ilustrovati kao što je prikazano na slici 1 i interpretirati na sledeći način: Ukoliko je L granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački $x = c$, to znači da za svaku ε okolinu tačke L, razmatramo interval $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, odnosno pojas izmedju dve horizontalne prave $y = L-\varepsilon$ i $y = L+\varepsilon$. Tada postoji simetričan interval (δ -okolinu) oko tačke c, u oznaci $(c-\delta, c+\delta)$, odnosno pojas izmedju dve vertikalne prave $x = c - \delta$ i $x = c + \delta$, tako da se ta okolina cela preslikava u uočenu ε-okolinu tačke L.
Ovo možemo interpretirati na sličan način: ako zadamo vrednost ε i odredimo na

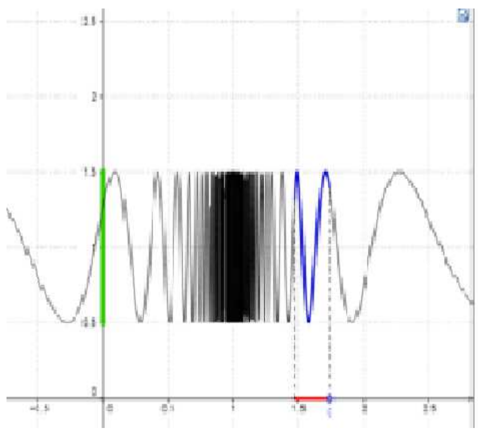


Ilustracija definicije granične vrednosti u tački

osnovu nje položaj horizontalnog osenčenog pojasa, onda ispitujemo da li postoji mogućnost da postavimo vertikalni pojas, odnosno interval oko tačke c, tako da pravougaonik sa temenom u tački (c, L) ima osobinu da grafik funkcije u njega "ulazi" i iz njega "izlazi" duž bočnih strana. Pri tome, važno je naglasiti da vrednost δ zavisi, dakle, od vrednosti ε.
Jedan od ciljeva ovog rada svakako je da ukaže na potrebu uvodjenja jednog broja interaktivnih primera sa jasnom vizuelizacijom, koji se odnose na ove fundamentalne pojmove diferencijalnog računa, radi njihovog lakšeg usvajanja i radi jačanja, u ovom slučaju, geometrijske intuicije.
U cilju dostizanja i razvijanja intuitivnog razumevanja ovih koncepata potrebno je dobro pripremiti primere koji će omogućiti odgovore na ključna pitanja iz ove oblasti. Šta znači kada funkcija ima graničnu vrednost? Koji tipovi limesa postoje? Kako izgledaju grafici ovih funkcija i kako ih prepoznajemo? Kada funkcija ima vertikalnu asomptotu ("skok", "diskontinuitet" - teži ka beskonačnom)?
Na primer, za razvoj i jačanje intuicije u slučaju jednostranih limesa odnosno leve $\lim\limits_{x \to c_-} f(x)$ i desne granične vrednosti $\lim\limits_{x \to c_+} f(x)$ možemo koristiti Geogebrine aplete:[10]
U ovom apletu se prikazuje grafik ma koje zadane funkcije $f(x)$, a korisnik može pomeranjem pokretne tačke duž ose x menjati δ "radijus" interval oko nje, odnosno interaktivno na grafiku posmatrati i očitavati koordinate tačke $(c, f(c))$. Kažemo da $\lim\limits_{x \to c_+} f(x)$ postoji ako su sve vrednosti od $f(x)$ "vrlo blizu" nekom broju, kad god je $x > c$ i x je "vrlo blizu" c, odnosno $\lim\limits_{x \to c_-} f(x)$ postoji ako su sve vrednosti od $f(x)$ "vrlo blizu" nekom broju, kad god je $x < c$ i x je "vrlo blizu" c.
Postoje mnogi slučajevi da jednostrani limesi postoje, premda dvostrani limes ne postoji, pa ih je poželjno vizuelno interpretirati.Na primer, pomoću Geogebre možemo lako generisati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{-\frac{1}{x}}}$, a zatim razmatrati levu

i desnu graničnu vrednost funkcije u tački $x = 0$, odnosno posmatrajući grafik te funkcije zaključiti da je $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+2^{-\frac{1}{x}}} = 1$ i $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+2^{-\frac{1}{x}}} = 0$.

Takodje, bilo bi poželjno demonstrirati i primer funkcije u kojoj jednostrani limesi ($\lim\limits_{x\to 1_-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1_+} f(x)$) ne postoje, zapravo vrednosti funkcije ne teže ka jednoj vrednosti, već osciluju u intervalu $(-1, 1)$, što je prikazano na slici 1.

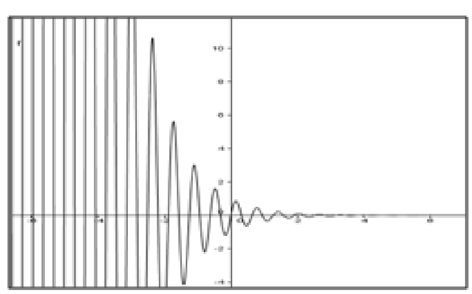


Slika 1: Primer funkcije $1/2 \cdot \sin(\dfrac{10}{x-1}) + 1$

U slučaju dosta složenije funkcije $f(x) = e^{-x} \cdot sin(12x)$, čiji grafik je takodje nacrtan u GeoGebri, istražujemo ponašanje funkcije kada se x približava beskonačnosti, pomeranjem klizača za x vrednosti (slika 3), odakle se zaključuje da je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Kada je u pitanju neprekidnost funkcije, neformalno rečeno, funkcija $f(x)$ je



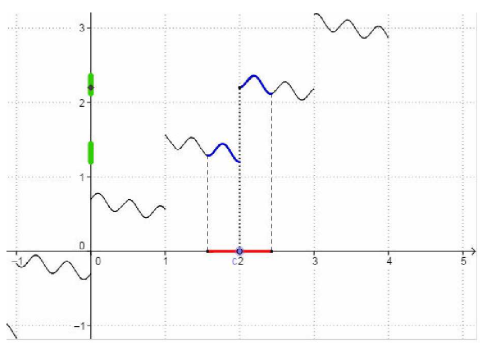
Slika 2: Primer konačne gr.vrednosti kada $x \to \infty$

neprekidna ako se njen grafik može nacrtati bez podizanja olovke sa papira, što

predstavlja i naše intuitivno shvatanje pojma neprekidnosti. Ako je neprekidna funkcija $y = f(x)$ posmatrana nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, tada je njen grafik neprekidna linija koja spaja tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Intuitivno je jasno da, neprekidno "prelazeći"od $f(a)$ do $f(b)$, vrednosti funkcije moraju proći kroz ceo interval izmedju $f(a)$ i $f(b)$.
Prema formalnoj definiciji neprekidnosti važi: Funkcija $f : D \to R$ je neprekidna u tački $a \in D$ akko

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

Jednostavno je uočiti da iz neprekidnosti funkcije sledi postojanje granične vrednosti, a da obrnuto ne važi $-$ funkcija može imati graničnu vrednost, a ne biti neprekidna u posmatranoj tački (na primer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$).
Ako funkcija nije neprekidna u svakoj tački svog domena, kažemo da funkcija u tim tačkama ima prekid (diskontinuitet. U tom smislu, potrebno je razmotriti odgovore na sledeća pitanja: Zašto funkcija nije neprekidna? Kakav je grafik prekidne funkcije? Koji tipovi diskontinuiteta postoje? Može li prekid biti otklonjiv? Postoji li veza izmedju neprekidnosti i diferencijabilnosti? ...
U sledećem primeru data je funkcija za koju treba proveriti da li je neprekidna u nekoj zadatoj tački. Uz pomoć GeoGebrinog apleta student dobija grafičku reprezentaciju različitih situacija (slika 3), a nastavnik može paralelno analizirati i objasniti još jednom svaki segment algebarskog rešenja:



Slika 3: Ispitivanje neprekidnosti u tački

Da li postoji granična vrednost funkcije u tački $x = 2$? Da li je funkcija definisana u tački $x = 2$? Da li je funkcija neprekidna u tački $x = 2$?
Pomoću ovih pitanja i dobijanjem odgovora na ova pitanja u interaktivnom radu jača se veza izmedju pojmova "definisan", "neprekidan" i "granična vrednost" u tački i prilično lako se dolazi do zaključka: Leva i desna granična vrednost kada $x \to 2_-$ i kada $x \to 2_+$ postoje, različite su, pa ne postoji granična vrednost funkcije u ovoj tački; $f(2)$ postoji; funkcija nije neprekidna u tački $x = 2$.

3 Zaključak

Pokazano je da za neke fundamentalne teme diferencijalnog računa, nastavnici mogu relativno lako integrisati raspoloživa tehnološka rešenja u redovnu nastavu, čime studentima pružaju više mogućnosti za sopstveno istraživanje, jačanje matematičke intuicije i dublje razumevanje materije. Osim toga, studentu će biti dostupna višetruka reprezentacija datog koncepta. U ovom radu je pokazano kako pogodno softversko okruženje kakvi su, na primer, Java apleti, omogućava nastavniku da efikasno predje put od intuicije do definicije, od neformalnog ka formalnom kada su u pitanju ove teme diferencijalnog računa. Bolja vizuelizacija odredjenih matematičkih koncepata dodaje novu dimenziju u nastavi matematike, otvarajućii mogućnosti za atraktivniju nastavu, ali i za jačanje intuitivne percepcije tih koncepata, kao i kreativne intuicije.

Literatura

[1] A. Gordić, Egzaktnost u matematici, filosofiji i naukama, Filozofski godišnjak, god.V, br. 5, Banja Luka, 2007, str. 134-15

[2] V. Kadum, Matematička intuicija i intuicija u nastavi matematke, Metodički ogledi, 13 (2006) 1, 83-93

[3] $http://imft.ftn.uns.ac.rs/natasa/uploads/Main/Analiza1_LectureNotes.pdf$

[4] Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. (ed), Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[5] Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. Journal for research in Mathematics Education, 22 (3), 219-236.

[6] Szydlik, J. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function, JRME online, vol 31, issue 3, 258-276.

[7] Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

[8] Jacques Hadamard: A Universal Mathematician, book By Vladimir Mazya, T. O. Shaposhnikova, Publisher: American Mathematical Society and London Mathematical Society, 1991

[9] A. Hague: Fiction, Intuition, and Creativity: Studies in Bronte, James, Woolf, and Lessing, ISBN 0-8132-1314-2, The Catholik University of America Press, 2003

[10] $http://www.geogebratube.org/student/m80464$

[11] $http://www.sagemath.org/calctut/continuity.html$

FOURTH MATHEMATICAL CONFERENCE OF THE REPUBLIC OF SRPSKA
Trebinje, 6 and 7 June 2014

Group work in mathematics tuition

Marina Zubac
University of Mostar
ante.zubac@tel.net.ba

Abstract

In this paper effects of group work on the results of the students in mathematics tuition are researched. The research is conducted in Čitluk High school during first three months of the current year. It involved 80 students of the first high school classes. The students were divided into two groups; those who worked in groups (experimental group) and those having traditional tuition (control group). In the end we conducted a knowledge test, which has shown that the experimental group was more successful ($\chi 2 \ = 13,434$). An interview of the math teachers was carried out also, and it shows that most of them seldom or never use group work in mathematics tuition. Finally, in the end of this paper, use of the group work in the mathematics tuition will be proposed.

1 Introduction

Education in the 21^{st}century demands quality knowledge acquisition which should be used as the foundation for permanent learning and acquisition of new skills during one's lifetime. In the acquisition of these new skills, people should rely on each other, i. e. work in the collaboration with each other. That's why different strategies of tuition are trying to be implemented which are going to satisfy these conditions. One of the collaborative means of studying is group studying. That's why this research is based on the efficiency of the group work in the mathematics tuition. This research has shown that better results were obtained by the students who used group work than those who didn't and that the group work is seldom used in mathematics tuition.

2 Group work

A group – assembled for class - is defined as three to five people working together (Pranjić,292). According to Pranjić, benefits of the group studying are:

- cooperative, free and productive engagement of the study groups;
- possibility to encourage the students' conduct; cooperation, tolerance, rule observance, communicative competency, sympathy, etc.
- summarizing the differences regarding the tuition and working style of the students (differentiation).

Disadvantages:

- possibility to turn the social goals in their contrary: prejudices, rejection of others, their exclusion etc.
- possibility to turn the role division in acceptance of the favorite function.
- Group work is an extremely effective way of acquiring knowledge (Kurnik, 2003: 52). According to Kurnik, principles of the organization and execution of group work are:

1. Group work means to divide the class into groups of 4 to 6 students.
2. The functions given to groups may be the same or different depending on the nature of the tuition content and class goals.
3. Groups may have homogeneous and inhomogeneous composition of the students. It is better to have inhomogeneous group composition in which student's foreknowledge is different. Students with less foreknowledge learn from those with more of it.
4. In each group, one student is selected as a group leader, every hour leader is changed.
5. Group should work about the same rate.
6. Each member of the group is resolving his part of the task set.
7. Control of students' work teacher is conducting throughout the whole class.
8. Students' activity and the success of group work will be better when the students are better acquainted with the way in which the teacher will evaluate their work. (K., 2003: 53)

3 Case study

Identify the achievements of students who taught mathematics in groups, and within that test relations between group study and success in task solving between experimental and control group.

Narrower subject of this research relates to the consideration of correlation (intensity and direction) between learning in the group form of work and success of students in the mathematics tasks.

3.1 The goal of the research

1. Scientific, research is designed to study the nature (intensity and direction) of correlation between the observed variables, i. e. between learning in the group form of work and success of students in mathematics tasks; and consideration of the relation between the students in the experimental and control group in mathematics success.

2. Practical: obtained results could be an incentive to improve the educational process and teaching mathematics.

3.2 Research Hypothesis

The basic hypothesis of this research is: "Students will achieve better success in solving mathematics tasks in the experimental group, because the teaching of mathematics is focused on group work."

By conducting this study we will test this hypothesis and accept or reject it according to a certain level of significance.Therefore, in this study we will define the perception of group work by students in the experimental and control groups, and we will determine whether there is statistically significant difference between students in the experimental and control groups in mathematics task solving.

3.3 Defining variables

Upon researching the differences in group work and success in mathematics by students in the experimental and control groups, the following dependent and independent variables of research were defined:

Dependent: success in solving mathematics tasks;

Independent: learning in a group form of work and school.

3.4 The sample of participants

The research was done with the first-year high school students in Čitluk High School. There was no need for unification of the experimental and control groups, because they are all students of the same school and the same profession. That is shown in the following table.

The pattern includes 80 participants. As we can see, they are all average students. Average grade is $2,96$ (good).

Pearson's $\chi^2 = 3,92$, $df\,4; p = 0,05$. Contingency coefficient: $0,216$.

Contingency coefficient 0.216 indicates that there is no statistically significant difference in mathematics grades obtained by the students in the experimental and control groups. So groups are uniform.

Groups	N	%
Experimental	40	50
Control	40	50
Total	80	100
Mathematics grades		
insufficient	9	11,25
sufficient	24	3
good	21	26,25
very good	13	16,25
excellent	13	16,25
total	80	100

Table 1: Mathematics success of all participants

Groups	experimental	control
insufficient	6 (15%)	3 (7,5%)
sufficient	12 (30%)	12 (30%)
good	8 (20%)	13 (32,5%)
very good	7 (17,5%)	6 (15%)
excellent	7 (17,5%)	6 (15%)
total	40 (100%)	40 (100%)

Table 2: Mathematics success by group

3.5 Methods and Tools

For the purposes of this study two methods of data collection were used:method of theoretical analysis, which involves collecting data from the literature of scientific, technical and other papers in connection with the problem which we have investigated and systematically-experimental method as a typical field research which has helped us to collect the necessary data on the appropriate sample using appropriate tools.

Tools for collecting data:

Interview on students' grades obtained in mathematics, mathematics test.

3.6 Organization of research and methods for data processing

The study was designed as a typical empirical research. Organization of the research was conducted by professors of mathematics along with the author of this paper. The testing was conducted in April 2014.

During statistical data processing different statistical procedures were used (determination of frequencies and percentage relationships for all variables and for determining statistical significance of differences between the studied variables Pearson's χ^2 and C coefficient were used).

The study was conducted with first grade students of the Čitluk High School. Students were divided into two groups, experimental and control one. The control group was working normally.In teaching the experimental group, group work was used. Students were divided into 4 groups of 5 students. Groups were inhomogeneous.In dividing the tasks each student in the group had his own assignment, so that all the students were involved in the work.At the end of work, representatives of each group - one student or more depending on the teaching material - exhibited their results.

For example, in the teaching unit, *Distance between two points in the plane*, tasks divided by groups looked like this:

The first group had the task to find the distance between two points $A(x_1\ , y_1)$ and $B(x_1\ , y_2)$ in the coordinate plane.

One student was looking for the distance,provided $y_1 = y_2$, other $x_1 = x_2$. The other three students were supposed to find the distance between the points: first $A\,(3, -2)\,i\ B(3, 2)$, second$A\,(3, -2)\ \ i\ C(1, -2)$ and third $B(3, 2)$i $D(-2, 2)$.

The second group had the task to derive a formula for the distance between two points in the plane. All students took part in this task, and finally one of them exhibited.

The third group was looking for the distance between two points with given coordinates, where each student of the group received a different task, and in the end only one of these tasks has been done on the board.Of course they did not know until the end who will be the one writing on the board. (The teacher wrote the formula.)

The fourth group had the task prove that the triangle

$$ABC, \quad A(-1,-3), \ B(9,7), \ C(-3,3)$$

was rectangular.

The best student was counting the length of one side, and the other two sides, two students. Eventually they all checked reversal of the Pythagorean Theorem.

The fifth group had the task to determine the vertical axis point distant to the point $K(-4,1)$ for 5 (three students) and to determine the distance of the points from the starting point (two points for two students).

Students' opinion:

1. "Good idea, because in this way we jointly solve tasks and share our opinions which greatly helps." (Marija Pervan)

2. "We learn through fun and our other classes should look like this."(Jelena),

3. "I liked working in groups because we had the opportunity to jointly solve tasks. Then we all take part in the work."(Marija-Helena),

4. "I'm fascinated by group work, because it'seasyandinteresting. Certainlya-wonderful experienceand we needto applyit more often."(Ivo Ćavar),

5. "I really like working in groups because even though there is something we don't know, the rest of the group takes the trouble to explain it to us."(Jelena Buntić).

Figure 1: Group form of work

3.7 Result analysis

The object of this study was the impact of collaborative learning on student achievement in mathematics, which is verified by knowledge test.

The following hypothesis should be verified: *"Students will achieve better success in solving mathematics tasks in the experimental group, because the teaching of mathematics is focused on group work."*

Tasks solved	experimental	control
0	0	4
1	2	8
2	8	6
3	12	8
4	4	8
5	14	6
total	40	40
$\chi^2 = 13,434$; $df = 5; p = 0,05$		

Table 3: The frequencies of solved problems by groups

Students of the experimental group achieved better results in solving a math test (Table 3 and graph chart), which means that the hypothesis was confirmed.

As the obtained χ^2 totals 13.434 with 5 degrees of freedom and with the 99% criterion of significance, one can conclude that this test result is not random, but rather is the result of group work done by the students in the experimental group.

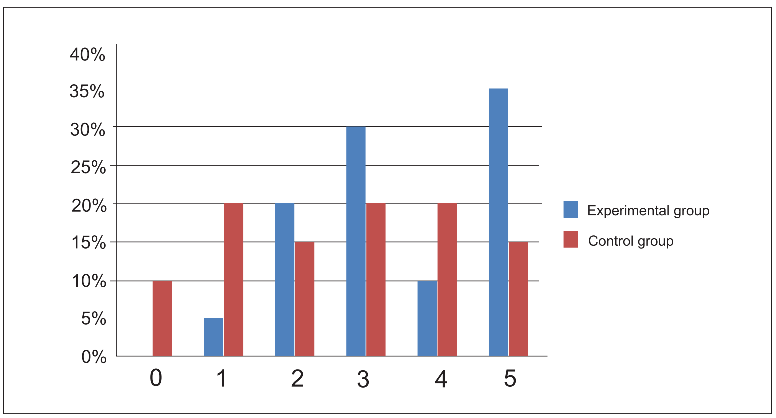


Figure 2: Percentage of resolved tasks by groups

The graph shows that all five tasks were solved by 35% of the students who have studied in the group and that there would be not even one student who did not solve at least one task,unlike the control group, where 10% of students did not solve a single task.

Fifteen high school mathematics teachers were surveyed. Only one of them used the group work in the classroom, a fact which shows devastating results.

4 Conclusion

This paper showed that the group work in mathematics teaching leads to better learning outcomes.The results show that students of the experimental group, those who have used group work, achieved better results in knowledge tests than those who were working by the traditional tuition. Chi-square was for a certain degree of freedom greater than the limit value at the significance level 0.05, totaling 13,343.

Therefore, in teaching, group work should be applied as one of the motivations for learning mathematics and improving the quality of mathematical knowledge.

References

[1] Dakić, B. Elezović, N. Matematika 1, Udžbenik i zbirka zadataka za prvi razred gimnazije, Element, Zagreb, 2002.

[2] Kurnik, Z. Grupni rad, Matematika i škola 22(2003), 52-57

[3] Pavleković, M. Metodika nastave matematike s informatikom I, Element, Zagreb, 1997.

[4] Pavleković, M. Metodika nastave matematike s informatikom II, Element, Zagreb, 1999.

[5] Pranjić, M. Didaktika, Tehnička knjiga, Zagreb,2005.

[6] Varošanec, S. Matematika 1,, Udžbenik i zbirka zadataka za prvi razred tehničkih škola, Element, Zagreb, 2009.

[7] Vizek Vidović, V. Vlahović-Štetić, V. Rijavec, M. Miljković, D.(2003) Psihologija obrazovanja, IEP-VERN, Zagreb

[8] Zech, F. Metodika nastave matematike, Goettingen, 1995.

FOURTH MATHEMATICAL CONFERENCE OF THE REPUBLIC OF SRPSKA
Trebinje, 6 and 7 June 2014

Regularized Trace of a One-Dimensional Schrodinger Operator Perturbed by a Dirac δ-function

Pechentsov Alexander Sergeevich
Lomonosov Moscow State University
pechentsovas@rambler.ru

Review paper

Abstract

In this paper we consider regularized trace of a one-dimensional Schrodinger operator perturbed by a Dirac δ-function.

1 Regularized Trace of a One-Dimensional Schrodinger Operator Perturbed by a Dirac δ-function

$L_2[0,\infty)$ we consider the Sturm-Liouville operator generated by the expression

$$l_{a,b} = -\frac{d^2}{dx^2} + x + a\delta(x-b), \tag{1.1}$$

$\delta(x)$ - Dirac delta function, a, b - positive numbers.

There are several approaches to the determination of the Sturm-Liouville operators with a distributional potential. Following the work of A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov ([1], [2]), we define self-adjoint operator $\mathcal{H}^0_{a,b}$ generated expression $l_{a,b}(1)$. Let $y(x)$ - is absolutely continuous on $[0,+\infty)$, the function $(y(x) \in AC[0,t],\ \forall t > 0)$.

Quasiderivatives define function $y(x)$, gently sloping

$$y^[1](x) = \frac{dy(x)}{dx} - Q(x)y(x),$$

where

$$Q(x) = \frac{x^2}{2} + aH(x-b),\ H(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geqslant 0 \end{cases}$$

Assume that quasiderivatives $y^{[1]}(x)$, in turn, is absolutely continuous function. Then the expression (1) can be rewritten in the form

$$l_{a,b}[y] = -\frac{dy^{[1]}}{dx} - Q(x)y^{[1]}(x) - Q^2(x)y(x).$$

In $L_2[0,+\infty)$ we define the operator $\mathcal{H}^0_{a,b}$:

$$\mathcal{H}^0_{a,b}(y) = l_{a,b}[y],$$

$$\mathcal{H}^0_{a,b} = \{y \in L_2[0,+\infty),\, y(x) \in AC[0,+\infty),\, y'(x) \in AC([0,+\infty)/b),$$

$$y'(b+) - y'(b-) = ay(b),\, y(0) = 0,\, l[y] \in L_2[0,+\infty)\}.$$

Operator $\mathcal{H}^0_{a,b}$ is positive, self-adjoint operator with discrete spectrum [3]:

$$\sigma(\mathcal{H}^0_{a,b}) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

The eigenvalues $\lambda_n, n = 1, 2, \ldots$ of operator $\mathcal{H}^0_{a,b}$ are zeros of an entire function

$$\triangle(\lambda) = [1 + \pi a Ai(b-\lambda)Bi(b-\lambda)]Ai(-\lambda) - \pi Ai^2(b-\lambda)Bi(-\lambda),$$

where $Ai(\lambda)$, $Bi(\lambda)$ are Airy functions [4].

The eigenvalues of the unperturbed operator λ_n^0, (a=0)

$$\mathcal{H}^0 y = \begin{cases} -y''(x) + xy(x) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

combined with a negative sign, are the zeros of the Airy function $Ai(-\lambda_n^0)) = 0$.

For λ_n^0 known complete asymptotic expansion when $n \longrightarrow \infty$ [4, p. 389]. We restrict ourselves to the asymptotic behavior:

$$\lambda_n^0 = \left(\frac{3}{2}\pi n\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{6n} + \left(\frac{5}{108\pi^2} - \frac{1}{144}\right)\frac{1}{n^2} + \overline{\overline{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \tag{1.2}$$

From the properties of the Airy function $Ai(\lambda), Bi(\lambda)$ we find the location of the zeros of $\triangle(\lambda)$.

Theorem 1.1. The eigenvalues $\lambda_n, n-1, 2, \ldots$ of operator $\mathcal{H}^0_{a,b}$ satisfy the inequalities

$$\lambda_n^0 \leqslant \lambda < \lambda_{n+1}^0, \forall n \in N,$$

where $\{-\lambda_n^0\}$ is the sequence of zeros of the Airy function $Ai(-\lambda_n^0) = 0$.

Theorem 1.2. The eigenvalues $\lambda_n, n-1, 2, \ldots$ of operator $\mathcal{H}^0_{a,b}$ have the asymptotic

$$\lambda_n = \left(\frac{3}{2}\pi n\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{6n} + \frac{a\cdot\alpha}{n^{\frac{4}{3}}} - \frac{a\cdot\alpha}{n^{\frac{4}{3}}}\cos\left(\frac{2b}{3\pi\alpha}n^{\frac{1}{3}}\right) + \overline{\overline{O}}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)\right),\; n \to \infty, \tag{1.3}$$

where $\alpha = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{(3\pi)^{\frac{4}{3}}}$.

We introduce the notation

$$\sqrt{\lambda_n} = \mu_n, \ \sqrt{\lambda_n^0} = \mu_n^0.$$

From the asymptotic formula (2), (3) that the number of

$$\sum_{n=1}^{n} \left(\mu_n - \mu_n^0 - \frac{a}{6\pi n} \right)$$

converges.

To calculate the sum of this series introduce the function

$$Z(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-\sigma} \left(\frac{(\triangle(\mu^2))'}{\triangle(\mu^2)} + \frac{2\mu Ai'(-\mu^2)}{Ai(-\mu^2)} \right) d\mu.$$

Contour Γ selected in the complex plane μ cut along the negative real axis and consists of a beam $t, -\infty < t \leqslant -r$, right semicircle $\xi = re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ and beam t, $r \leqslant t < \infty$, $0 < r < \lambda_1^0$.

The function $Z(\sigma)$ is analytic for $Re\sigma > -1$ and $Re\sigma > 3$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^{-\sigma} - (\mu_n^0)^{-\sigma}) = Z(\sigma).$$

If $\zeta(\sigma)$ is Riemann zeta function, than:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \mu_n^0 - \frac{a}{6\pi n}) = \lim_{\sigma \to -1+0} \left(Z(\sigma) + \frac{\alpha\sigma}{6\pi} \zeta(\frac{4+\sigma}{3}) \right) = -\frac{a}{2\pi}(ln(\frac{a}{2}) + \frac{\gamma}{3}),$$

where γ is the Euler constant.

Theorem 1.3. The following formula holds

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \mu_n^0 - \frac{a}{6\pi n}) = -\frac{a}{2\pi}(ln(\frac{a}{2}) + \frac{\gamma}{3}),$$

where γ is the Euler constant.

References

[1] Savčuk A.M., Šalakov A.A., *Operator Sturma-Liuvila sa singularnim potencijalima*, Matem.Zametki. 1999.T.66 No6 c.97-912.

[3] Albeverio S.Kostenko A., Malamud M. Spectral theory of semilounded Strum -Liouville operators with local interactions on a discrete set//Journal of mathematical Physics. 2010. No51.P.102102-24.

[4] Oliver F., *Asimptotika i spacijalne funkcije*, Moskva, Nauka, 1990

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Kvantifikatori ograničenog dometa

Radoslav Milošević
Filozofski fakultet Pale
radoslav_milosevic@yahoo.com

Stručni rad

Apstrakt

U savremenoj matematičkoj logici posebnu ulogu ima kvantifikatorski račun. U ovom radu najprije ćemo istaći savremenu interpretaciju kvantifikatora. Na kraju rada ćemo izložiti kvantifikator ograničenog dometa, a što ćemo ilustrovati i određenim primjerima.

1 Uvod

Logičke formule dobijaju značenje, vrijednost ili smisao tek kad sve njihove znakove interpretiramo ili protumačimo u nekom modelu M. Svaki model M čini neki neprazan skup U, koji se zove univerzum ili svemir modela M. Obično imamo na umu tzv. standardne modele pa npr. u onom za geometriju ravni univerzum čine sve tačke i pravci ravni, a u onom za analizu univerzum je skup realnih brojeva. To nisu jedini skupovi u kojima možemo interpretirati formule ovih discilina. Do bilo kojeg modela M date formule F, što se može izgraditi na odabranom univerzumu U, dolazimo tako da svaki elmenatarni predikat koji se pojavljuje u formuli F shvatimo ili interpretiramo kao stanovitu relaciju u kojoj se nalaze elementi univerzuma, i to kao relaciju s onoliko mjesta koliko ih je imao i predikat, a svaku konstantu iz formule F interpretiramo kao stanoviti elemenat univerzuma. Dosad su svi znakovi u elementarnim predikatima formule F dobili značenja u modelu osim njihovih slobodnih varijabli. Svaka od njih može poprimiti kao svoje značenje bilo koji element univerzuma, ali, tek kad svima njima damo značenja, možemo pitati je li formula F istinita ili nije za odabrano značenje svojih slobodnih varijabli. Na ovaj način određujemo semantičku vrijednost formuli F u modelu M. Pri tome su istina i laž jedine dvije semantičke vrijednosti. Kažemo da je formula F ispunjiva u modelu M ako se u njegovom univerzumu može naći barem jedno značenje njenih slobodnih varijabli za koje će ona biti istinita, tj. za koje će u modelu M biti onako kako u formuli piše, a otklonjiva ako se može naći barem jedno značenje njenih slobodnih varijabli za koje će ona biti neistinita, tj. za koje neće biti u modelu onako kako u formuli piše. Kažemo da je neka formula istinita u modelu ako pri opisanom tumačenju ili shvatanju njenih znakova bude u modelu onako kako u formuli piše, ali za svako moguće značenje što ga njene slobodne varijable poprimaju u pripadnom univerzumu. Drugim riječima, formula je istinita u modelu kad je u njemu ispunjiva za svako značenje svojih slobodnih varijabli. Formula će biti lažna ili neistinita u modelu ako bude otklonjiva za svako značenje svojih slobodnih varijabli u njemu. Primjetili smo da za datu formulu što sadrži slobodne varijable nisu u protivrječnoj suprotnosti njena istinitost u datom modelu (istinitost naprosto) i njena neistinitost ili lažnost (neistinitost naprosto) u tom istom modelu, već to čine ispunjivost formule u tom modelu i njena neistinitost u njemu te otklonjivost i istinitost. Stoga vrijedi da formula nije lažna u nekom modelu ako i samo ako je ona ispunjiva u njemu, odnosno formula nije istinita u nekom modelu ako i samo ako je ona otklonjiva u njemu, pa su parovi termina В»neispunjiva formulaВ« i В»lažna formulaВ« te В»neotklonjiva formulaВ« i В»istinita formulaВ« istoznačni u istom modelu. Primjer 1.1. Za elementarne predikate P(x, y) i Q(y, z) sagradićemo model M u univerzumu U = a, b. P(x, y) i Q(y, z) shvatamo u M kao one dvomjesne relacije p(x, y) i q(y, z) u skupu U što su određene priloženim dvjema tablicama. Da ukažemo na to za koja dva elementa od U smatramo da stoje u relaciji r ili q,stavljamo uz njih znak +, a znak вЂ" uz svaka ona dva što nisu u relaciji. Time je naš model M definisan, pa ga možemo zapisati i ovako M = (a, b, p, q).

(1) Formule P(x, y) i Q(y, z) ispunjive su u M. Prva je zato ispunjiva jer za značenja slobodnih varijabli x = b i y = a u M vrijedi p(b, a), a druga zato što za značenja slobodnih varijabli y = a i z = b u M vrijedi q(a, b).

x	y	p(x,y)
a	a	+
a	b	-
b	a	+
b	b	-

y	z	q(y,z)
a	a	-
a	b	+
b	a	-
b	b	-

(2) Obje formule su i otklonjive u M jer za značenje slobodnih varijabli x = a i y = b u M nije na snazi p(a, b), a za značenje slobodnih varijabli y = a i z = a, ne vrijedi u M q(a, a).

(3) Kako su obje otklonjive u M, ni jedna nije istinita u M, a kako su obje ispunjive, ni jedna nije lažna u M.

2 Interpretacija kvantifikatora

Formula oblika $\forall x A$ biće istinita u datom modelu za poznate vrijednosti svojih slobodnih varijabli (među kojima sigurno nije varijabla x) ako formula A(x) bude istinita za to istu vrijednost onih svojih slobodnih varijabli koje su objema zajedničke i za svako moguće vrijednost varijable x što ga ova može poprimiti u pripadnom univerzumu, a biće neistinita u modelu za izvjesnu vrijednost svojih slobodnih varijabli ako formula A(x) bude lažna za tu istu vrijednost onih svojih slobodnih varijabli koje su objema zajedničke i za barem jednu vrijednost varijable x što ga ova može poprimiti u pripadnom univerzumu. Vidimo da sve varijable zadržavaju svoje vrijednosti, a samo varijabla x prolazi univerzumom poprimajući svaki njegov element kao svoju vrijednost. Zapisom A(x) naznačimo samo da bi se u formuli A mogao naći poneki slobodni x što je prije bio vezan u formuli $\forall xA$, ali nipošto da se x mora pojaviti u A. Sjetimo se samo da je formula $\forall xA$ legitimna i onda kad u A uopšte nema x ili je on tamo samo vezana varijabla. Doduše, najčešće će se x i pojaviti. Zapisom A(,...,) slično ćemo naznačiti da u formuli A smijemo očekivati varijable $y_1, ..., Y_n$ kao slobodne. Formula oblika $\forall xA$ biće istinita u datom modelu za poznate vrijednost svojih slobodnih varijabli (među kojima sigurno nije varijabla x) ako formula A (x) bude istinita za istu vrijednost onih svojih varijabli koje su objema zajedničke i za barem jedno od mogućih značenja varijable x što ga ova može poprimiti u pripadnom univerzumu, a biće neistinita u modelu za poznatu vrijednost svojih slobodnih varijabli ako formula A(x) bude lažna za istu vrijednost onih svojih slobodnih varijabli koje su objema zajedničke i za svaku vrijednost varijable x što ga ova može poprimiti u pripadnom univerzumu. Ako je formula oblika $\forall xA$ izjava, onda je ona istinita u datom modelu M ako i samo ako je formula A(x) istinita u M za svako značenje varijable x u pripadnom univerzumu, a neistinita je u M ako i samo ako je u M neistinita formula A(x) barem za jednu vrijednost varijable x u pripadnom univerzumu. Ako je formula oblika $\exists xA$ izjava, onda je ona istinita u datom modelu M ako i samo ako je u M istinita formula A (x) barem za jednu vrijednost varijable x u pripadnom univerzumu, a neistinita je u M ako i samo ako je neistinita u M formula A(x) za svaku zvrijednost varijable x u pripadnom univerzumu. Navedeno pravilo u interpretaciji formula što počinju s kvantifikatorima pokazuje da smo u modelu vjerno opisali riječi "svaki" i "neki".

Primer 2.1. U modelu iz primjera 1.1. vrijedi: (1) formula $\forall xP(x, y)$ ispunjiva je u M jer su za vrijednost njene slobodne varijable y = a i M na snazi oba podatka, p(a, a) i p(b, a), tj. za svako moguću vrijednost varijable x u U; (2) formula $\exists y$ $\forall x$ $P(x, y)$ je istinita u M, jer je y = a onu vrijednos varijable u U koje je u relaciji p sa svakim vrijednos varijable x u U; (3) formula $\forall yP(x, y)$ nije ispunjiva u M jer vrijednost njene slobodne varijable x = a nije u relaciji p sa vrijednosti y = b (iako jest u relaciji p sa vrijednost y = a), a niti je vrijednost x = b u relaciji p sa y = b (iako jest sa vrijednošću y = a). Kako u U nema vrijednost varijable x koje bi bilo u relaciji p i s, y = a i s, y = b, to je formula neispunjiva, odnosno ona je lažna u M; (4) formula $\exists x$ $P(x, y)$ ispunjiva je u M, ali je formula $\forall y$ $\exists x$ $P(x, y)$ lažna u M jer vrijednost y = b nije u relaciji p ni sa vrijednost x = a ni $sx = b^2$.

Primer 2.2. Sagledajmo standardni model $\pi_1 = (N, <)$, gdje je sa N označen skup prirodnih brojeva i gdje je $<$ oznaka za relaciju strogog uređenja, po kojoj je ispunjeno $1 < 2 < ... < n < n + 1 < ...$ te standardni model$\pi_2 = (N, \leq)$, gdje je za svaki prirodni broj n ispunjeno $n \leq n$, a za svaka dva n i m pogotovo $n \leq m$ ako je $n < m$. Pomoću ovih dviju relacija interpretiraćemo elementarni predikat $x\varrho$ y. U π_2 je istinita formula $x\varrho$ x, koja je predikat, a istinite su i formule $\exists$ $(x\varrho$ $x)$ te $\forall x$ $(x\varrho$ $x)$, koje su izjave. Formula $\exists x$ $\forall y(x\varrho$ $y)$ istinita je u π_2 jer u uređaju skupa N relacijom $\leq$, što je definisana u $\pi 2$, postoji najmanji element u N. Ista je formula lažna u $\pi 1$ jer bi takav x morao biti manji i od sebe sama, a to se nikad ne događa. Međutim, formula $\forall y$ $(x \varrho\ y)$ ispunjiva je i otklonjiva u π_2 jer, ako uzmemo 1 kao vrijednost za x u N, biće onako kako u formuli piše, a uzmemo li x = 5 kao vrijednost, izmiču nam značenja za y u N:1, 2, 3 i 4, a svako je od njih manje od 5 u π_2, pa ne može biti onako kako u formuli piše za svaku vrijednost varijable y u N.

Primer 2.3. Ako formula $\forall x A$ (ili formula $\exists x\ A$) nije iskaz, već je predikat u nekim svojim slobodnim varijablama $y_1 ... Y_n$, ipak će u bilo kom modelu M ona biti istinita ako i samo ako bude u M istinita formula $\forall y_1, ..., \forall y_n\ \forall x\ A$ (ili formula $\forall y_1, ..., \forall y_n\ \exists x\ A$), neistinita će ona biti ako i samo ako bude neistinita u M formula $\exists y_1, ..., \exists y_n\ \forall x A$ (ili formula $\exists y_1, ..., \exists y_n \exists x\ A$) . Jasno je da će takva formula biti tačna u M ako i samo ako bude u M istinita formula $\exists y_1, ..., \exists y_n\ \forall x$ A, odnosno ona će biti neistinita u M ako i samo ako bude u M neistinita formula $\forall y_1, ..., \forall y_n\ \forall x\ A$. Analogno vrijedi i za formulu oblika $\exists x\ A$ kojoj su slobodne varijable y_1,...,Y_n. Međutim, ovaj podatak potpada pod opštu šemu prema kojoj vrijedi u bilo kojem modelu M da će formula F biti istinita u M ako i samo ako bude u M istinita formula $\forall y_1 ... \forall\ Y_n\ F$, gdje su $y_1, ..., Y_n$ sve slobodne varijable formule F, odnosno da će takva formula F biti lažna u M ako i samo ako u M bude lažna formula $\exists y_1 ... \exists y_n\ F$. Ova činjenica iziskuje dokaz. U dokazu ćemo se ograničiti na formulu F kad ona ima samo 3 slobodne varijable: , i (slučaj dovoljno indikativan za sve ostale). Da je $\forall y_1\ \forall y_2\ \forall y_3\ F$ otklonjiva u nekom M, prema definiciji o interpretaciji formule što počinje s kvantifikatorom barem za jedno bi značenje varijable y_1 u pripadnom univerzumu formula $\forall y_2\ \forall y_3\ F\ (y_1)$ bila neistinita, pa bi barem za jednu vrijednost varijable y_2 bila neistinita formula $\forall y_3\ F$ (y_1, y_2) i, na kraju, barem za jednu vrijednost varijable y_3 bila bi u M neistinita formula $F\ (y_1, y_2, y_3)$ .Ta tri pojedina značenja slobodnih varijabli y_1, y_2 iy_3 čine zajedno jedno značenje za y_1, y_2 iy_3 za koje je formula $F\ (y_1, y_2, y_3)$ neistinita u M pa ne vrijedi podatak da je ona istinita u M za svako moguću vrijednost svojih varijabli y_1, y_2 iy_3 . Obrnuto, ako je formula $\forall y_1\ \forall y_2\ \forall y_3\ F$ istinita u M, onda je formula za svako$\forall y_2 \forall y_3\ F(y_1)$ istinita u M za svako značenje varijable y_1 u pripadnom univerzumu pa je za bilo koje među njima istinita i formula $\forall y_3\ F(y_1, y_2)$, i to za svako moguću vrijednost varijable y_2 ,te, na kraju, proizilazi da je formula $F(y_1, y_2, y_3)$ istinita u M za svako moguće značenje svojih varijabli y_1, y_2, y_3 i u pripadnom univerzumu. Preostali dio dokazao bi se sasvim analogno prethodnom. Ipak, radi jednostavnosti, pretpostavimo da F sadrži samo dvije slobodne varijable, y_1 iy_2 . Formula$F(y_1, y_2)$ je lažna u M ako i samo ako je ona neistinita u M za svaku vrijednost svojih varijabli u pripadnom univerzumu, odnosno ni za jedno među njima nije istinita, tj. formula $\exists y_1\ \exists y_2\ F$ je lažna u M. Obrnuto, ako je formula $\exists y_1\ \exists y_2\ A$ lažna u M (a y_1 iy_2 su sve njene slobodne varijable), onda je za svaku vrijednost varijable y_1 u pripadnom univerzumu neistinita u M formula $\exists y_2\ A(y_1)$ pa je za bilo koje među njima i svaku vrijednost varijable y_2 u pripadnom univerzumu neistinita formula $A(y_1, y_2)$, odnosno za svako značenje svojih varijabli y_1 i y_2 i u pripadnom univerzumu je formula $A(y_1, y_2)$, neistinita u M.

Primer 2.4. Ako je neka formula izjava, onda je ona u datom modelu ili istinita ili lažna pa je dakle ispunjiva ili otklonjiva za svaku vrijednost svojih slobodnih varijabli u pripadnom univerzumu čim je ispunjiva ili otklonjiva barem za jednu vrijednost. To je zato tako što u izjavama nema slobodnih varijabli. Vidjeli smo već prije da semantičke vrijednosti izjava oblika $\forall x A(x)$ i $\exists x A(x)$ i zavise u bilo kom modelu samo prividno o pojedinu vrijednost što ga poprima varijabla x u pripadnom univerzumu, tako da ove formule zapravo ne govore u modelu o x, već o dvojakom ponašanju predikata $A(x)$ u njemu. Tako je s izjavama koje počinju s kvantifikatorom. Ako izjava ne počinje s kvantifikatorom, onda njena semantička vrijednost ni u kom modelu pogotovo ne može zavisiti o značenjima što ih u pripadnom univerzumu poprimaju bilo koje slobodne varijable jer takvih u njoj uopšte nema.

Ujedno uviđamo da vezanje jednom već vezane varijable u nekoj formuli ili vezanje neke varijable koje uopšte nema u toj formuli nema ni u kom modelu nikakva uticaja na semantičku vrijednost one formule na kojoj se tako nešto izvršilo. Drugim riječima, ako u formuli A nema slobodnog x, onda su formula $\forall x A$ i$\exists x A$ istinite (ispunjive), odnosno lažne (otklonjive), u bilo kom modelu ako i samo ako je formula istinita (ispunjiva), odnosno lažna (otklonjiva) u njemu.

3 Logičke istine ili tautologije

Logičke istine ili tautologije su formule koje su istinite u svakom modelu. One su stoga istinite nezavisno o čemu govore kao i šta o tome kažu. Postoje li uopšte takve formule? Odgovor je potvrdan, a uskoro ćemo se uvjeriti da ima čak beskonačno mnogo takvih. U primjerima što slijede slova A, B, ili C stoje umjesto bilo kakvih formula, pa koji god predikat ili izjavu stavili svugdje tamo gdje piše A u nekoj od navedenih formula i slično postupili sa B i C, nastala formula (izjava ili predikat) biće istina u svakom mogućem modelu za tu formulu. Slično tome stoje slova P(x) i Q(x,y) umjesto bilo kojeg jednosmjernog ili dvosmjernog predikata. Tako se npr. P(x) smije, svugdje tamo gdje dolazi u nekoj formuli iz naših primjera, zamjeniti formulom $R(x,a) \wedge \forall\ y\ \exists z\ S(x,y,z)$ jer je ona predikat u varijabli x. Jasno je da samo izuzetno građene formule mogu biti tautologije. Evo primjera nekih tautologija.

Primer 3.1. Logičke istine ili tautologije sastavljene od jedne formule:$A \Rightarrow A$,$(A \wedge A) \equiv A$,$A \equiv (\neg(\neg A))$.Čak u ovom slučaju postoji beskonačno mnogo tautologija, samo što će one biti sve duže i duže.

Primer 3.2. Logičke istine ili tautologije sastavljene od dviju formula:
$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$, $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$, $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$, $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$. I takvih je beskonačno.

Primer 3.3. Logičke istine ili tautologije sastavljene od triju formula:$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$,
$(A \wedge B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B \vee C)$,$(C \Rightarrow A) \Rightarrow ((C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \wedge B)))$.

Primer 3.4. Tautologije koje bitno zavise od vrste kvantifikatora kao i od mijesta gdje se on nalazi u formuli:
$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x P(\neg(x))$, $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$.

Mi već znamo da su po dvije od tih formula, što se nalaze zajedno u istoj ekvivalenciji, logički ekvivalentne, a to se događa ako i samo ako je odgovarajuća ekvivalencija tautologija. Formalno gledano, te nas formule uče kako znak negacije preskače kvantifikator što se nalazi neposredno ispred ili iza njega.

Primer 3.5. Tautologije u kojima se ogleda distributivnost kvantifikatora prema nekim veznicima:
$\forall x(p(x) \wedge (x)) \equiv (\forall x p(x) \wedge \forall x Q(x))$,
$(\exists x p(x) \vee \exists x Q(x)) \equiv \exists x(p(x) \vee Q(x))$.

Primer 3.6. Tautologije kojima je potreban komentar. Označimo s p(t/x) formulu što nastaje iz formule p(x) kad se u ovu stavi po jedan t na svako ono mjesto što ga u ovoj zauzima slobodna varijabla x. Ako slobodne varijable x nema u p , onda p(t/x) ostaje p . Dakako, slobodna varijabla h može u p zauzimati i više nego jedno mijesto (a na nekom mjestu ista varijabla može biti i vezana). Pod t ćemo uvijek razumijevati bilo varijablu bilo konstantu. Tautologija koju želimo prikazati ima ovakav zapis u datim oznakama: $\forall x p(x) \Rightarrow p(t/x)$ uz uslov da t nije takva varijabla koja će u p(t) postati vezana na nekom mjestu na kojem je h bila slobodna u p(x). Naime, formula p(x) mogla bi imati oblik $\exists y Q(x, y)$. Da nema navedenog ograničenja, moralo bi vrijediti u svakom modelu $\forall x \exists y Q(x, y) \Rightarrow \exists y Q(y, y)$, tj. uvijek bi postojao barem jedan y što je sam sa sobom u relaciji Q čim bi svaki x bio u relaciji Q barem sa jednim y, a ovo nije istina. Međutim, upravo navedeno ograničenje ne dopušta da se stavi y na mjesto slobodnog $xy\exists y Q(x, y)$ jer bi se time izmijenio karakter varijabli: y postaje vezan tamo gdje je x bio slobodan. Međutim, uvijek možemo izostaviti kvantifikator $\forall x$ zdesna u tautologiji $\forall x P(x) \Rightarrow \forall x$) koja je oblika$A \Rightarrow A$ i tako dobiti formulu $\forall x P(x) \Rightarrow P(x)$. Ona je tautologija jer potpada pod prethodni slučaj. Uočenu tautologiju čitamo ovako: B»Ako svaki x ima osobinu P, onda osobinu P ima i bilo koji (nasumce odabrani) x.B« U ovom obliku ona nosi naziv B»diktum de omniB«.

Primer 3.7. Uopšteno uzevši, ne stoji implikacija $\forall x(p(x)) \vee Q(x)) \Rightarrow (\ell x p(x) \vee \forall x Q(x))$, ali njezin obrat je tautologija, tj. on je istinit bez ikakvog poziva na značenje bilo bilo Q ma u kom modelu. Da uvidimo kako polazna formula nije tautologija, dovoljno je naći jedan model u kojem neće biti onako kako u formuli piše. Za tu svrhu neka p(h) znači B»x je muškaracB«, a Q(x) "x je žena". Očigledno je da je u univerzumu što ga čine sva ljudska bića istinita formula $p(x) \vee Q(x)$, ali nije istina da je svako ljudsko biće muškarac ili da je svako ljudsko biće žena ili da je svako ljudsko biće oboje. Uopšteno, ne postoji ni implikacija

$(\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)) \Rightarrow (p(x) \wedge Q(x))$, ali njezin je obrat tautologija. Kao ilustraciju tautologije: $(\exists xP(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists p(x) \exists xQ(x))$ navedimo razloge zašto se mora prihvatiti da je prazan skup, znakom Γë, podskup svakog skupa z. Prazan skup nema nijednog elementa, tj. vrijedi $\neg(\exists x(x \in 0))$, a skup u je podskup skupa z ako i samo ako vrijedi $\forall x(x \in y \Rightarrow x \in z)$. Treba pokazati da je ova formula vrijedi u svakom modelu teorije skupova kad se stavi Γë umjesto y, tj. da $\subset z$ vrijedi za svaki skup z. U protivnom bi slučaju vrijedilo prema (3.3) $\exists x(x \in \wedge x \notin z)$. Prema prethodnoj tautologiji zaključujemo da bi tada vrijedilo i$\exists x(x \in \wedge \exists x(x \notin z))$. Iz ove formule proizlazi formula$\exists x(x \in)$ zbog tautologije $A \wedge B \Rightarrow A$. Međutim, upravo je protivno istina.

Primer 3.8. Formule: $\forall x \forall Yp(x, y) \equiv \forall y \forall xp(x, y)$ i $\exists x \exists yp(x, y) \equiv \exists y \exists xp(x, y)$ su tautologije, ali, uopšteno uzevši, ne važi za bilo koji predikat p(x, y) implikacija:

$$\forall x \exists yp(x, y) \Rightarrow \exists y \forall xp(x, y)$$

Međutim, njezin obrat je tautologija. Da uvidimo kako polazna formula nije tautologija, neka predikat R(x, y) bude predstavljen u modelu relacijom "y je majka od x" i neka h i u ponovo prolaze svim ljudskim bićima kao univerzumom. U takvoj interpretaciji formula$\forall x \exists yp(x, y)$ kaže istinu prema kojoj svako ljudsko biće ima majku, dok je formula$\exists y \forall xp(x, y)$ lažna u tom modelu jer ne postoji ljudsko biće koje bi bilo majka svih ostalih, tako da je čitava implikacija lažna u modelu.

Primer 3.9. (Teorema transformacije). Ako formula F sadrži u sebi podformulu A , što ćemo simbolički pisati F(A) , pa ako su formule A i B logički ekvivalentne (tj. formula $A \equiv B$ je tautologija), onda je tautologija i formula$F(A) \equiv F(B)$ (tj. formula F(A) je logički ekvivalentna formuli F(B) bez obzira na koliko smo mjesta u F tamošnju potformulu A zamjenili sa B .

Teorema transformacije je zato ispravna što, dok značenjima slobodnih varijabli formula A i B prolazimo univerzum, semantičke se vrijednosti formulama A i B u svakom modelu reprodukuju jednakim parovima. Kako ostale dijelove formule F nismo transformisali, njihove se semantičke vrijednosti pogotovo reprodukuju. Na primjer, u formuli $\forall xP \vee \forall x(\neg Q)$ uočimo podformulu $\forall x(\neg Q)$. Budući da je $\forall x(\neg Q) \equiv \neg(\exists xQ)$ biće tautologija i formula $\forall xP \vee \forall x(\neg Q) \equiv (\forall xP \vee \neg(\exists xQ))$. U formuli $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ uočimo najprije prvo mijesto s lijeva na kojem se pojavljuje podformula$(A \Rightarrow B)$. Budući da je $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$, proizilazi da je formula $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ logički ekvivalentna formuli $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow B))$. Dakako, mogli smo polaznu formulu i tako transformisati da na drugo mijesto gdje se pojavljuje $(A \Rightarrow B)$ (ili na oba) stavimo ekvivalentnu formulu. Opet bi tako transformisane formule bile međusobno logički ekvivalentne.

4 Kvantifikator ograničenog dometa

Često kvantifikator dostiže dalje nego što je neophodno. Na primjer, ako želimo da osobini P(x) udovoljavaju samo svi pozitivni ralni brojevi x, a ne svi realni brojevi, taj ćemo zahtjev zapisati formulom $\forall x > 0 P(x)$. Ovdje je kvantifikator $\forall$ domet sužen ili ograničen predikatom $x > 0$ pa će u svakom modelu za uređenje među realnim brojevima formula $\forall x > 0 P(x)$ biti ekvivalentna formuli $\forall x(x > 0 \Rightarrow P(x))$. Za onaj drugi kvantifikator ograničenje predikatom x>0 glasilo bi $\exists x > 0 P(x)$ ili, ekvivalentno, $\exists x(x > 0 \wedge P(x))$, ali sada u neograničenom obliku. Najčešće će domet kvantifikatora biti ograničen do nekog datog skupa S pa ćemo imati formule oblika $\forall x \in SP(x)$ i$\exists x \in SP(x)$. Dakako u neograničenom obliku gornje su dvije formule ekvivalentne ovim dvjema: $\forall x(x \in S \Rightarrow P(x))$, odnosno $\exists x(x \in S \wedge P(x))$.

Primer 4.1. Kaže se da je realna funkcija f neprekidna u tački a svoje domene $U \subset R$ ako je ispunjena implikacija

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$. Što zapravo znači da f ima prekid u $a \in U$. Negirana definicija neprekidnosti ima oblik prve formule u primjeru 3.4. Kad znak negacije uvučemo za jedno mjesto u formulu, što znači da se prvi put pozivamo na teoremu transformacije iz primjera 3.9, ona dobija oblik druge formule iz ovog primjera. Primjenom primjera 3.4. dolazimo preko niza međusobno ekvivalentnih formula do rezultata da je formula:

$\neg(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon))$

ekvivalentna formuli

$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in U(\neg(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon))$)

Uočivši da je $\neg(A \Rightarrow B) \equiv ()A \wedge \neg B)$ tautologija, možemo unutrašnji dio formule zamijeniti ekvivalentnom formulom prema primjeru 3.9 tako da na kraju imamo:

$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in U(|x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon))$

Primer 4.2. Iz definicije neprekidnosti možemo eliminisati impikaciju tako da $|X-a| < \delta$ prenesemo pod kvantifikator $\forall X \in U$ ograničivši ga dodatno predikatom $x \in (a-\delta; a+\delta)$ koji je među realnim brojevima ekvivalentan predikatu $|X-a| < \delta$. Ukupno će ograničenje biti $h \in U \cap (a-\delta; a+\delta)$, pa će definicija neprekidnosti glasiti u novom obliku ovako:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \cap U(a-\delta; a+\delta)(|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Primer 4.3. Uz uslov da je $\neg(x \leq y) \equiv x > y$, a tako će biti najčešće, biće formula:

$\forall y \in S(\forall x \in T(x \leq y) \Rightarrow z \leq y)$

ekvivalentna formuli

$\forall y \in S(z > y \Rightarrow \exists x \in t(x > y)$

Obično se prva formula uzima za definiciju da je z supremum skupa T u potpuno uređenom skupu S. Dokažimo da prva formula povlači drugu jer će dokaz istinitosti obrnute implikacije biti kopija ovoga. Po uzoru na primjer 3.4. napiše se tautologija $F \Rightarrow F$, gdje je sa F označena čitava prva formula. Izostavljanjem kvantifikatora $\forall y \in S$ izići će nakon otkidanja pretpostavke $\forall x \in T(x \leq y) \Rightarrow z \leq y$, a obrtanjem po kontrapozicijiz $z > y \Rightarrow \exists x \in T(x > y)$. Do završetka ostaje dopisati sprijeda kvantifikator $\forall y \in S$ (vidi pravilo zaključivalja zvano generalizacija pravilo zaključivalja zvano otkidanje).

5 Pravila zaključivanja

Pravila zaključivanja primjenjiva su samo na formule propisanog oblika pa, kad neko od njih primijenimo, ono prevodi formulu u neku novu. Naša pravila zaključivanja čuvaju u svakom modelu istinitost onih formula na koje se primjenjuju, tj. prerađena formula biće istinita u svakom onom modelu u kojem je i polazna bila istinita. Za naše svrhe dovoljna su ova dva pravila zaključivanja: pravilo otkidanja ili modus ponens i pravilo generalizacije. Modus ponens ima ovaj oblik: ako je formula $A \Rightarrow B$ istinita u nekom modelu M pa je i formula A istinita u njemu, onda je i formula B istinita u M. Kad na opisani način zaključimo da je B istinita formula, kažemo da smo B dobili otkidnjem premise A od premise $A \Rightarrow B$. Pravilo generalizacije ima ovaj oblik: ako je formula A(x) istinita u nekom modelu M za svako značenje varijable x u pripadnom univerzumu, onda je u M istinita i formula $\forall x A$. Kad na opisani način zaključujemo da je formula $\forall x A$ istinita, kažemo da smo je dobili iz premise A generalizovanjem po varijabli x. Da pravilo otkidanja čuva istinitost u svakom modelu M, možemo se i ovako uvjeriti. Da je formula B otklonjiva u nekom modelu M, baram za jedno značenje njenih slobodnih varijabli (ako ona takve uopšte ima) ona bi bila neistinita. Preostalim slobodnim varijablama y A , koje nisu i varijable od B, dajemo proizvoljna značenja u pripadnom univerzumu. Prema pretpostavci je formula A istinita u M i za tako određeno značenje svojih slobodnih varijabli. Međutim, mi smo odredili značenje svim varijablama formule $A \Rightarrow B$, i to takvo da se ono svodi na značenje varijabli iz A, za koje je istinita u M, i na značenje varijabli iz B, za koje je neistinita u M, što prema (6.1) znači da je formula $A \Rightarrow B$ otklonjiva u M. Dakako, lažnost pa čak i ispunjivost formula ovo pravilo neće sačuvati dok će bez daljnjeg tautologičnost ostati sačuvana, tj. vrijediće: ako je $A \Rightarrow B$ tautologija pa ako je i A tautologija, onda je B tautologija. Da pravilo generalizacije čuva istinitost u svakom modelu, vidjeli smo u primjeru 3.3. u jačem obliku: u bilo kom modelu M je A(x) istinita formula ako i samo ako je formula $\forall x A$ istinita u njemu. Ako formula A(x) sadrži još neke slobodne varijable, njima treba dati određeno značenje u pripadnom univerzumu pa će se i zaključak u tom slučaju odnositi na to značenje što smo ga dali ostalim slobodnim varijablama.

Primer 5.1. Premisa A(h) ima obično disjunktivnu formu u kojoj se odvojeno sagledaju svi mogući slučajevi za to da A(X) bude istinita u M, za svaku vrijednost od X iz samo nekolika klasa na koje se univerzum raspada, jer se ne mogu provjeriti sve vrijednosti varijable h ako ih u pripadnom univerzumu ima beskonačno. Kao ilustraciju navodimo dokaz elementarne činjenice da je svaka tačka simetrale s dužine $\overline{AB}$ (vidi sl.1) udaljena od tačke A onoliko koliko i od duži tačke B. Simetralu s konstruišemo tako da načinimo $\overline{AP_1} = \overline{BP_1}$ i $\overline{AP_2} = \overline{BP_2}$ pri čemu neka bude tačka P2 u ravni na onoj strani od pravca kroz $\overline{AB}$ na kojoj nije tačka P_1. Univerzum čine sve tačke T na s, pa će T igrati ulogu varijable na X iz formulacije pravila. Razlikujemo četiri slučaja (klase u univerzumu):

(1) T = P_1 ili $T = P_2$, (2) T = N (3) T je između P_1 i P_2 te (4) T je iznad P_1 ili ispod P_2.

sl.1 To su sve mogućnosti za to da bi tačka T pripadala pravcu s. Iz podudarnosti relevantnih trouglova na poznat način proizilazi $\overline{AT} = \overline{TB}$ u svakom od četiri slučaja. Odatle zaključujemo po pravilu generalizacije da bi za svaku tačku T na pravcu s vrijedi$\overline{AT} = \overline{TB}$. Budući da je i dužina $\overline{AB}$ bila proizvoljno odabrana, navedeni je podatak na snazi i za svaku dužinu.

Primer 5.2. Ima i drugih pravila zaključivanja. Na primjer, pravilo lančanog zaključka (hipotetički silogizam). Ono ima oblik: u bilo kom modelu izlazi iz istinitosti formule$A \Rightarrow B$ i formule $B \Rightarrow C$ istinitosti formule $A \Rightarrow C$. Međutim, to pravilo možemo dokazati pozivajući se samo na pravilo otkidanja. Naime, formula $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ je tautologija pa, ako su u nekom modelu istinite formule ,$(A \Rightarrow B)$ i $B \Rightarrow C$ biće u njemu istinita i formula $(A \Rightarrow B)(B \Rightarrow C)$. Ovu otkinemo od polazne tautologije. Ostaje nam formula $A \Rightarrow C$, koja je neminovno istinita u tom modelu.

Literatura

[1] Aleksander, *Principi matematike*, IP "Vuka Karadzića", Beograd, 1936.

[2] Devide V., *Matematička logika (Prvi dio: Klasična logika sudova)* , Beograd, 1964.

[3] E. Menelson, *Introduction to Mathematical Logic*, D. van Nostrand, Princenton N.J. 1964.

[4] Kalužnin L.A.,*Što je matematička logika*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

[5] Klini S., *Matematičeskaja logika*, Mir, Moskva, 1973.

[6] J. B. Rosser, *Logic for Mathenaticians,* New York 1953.

[7] N. Prijatelj, *Uvod v matematičko logiko*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1969.

[8] Prešić Slaviša, *Elementi matematičke logike*, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1972.

[9] S. C: Kleene, *Mathematical Logic*, J. Wiley & Sons, New York, 1967.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Metodika početne nastave matematike – izazovi i perspektive

Sanja Maričić
Univerzitet u Kragujevcu, Učiteljski fakultet u Užcu
sanjamaricic10@gmail.com

Krstivoje Špijunović
Univerzitet u Kragujevcu, Učiteljski fakultet u Užcu
kspijun@gmail.com

Pregledni rad

Apstrakt

Prateći promene u organizaciji nastave matematike i njeno prilagođavanje izmenjenim uslovima u kojima se izvodi, *Metodika početne nastave matematike* se, u drugoj polovini 20. i početkom 21. veka, intenzivno razvijala i dostigla relativno visok nivo razvoja. I pored toga, po mišljenju autora, u ovoj oblasti i dalje postoje brojne dileme i niz otvorenih i nedovoljno proučenih pitanja. To se, pre svega, odnosi na određivanje njenog mesta u sistemu nauka, nepostojanje jasne teorijske osnove na kojoj se metodika izgrađuje i razvija, usmerenost studijskih programa prema metodičkoj transformaciji sadržaja, zapostavljanje ciljeva, ishoda i standarda, nedorečenost koncepta inkluzivnog obrazovanja, primenu i uticaj informaciono-komunikacione tehnologije na organizaciju nastave matematike, aktivnost i razvoj mišljenja učenika, ulogu učitelja, forsiranje frontalnog na račun ostalih oblika rada i druga. Razrešavanje navedenih pitanja predstavlja veliki izazov za sve koji se na bilo koji način bave metodikom početne nastave matematike, a istovremeno ukazuje na pravce i okvire u kojima se ova naučna disciplina ubuduće mora razvijati.

Mada je potreba za prenošenjem matematičkih znanja sa jedne generacije na drugu, odnosno sa jednog pojedinca na drugog, stara koliko i ljudska civilizacija, začetke metodike nastave matematike, kao naučna disciplina koja proučava nastavu i učenje u oblasti matematike, pronalazimo tek u 17. veku u *Velikoj didaktici* čuvenog češkog pedagoga i reformatora obrazovanja Komenskog. Međutim, kao posebna naučna disciplina kostituisana je na prelazu iz 18. u 19. vek zahvaljujući radovima Pestalocija, a kasnije i Herbarta, Distervega, Marije Montesori, Rohova, Busea, Klajna i mnogih drugih.

Kada je u pitanju Srbija, onda su prvi tragovi matematičke pismenosti vezani za vračanje brojevima, upotrebu abaka, grčko-rimsku numeraciju i raboš. Komentari Euklidovih *Elemenata* Isidora Argira, geometrija zupčanika Lazara Hilandarca i manastirska zdanja, koja su nam preci ostavili u nasleđe, takođe, svedoče o razvijenosti matematike na području današnje Srbije (Špijunović, 2004).

Sve do pada pod tursku vlast, matematika u Srbiji bila je na nivou na kome je bila i kod većine evropskih država i naroda tog vremena. Padom pod tursku vlast nastaje crni period za ukupnu srpsku kulturu i prosvetu, pa i za matematiku i način njenog izučavanja. Oporavak započinje tek nakon Prvog srpskog ustanka (1804) kada se osnivaju prve škole, štampaju prvi udžbenici i đaci šalju na školovanje u inostranstvo, naročito u Beč. Prva matematička, a samim tim i metodička znanja, u to vreme stigla su u Srbiju zahvaljujući Srbima sa područja koja su bila pod vlašću austrougarske, jer su tamo uslovi za razvoj prosvete i kulture za srpski narod bili daleko povoljniji nego u krajevima koji su bili pod turskom vlašću. Otuda se metodika nastave matematike u Srbiji u 19. i početkom 20. veka razvijala pod izrazitim uticajem nemačke pedagogije. Razvoju metodike nastave matematike u Srbiji u to vreme značajno su doprineli i Avram Mrazović, Stefan Vujanovski, Teodor Janković Mirjevski, Vasilije Damjanović, Platon Atancković i drugi.

Nemački uticaj na metodiku nastave matematike u Srbiji zadržao se sve do Drugog svetskog rata. Nakon toga nastupa period u kome se metodika nastave matematike u Srbiji razvija pod dominantnim uticajem sovjetske pedagogije i metodike. Pri kraju druge polovine 20. veka klatno se postepeno pomera na drugu stranu, tako da se metodika nastave matematike u Srbiji danas sve više razvija pod uticajem pedagoških i metodičkih ideja sa engleskog govornog područja. Otvaranje metodike nastave matematike prema literaturi sa engleskog govornog područja, svakako, doprinosi raznovrsnosti ideja i donosi novi kvalitet u izučavanju metodičkih problema. Međutim, preti opasnost da se nepotrebnim distanciranjem od uticaja literature sa istoka osiromaši i metodička teorija i metodička praksa.

Ako posmatramo zastupljenost metodike nastave matematike u studijskim programima za obrazovanje učitelja u Srbiji uočavamo da je ona prvobitno bila sastavni deo matematike (računa), zatim pedagogije, potom je izučavana u okviru posebnog nastavnog predmeta zajedno sa metodikama drugih nastavnih predmeta, a od 1971. godine je konstituisana kao poseban nastavni predmet. Pri tome je imala uspone i padove, dileme i raskršća, ali se uprkos tome kontinuirano razvijala. Istina, nekada brže, nekada sporije, ali se uvek kretala napred. Taj napredak je naročito izražen u drugoj polovini 20-og veka.

Razvoju Metodike početne nastave matematike u Srbiji posebno je doprinelo osnivanje učiteljskih fakulteta (1993) i potvrđivanje njihove matičnosti u oblasti didaktičko-metodičkih nauka, a samim tim i matičnosti u oblasti metodike početne nastave matematike. Time je obrazovanje učitelja podignuto na fakultetski (akademski) nivo, a istovremeno su stvoreni uslovi za akreditaciju master i doktorskskih studija, odnosno uslovi, ne samo za stručno, već i za naučno promišljanje metodičkih problema iz ove oblasti na uzrastu učenika mlađih razreda osnovne škole.

U prilog intenzivnog razvoja Metodike početne nastave matematike u navedenom periodu svedoči i:
- veliki broj objavljenih radova, monografija, udžbenika i priručnika,
- kvalitetni i savremeni udžbenici matematike za mlađe razrede osnovne škole,

- niz naučnih skupova na nacionalnom i međunarodnom nivou,
- posebne komisije i sekcije za metodiku nastave u okviru kongresa matematičara,
- odbranjene magistarske i doktorske disertacije,
- stalno rastući broj studenata na master i doktorskim studijama iz ove oblasti,
- brojna i raznovrsna istraživanja,
- širok krug nastavnika i saradnika sa izborom u odgovarajuća univerzitetska zvanja,
- sve veća pažnja koja se na prirodno-matematičkkim fakultetima poklanja izučavanju metodike i tako dalje (Maričić, Špijunović, 2014: 197).

Sve je to uticalo da se u nastavi matematike na uzrastu učenika mlađih razreda osnovne škole sve više vodi računa o zakonitostima procesa učenja, individualnim mogućnostima učenika i drugim činiocima od kojih bitno zavisi efikasnost nastave matematike na ovom uzrastu, a sve manje insistira na slušanju, pamćenju i reprodukciji naučenog, prilagođavanju nastave matematike isključivo zakonitostima biološkog razvoja i interesovanjima učenika (pedocentrizam).

Danas je uočljivo nastojanje da se nivo razvoja koji je Metodika početne nastave matematike dostigla koristi kao oslonac za njenu dalju nadogradnju i usavršavanje. Tako se u Metodiku sve više unose oblasti kao što su didaktički sistemi, obrazovna tehnologija, standardi postignuća, inkluzivno obrazovanje i slično, a prethodno poznate i prisutne oblasti (cilj i zadaci, metode, principi, oblici rada, sadržaji, položaj učenika i nastavnika, planiranje i organizacija nastave i vannastavnih aktivnosti) se na nov način sagledavaju, aktuelizuju, transformišu i povezuju. I to je dobro, jer bi svaki pokušaj da se radikalno raskine sa dosadašnjom i metodika nastave metodike izgradi na potpuno novim osnovama, po našem mišljenju, bio dovoljan dokaz njene nezrelosti kao naučne discipline.

Zahvaljujući tome, metodika početne nastave matematike postala je najrazvijenija naučna disciplina u sistemu metodika matematičkog obrazovanja, počev od predškolskog uzrasta pa do univerziteta. No, i pored toga, u njoj još uvek ima mnogo dilema, zapostavljenih oblasti, otvorenih pitanja, prostora za istraživanje i promene. Ovom prilikom želimo da skrenemo pažnju samo na neka od njih.

Prvo i osnovno pitanje odnosi se na predmet izučavanja metodike početne nastave matematike. Da li je u vremenu iza nas metodika početne nastave matematike uspela da jasno definiše svoj predmet, kako se ne bi вЂћsudarala“ sa drugim naukama (pre svega sa didaktikom i matematikom) i zalazila u polje njihovog interesovanja? Ovaj problem je utoliko aktuelniji što još uvek, вЂћneki (uglavnom pedagozi) smatraju da je metodika čisto didaktička, a neki (uglavnom matematičari) da je čisto matematička disciplina, izbegavajući da, pri tome, i jedni i drugi, priznaju interdisciplinarnost kao jedno od njenih najznačajnijih obeležja“ (Maričić, Špijunović, 2014: 198).

Drugo pitanje je na kojim teorijskim osnovama dalje izgrađivati i razvijati Metodiku početne nastave matematike. I tu su didaktičari i metodičari među sobom podeljeni tako da imamo različite teorijske koncepcije, a samim tim i različite paradigme nastave i učenja matematike.

Ako se opredelimo za stavove koje zastupaju predstavnici kognitivističkih teorija (J. Piaget, J. Bruner, R. Gagne, H. Klausmeier), onda bi sadržaje nastave i učenja matematike trebalo prilagoditi individualnim mogućnostima i nivou kognitivnog razvoja svakog učenika pojedinačno.

Nastava matematike zasnovana na konstruktivističkom pristupu (K. Reich, D. Kaufman, V. Richarson) pretpostavljala bi takvu organizaciju u kojoj učenici, oslanjajući se na prethodna, nova znanja stiču isključivo putem vlastite aktivnosti, odnosno osvajaju ih, konstruišu, a ne primaju. Pri čemu je mnogo važniji način na koji učenik uči nego način na koji ga učitelj poučava.

Za predstavnike kritičke pedagogije (P. Freire) osnovni zadatak nastave matematike bio bi razvijanje kritičke svesti, odnosno kritičkog mišljenja učenika. Predstavnici humanističke pedagogije (A. Maslow, C. Rogers) insistiraju na nastavi koja bi obezbeđivala harmonijski razvoj, poverenje, poštovanje prirode i dostojanstva i razvijanje svih potencijala kojima učenici raspolažu, a individualne pedagogije (Otto, Gansberg, Gaudig) na nastavi u kojoj bi svaki učenik bio aktivan na sebi svojstven način i u kojoj bi se mogao razvijati individualno, nezavisno od ostalih učenika u odeljenju.

Po mišljenju predstavnika reformne pedagogije (J. Dewey, A. Ferijer, E. Claparčde, M. Montessori, L. Tolstoj i drugi) u nastavi matematike bi trebalo da dominira samoaktivnost učenika. Teorija kurikuluma (C. Möller) insistira na preciznom određivanju ciljeva i zadataka nastave, a kibernetičko – informacijska teorija (Talizina, Iteljson, Landa i drugi) na primeni zakona i principa kibernetike u tom procesu.

Kao što se vidi, postoje različite teorije nastave i učenja što za posledicu ima i različita metodička rešenja. Ako među njima treba tražiti zajedničku karakteristiku onda je to insistiranje na aktivnosti učenika. U tom kontekstu Roeders (2003) i Deen (1985, 1986) govore o nastavi usmerenoj ka učeniku. Uvažavajući tu, nesporno značajnu činjenicu, učitelji i metodičari moraju učenika staviti u centar interesovanja i polazeći od nivoa znanja kojim raspolaže, tempa učenja, intelektualnih sposobnosti, interesovanja, spremnosti za saradnju, osposobljenosti za samostalan rad, motivacije i tako dalje, tražiti odgovarajuća metodička rešenja.

Jedno od uvek aktuelnih i otvorenih pitanja za sve koji se bave početnom nastavom matematike je i iznalaženje optimalnog i racionalnog programa nastave matematike u mlađim razredima osnovne škole. Ovo tim pre što disproporcija između sve većeg fonda matematičkih znanja i ograničenog vremena u okviru školskog sistema namenjenog toj nastavi postaje sve izraženija. Iz tih razloga, kako ističe Bruner, pri koncipiranju programa i izboru sadržaja treba sve više voditi računa o ekonomiji znanja.

Važno pitanje za razmatranje predstavljaju i studijski programi Metodike nastave matematike na učiteljskim fakultetima u Srbiji, a samim tim i aktuelni udžbenici za ovaj nastavni predmet. I pored svih pozitivnih karakteristika koje im se mogu pripisati, oni su, po pravilu, usmereni na metodičku transformaciju sadržaja propisanih programom matematike za mlađe razrede osnovne škole, odnosno usmereni na učitelja i način na koji će on poučavati, a učenik, način na koji uči, njegove potrebe, mogućnosti, interesovanja, motivacija i slično su u drugom planu i prilično zapostaljeni. Osim toga, metodička transformacija sadržaja uglavnom je analizirana u okvirima вЂћklasične", вЂћfrontalne" nastave. Pri tome su zappostavljeni drugi vidovi (vrste) nastave koji, u konkretnim uslovima, mogu biti izvanredni korektivi klasične nastavne paradigme. S obzirom da svaka od ovih vrsta nastave ima svoje vrednosti i svoje specifične metodičke zakonitosti javlja se potreba da se, primera radi, razmišlja i govori o вЂћmetodici problemske, diferencirane, individualizovane, programirane, timske nastave matematike" (Maričić, Špijunović, 2014: 200).

Čini se da se u metodici nastave matematike ne poklanja dovoljno pažnje ni standardima postignuća učenika za matematiku koji su u Srbiji za kraj prvog ciklusa osnovnog obrazovanja i vaspitanja doneti 2011. godine. Suština njihovog postojanja i uvođenja, kako ističe E. Klim, je u tome da se radi вЂћjasno i koncentrisano ono što je važno u našem školskom sistemu" (Klieme, et al, 2007: 47). Obrazovni standardi su, iz tog razloga, вЂћreferentni okvir za programiranje, organizaciju i izvođenje procesa poučavanja i učenja u školi i kao osnova za evaluaciju postignuća učenika" (Palekčić, 2007: 86). Oni su istovremeno i cilj i kriterijum, jer jasno postavljaju i jednoznačno formulišu ciljeve učenja, ali istovremeno, služe kao kriterijum kvaliteta nastave, odnosno efikasnosti procesa učenja i poučavanja (Bašić, 2007: 117). U skladu s tim вЂћobrazovni standardi predstavljaju osnovu za delovanje i didaktičko-metodičko postupanje učitelja" (Maričić, 2012: 543). Od standarda se očekuje da podstaknu učitelje da вЂћstvaraju uslove, kreiraju okruženje koje je prilagođeno učenikovim mogućnostima i usmereno na njegov razvoj, odaberu sadržaje, postupke, metode, oblike rada i drugo, kako bi učenici na kraju određenog obrazovnog nivoa posedovali znanja određenog nivoa kvaliteta" (Maričić, 2012: 542). Pitanje je u kojoj meri metodika nastave matematike poklanja pažnju koncipiranju nastave u skladu sa ovakvim zahtevima.

Koncept inkluzivnog obrazovanja, koji je u nas aktuelan poslednjih nekoliko godina, predstavlja veliki izazov i za metodiku nastave matematike. Međutim, brojna istraživanja pokazuju da osnovne studije na učiteljskim fakultetima ne doprinose dovoljno pripremljenosti učitelja za inkluzivno obrazovanje (Elhoweris, Alshiekh, 2006; Macura Milovanović, Vujisić 2011; Macura Milovanović i sar, 2010, 2011; Rajović, Jovanović, 2010, Špijunović, Maričić, 2013). Osim toga, u udžbenicima metodike nastave matematike i drugoj literaturi koja se bavi problemima ove nastave teško je pronaći sadržaje koji imaju za cilj osposobljavanje studenata za nastavu matematike u uslovima inkluzivnog obrazovanja. Ukoliko takvih sadržaja i ima, češće je reč o defektološkom pristupu nego o odnosu prema učenicima koji su potencijalno daroviti za matematiku. Otuda i ne iznenađuju rezultati istraživanja prema kojima učitelji, a pogotovu mladi, izražavaju strepnju u vezi sa osposobljenošću da rade sa kategorijom učenika na koje se koncept inkluzivnog obrazovanja odnosi (Jones, 2002; Schumm & Vaughn, 1995; Winter, 2006).

Jedna od tri najvažnije kompetencije koje moraju posedovati savremeni učitelji (znanje, tehnologija, informacija), po mišljenju Evropskog saveta iznetom u dokumentu *Zajednička evropska načela za kompetencije i kvalifikacije učitelja* (2005), je njihova osposobljenost za korišćenje novih tehnologija u nastavi uopšte, pa i u nastavi matematike. Otuda je i sasvim logično pitanje da li i koliko u okviru metodike nastave matematike osposobljavamo učitelje za novi način rada, nove komunikacione modele, novi odnos prema izvorima znanja, drugačije metode, oblike, principe rada i tako dalje, s jedne, a koliko u tom kontekstu pravilno sagledavamo kvalitativno drugačiji položaj učenika u nastavi matematike, s druge strane.

Upoznavanje studenata sa različitim teorijskim osnovama na kojima treba razvijati mišljenje učenika (Pijažeova teorija stadijuma, Ablijeva operativna metoda, Brunerova teorija o ravnima apstrakcije, Galjperinova teorija etapnog razvoja mentalnih operacija ili neka druga), takođe, mora postati prvorazredni zadatak metodike početne nastave matematike. Uostalom, još pre više od pola veka, na sastanku UNESKO-a o obrazovanju istaknuto je da вЂћmatematika i njen stil razmišljanja moraju postati sastavni deo opšte kulture savremenog čoveka koji se obrazuje u današnjim školama, bez obzira da li će on vršiti posao koji koristi matematiku ili ne" (Prema: Dejić, 2003: 32). U tom kontekstu, osim odgovora na pitanje šta je to matematičko, stvaralačko, logičko i kritičko mišljenje metodika treba da ukaže i na adekvatne metodičke postupke kojima se svaka od ovih vrsta mišljenja u početnoj nastavi matematike može podsticati i razvijati. Ovaj zahtev je utoliko aktuelniji što je razvijanje matematičkog, logičkog, stvaralačkog i kritičkog mišljenja učenika istaknuto kao najvažniji zadatak početnog matematičkog obrazovanja (Dejić, 1997: 172; Prvanović, 1970: 14; Špijunović, Maričić, 2011).

Nažalost, u metodici nastave matematike se malo raspravlja i o problemima metodologije i specifičnostima metodičkih istraživanja u ovoj oblasti. Pri tome se gubi iz vida da smo već već odavno došli do tačke u kojoj bi dalji razvoj metodike morao biti mnogo više zasnovan na rezultatima naučnih istraživanja nego na prakticističkim rešenjima, impresijama i slobodnim interpretacijama konkretnih metodičkih problema.

Osim toga, ne vodi se dovoljno računa o povezivanju matematičkih sadržaja sa realnim životom, zapostavljeni su vannastavni oblici matematičkog obrazovanja i nastava matematike u kombinovanom odeljenju, ne možemo biti zadovoljni rezultatima koje učenici iz Srbije postižu na PISA i drugim testiranjima. Brojne "inovacije" u nastavi matematike nemaju svoju teorijsku podlogu, neke didaktičke teorije i respektabilan fond znanja kojim didaktika i metodike danas raspolažu nisu našle svoje mesto u toj nastavi. U metodikama nastave matematike nema poglavlja ni o učitelju i njegovoj ulozi u procesu nastave matematike ni o učeniku i njegovom položaju u tom procesu. Na listi Ministarstva prosvete i nauke Republike Srbije nema časopisa koji bi se bavio problemima početne nastave matematike, malo je projekata koji za predmet istraživanja imaju probleme iz ove oblasti i tako dalje.

Naravno, navedena lista otvorenih pitanja nije konačna. Međutim, i u ovom obliku ona pokazuje da se u Metodici nastave matematike mora mnogo toga menjati. To se odnosi, kako na promenu studijskih programa i redefinisanje uloge učitelja i učenika u nastavnom procesu, tako i na sistem stručnog usavršavanja učitelja, izradu master i doktorskih disertacija kojima bi se na egzaktan način potpunije osvetlili određeni metodički problemi, pokretanje specijalizovanog časopisa za metodiku nastave matematike i tako dalje. U svakom slučaju, smer u kome će se ubuduće razvijati Metodika početne nastave matematike ne može biti statičan, već dinamičan i usklađen sa savremenim kretanjima u oblasti vaspitanja i obrazovanja uopšte. Pri tome se moraju imati u vidu i saznanja do kojih su doše psihologija, didaktika, pedagogija, logika i druge srodne nauke, kao i svetska iskustva u ovoj oblasti. Međutim, "da bismo nešto promenili, treba menjati sopstvene uslove; ali pre svega, moramo menjati sebe, svoje poglede, shvatanja i način razmišljanja. A to nije nimalo lako" (Špijunović, 2005: 123). U svakom slučaju, metodičari nastave matematike moraju biti predvodnici promena, uvek spremni za nove izazove, otvoreni za nova pitanja, svesni zahteva koje pred njih postavlja intenzivni razvoj u nauci i nastavi i tako dalje, a ne pasivni učesnici koji samo posmatraju šta se oko njih dešava.

Literatura

[1] Bašić, S., Obrazovni standardi – didaktički pristup metodologiji izrade kurikuluma, u: V. Previšić (ur). *Kurikulum: teorija – metodologija – sadrEsaj – struktura* (117–155). Zagreb: Zavod za pedagogiju, Školska knjiga.

[2] Deen, N., *Mensen scholen mensen*, Groningen: Wolters Noordhof, (1985)

[3] Dejić, M., Matematičke sposobnosti i njihovo razvijanje. *Zbornik 3.* Vršac: Viša škola za obrazovanje vaspitača, 172-178, (1997(.

[4] Dejić, M., Egerić, M., *Metodika nastave matematike.* Jagodina: Učiteljski fakultet, (2003).

[5] Jones, P., Promoting inclusive practices in primary initial teacher training: Influencing hearts as well as minds. *Support for Learning*, 17, 58-63 (2002).

[6] Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Dóbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H., Vollmer, H. J., *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards.* StateplaceBerlin, (2007).

[7] Macura-Milovanović, S., Gera, I., Kovačević, M., *Mapiranje politika i praksi za pripremu nastavnika za inkluzivno obrazovanje u kontekstu društvenih i kulturnih različitosti, Nacionalni izveštaj za Srbiju.*Torino: European Training Foundation, (2010).

[8] Macura Milovanović, S., Gera, I., Kovačević, M., Priprema budućih učitelja za inkluzivno obrazovanje u Srbiji: trenutno stanje i potrebe. *Zbornik Instituta za peadgoška istraEsivanja*, 46. Beograd, 208-222, (2011).

[9] Macura Milovanović, S., Vujisić Živković, N., Stavovi budućih učitelja prema inkluziji: implikacije za inicijalno profesionalno obrazovanje, *Pedagogija*, LXVI, 633–647, (2011).

[10] Maričić, S., Obrazovni standardi i unapreДʻivanje početne nastave matematike. u: S. Marinković (ur.). *Nastava i učenje: ciljevi, standardi, ishodi* (535-548). UEsice: Učiteljski fakultet, (2011).

[11] Maričić, S. i Špijunović, K., Savremene tendencije u obrazovanju učitelja za rad u početnoj nastavi matematike, u: S. Denić (ur.). Savremene tendencije u nastavnim i vannastavnim aktivnostima na učiteljskim (pedagoškim) fakultetima, Vranje, Učiteljski fakultet, 196-206, (2014).

[12] Palekčić, M., Od kurikuluma do obrazovnih standarda. u Previšić, V. (City-placeur). *Kurikulum: teorija – metodologija – sadrEsaj – struktura* (39–115). CityplaceZagreb: Zavod za pedagogiju, Školska knjiga, (2007).

[13] Prvanović, S., Metodika savremenog matematičkog obrazovanja u osnovnoj školi. Beograd: Zavod za udEsbenike i nastavna sredstva Srbije, (1970).

[14] Rajović, V., Jovanović, O., Profesionalno i privatno iskustvo sa osobama sa posebnim potrebama i stavovi nastavnika redovnih škola prema inkluziji. *Psihološka istraEsivanja*, XIII, 91-106, (2010).

[15] Roeders, P., *Interaktivna nastava: dinamika efikasnog učenja i nastave.* Beograd, Institut za pedagogiju i andragogiju Filozofskog fakulteta, (2003).

[16] Schumm, J.S.,Vaughn, S., Getting ready for inclusion: Is the stage set? *Learning Disabilities Research and Practice*, 10, 169-179, (1995).

[17] Špijunović, K., Metodika početne nastave matematike u Srbiji u drugoj polovini XX veka, u: Jugoslovenska pedagogija druge polovine 20.veka, UEsice, Učiteljski fakultet, str. 279-288, (2004).

[18] Špijunović, K., Didaktika i metodike u Jugoslaviji u drugoj polovini 20. veka, u: Pedagogija na početku 21. veka, UEsice, Učiteljski fakultet, str. 115-126, (2005).

[19] Špijunović, K., Maričić, S., Development of pupilsʻ mathematical thinking as a goal and task of the initial teaching of mathematics. In: *The modern society and education – VI International Balkan Congres for Education and Science* (975-981). CityplaceSkopje: Fakulty of Pedagogy вЂћSt. Kliment Ohridski", (2011).

[20] Špijunović, K., Maričić, S., Pikula, M., Teacher and the development of pupils mathematical thinking in the initial teaching of mathematics. in E. Szoradova (ed.): *Learner – Teacher – Research in Serbian – Slovak Education Environment.* Nitra: Constantine the Philosopher University in Nitra, Faculty of Education, 107-114, (2012).

[21] Špijunović, K., Maričić, S., Učitelj i rad sa učenicima potencijalno darovitim za matematiku u uslovima inkluzivnog obrazovanja. *Pedagogija*, 68, 242-256, (2013).

[22] Winter, E. C., Preparing new teachers for inclusive schools and classrooms. *Support for Learning*, 21, 85-91, (2006).

bibitem[2323 *Zajednička evropska načela za kompetencije i kvalifikacije učitelja* (2005). Brisel: Evropski savet.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Doprinos matematike razvoju ličnosti

Šefket Arslanagić
Prirodno-matematički fakultet Sarajevo
asefket@pmf.unsa.ba

Stručni rad

Apstrakt

Matematika danas prožima cjelokupno društvo i njena uloga stalno raste jer se njena pomoć traži u situacijama i problemima koji se javljaju i van same matematike. Matematički metodi nisu više privilegija znanstvenika, inženjera i tehnologa; oni se sve više koriste za analizu individualnih ponašanja i izučavanja stavova i trendova u društvu kao cjelini. Ovaj razvoj svakako, povećava zahtjev za matematičkom sposobnošću – sposobnošću u matematičkom modeliranju, u algoritamskim tehnikama. Zato je matematika integralni dio ljudske kulture, socijalne, ekonomske i tehničke okoline, i to ne samo u sadašnjem obliku već i u svim oblicima koji će se sigurno razviti kao posljedica sve šire sposobnosti brzog računanja.

1 Uvod

Ovdje se postavlja jedno izuzetno važno pitanje koliko matematika i dobra nastava matematike doprinose razvoju mlade ličnosti. Moguće je predavati matematiku na razne načine koji doprinose individualnom razvoju sklonosti, sposobnosti i mogućnosti shvatanja.

Posebne individualne sklonosti koje se mogu probuditi su:

1. samopoštovanje;
2. samopouzdanje; uključujući volju za preuzimanjem odgovornosti;
3. samodisciplina;
4. sposobnost sa sarađivanje sa drugima;
5. strpljivost, posebno u procesu rješavanja problema.

Posebne vještine koje treba usađivati su:

1. posmatranje;
2. interpretacija (tumačenje);
3. saopćavanje.

Mogućnosti shvatanja koje se mogu njegovati su shvatanja:

1. ljepote i elegancije matematičkih dokaza;

2. odnosa matematike i života.

U narednom poglavlju kroz više rješenih zadataka pokazujemo kako se gore navedene osobine mogu uspješno razvijati kod učenika i studenata.

2 Primjeri zadataka kroz koje pokazujemo prethodno opisane osobine učenika

Daćemo razne vrste zadataka.

Zadatak 1. Dešifrovati množenje $\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$, gdje je $\overline{abcd}$ četverocifreni broj čije su cifre a, b, c i d.

Rješenje: Ogromna većina mojih studenata na jednom od časova predmeta Metodika nastave matematike koga sam im ja predavao na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu je krenula da riješava ovaj zadatak na sljedeći način:

Četverocifreni broj $\overline{abcd}$ se može zapisati kao:

$$\overline{abcd} = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d, (*)$$

gdje $b, c, d \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $a \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$.

Sada na osnovu $(*)$ imamo:

$$\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$$

$$\Leftrightarrow (a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d) \cdot 4 = d \cdot 1000 + c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$$

$$\Leftrightarrow 4000a + 400b + 40c + 4d - 1000d - 100c - 10b - a = 0$$

$$\Leftrightarrow 1333a + 130b - 20c - 332d = 0. \tag{1}$$

Očigledno, (1) je **linearna Diofantova**[*] **jednačina** sa četiri nepoznate $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$. Naći rješenje ove jednačine nije nimalo lagan posao, to zahtjeva prilično vremena i strpljenja.

Srećom, našlo se tu nekoliko studenata koji su ovaj zadatak riješili efektno i brzo koristeći pravila o djeljivosti brojeva sa $2, 3, 4, 5, 6, 8$ i 9. Evo tog rješenja.

Pošto je proizvod četverocifrenog broja $\overline{abcd}$ sa 4 ponovo četverocifren broj $\overline{dcba}$, to a mora biti paran broj, a kako su jedine dvije cifre koje bi mogao uzeti a cifre 1 ili 2, to zaključujemo da je $a = 2$. Sada imamo:

$$\overline{2bcd} \cdot 4 = \overline{dcb2}.$$

[*]Diofant, starogrčki matematičar koji je živio u 3. vijeku nove ere u Aleksandriji

Odavde zaključujemo da mora biti $d = 3$ ili $d = 8$, jer $4 \cdot 3 = 12$, te $4 \cdot 8 = 32$ i $4 \cdot 2 = 8$, to zaključujemo da je $d = 8$. Dakle, sada imamo:

$$\overline{2bc8} \cdot 4 = \overline{8cb2}.$$

Zaključujemo sada da mora biti $b \in \{0, 1, 2\}$. Kako broj $\overline{8cb2}$ mora biti djeljiv sa 4, to je očigledno $b = 1$, tj. dobijamo da je:

$$\overline{21c8} \cdot 4 = \overline{8c12}.$$

Pošto je $4 \cdot 7 + 3 = 28 + 3 = 31$, to slijedi da mora biti $c = 7$. Konačno dobijamo: $abcd = 2178$, tj. $2178 \cdot 4 = 8712$. t

Zadatak 2. Ako je $x = 2014\,(a - b)$, $y = 2014\,(b - c)$, $z = 2014\,(c - a)$, izračunati brojnu vrijednost izraza:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}; \;\; (xy + yz + zx \neq 0)\,,$$

gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Rješenje: Opet se većina učenika (ili pak studenata) odluči na uvrštavanje datih brojeva x, y, z u dati količnik s namjerom da nakon nešto dužeg računanja dođe do rezultata koji iznosi 2. Srećom, uvijek se tu nađe onih koji su ovaj zadatak rješavali mnogo jednostavnije i kraće na sljedeći način:

Imamo

$$x + y + z = 2014\,(a - b + b - c + c - a) = 2014 \cdot 0 = 0,$$

$$\Rightarrow x + y + z = 0/^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2\,(xy + yz + zx) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2\,(xy + yz + zx)\,,$$

a odavde nakon dijeljenja ove jednakosti sa $xy + yz + zx \neq 0$, dobijamo:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx} = -2.$$

Čitaoci će se sigurno složiti da je ovo rješenje kudikamo elegantnije i ljepše od onog prvog. Ovo rješenje u potpunosti opravdava i afirmiše sve ono kazano u prvom dijelu ovog članka koje se odnosi na posebne individualne sklonosti koje se javljaju kod budućih matematičara, sada učenika ili studenata.

Zadatak 3. Dokazati da su svi brojevi oblika $n^4 + 4$; $(n \in \mathbb{N},\ n > 1)$ složeni brojevi.

Rješenje: Znamo svi da su prosti brojevi oni prirodni brojevi različiti od 1 koji su djeljivi samo sami sobom i jedinicom. Znači, složeni brojevi imaju bar još jedan djelilac koji nije 1 ili sam taj broj.

Moji učenici (a bogami i studenti) uglavnom priđu rješavanju ovog zadatka na jedan uobičajen i prirodan način; naime prvo uzmu da je n paran broj pa je i broj n^4+4 također paran broj pa samim tim je i složen. Ako je pak n neparan broj, tada je broj n^4+4 neparan, ali nije lako dokazati da je i složen. Ako je $n=2k+1$; ($k \in \mathbb{N}$ zbog $n>1$), tada dobijamo:

$$n^4+4=(2k+1)^4+4=16k^4+32k^3+24k^2+8k+5,$$

a teško je utvrditi sada da li je dobijeni neparni broj prost ili složen.

Šta raditi sada? Postoji jedan identitet u matematici koji glasi:

$$a^4+4b^4=\left(a^2+2b^2+2ab\right)\left(a^2+2b^2-2ab\right); \quad (a,b \in \mathbb{R}), \tag{2}$$

koji se naziva **Identitet Sophie Germain**†. Očigledno vrijedi:

$$\begin{aligned} a^4+4b^4 &= a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2 \\ &= \left(a^2+2b^2\right)^2-(2ab)^2 \end{aligned}$$

$=\left(a^2+2b^2+2ab\right)\left(a^2+2b^2-2ab\right)$, q.e.d.

Sada imamo na osnovu (2) za $a=n$ i $b=1$:

$$n^4+4=\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right)$$

a ovaj broj je svakako složen jer je $n^2-2n+2>1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n>1$. Lijepo rješenje, nema šta!

Zadatak 4. Dokazati da su svi cijeli brojevi oblika n^3+5n; $(n \in \mathbb{Z})$ djeljivi sa 6, tj.

$$6\,|A(n)=n^3+5n; \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Rješenje: Bio sam svjedok ovakvog rješenja ovog zadatka: Za $n=0$ dobijamo $A(0)=0$, a ovaj broj je djeljiv sa 6, tj. $0{:}6=0$. Zaljubljenici u princip matematičke indukcije sada dokazuju da vrijedi $6\,|A(n)$; $n \in \mathbb{N}$. Naime, za $n=1 \Rightarrow A(1)=6$, a ovaj broj je djlejiv sa 6.

Neka važi $6\,|A(n)=n^3+5n$ za sve $n \geq 1$; tada imamo:

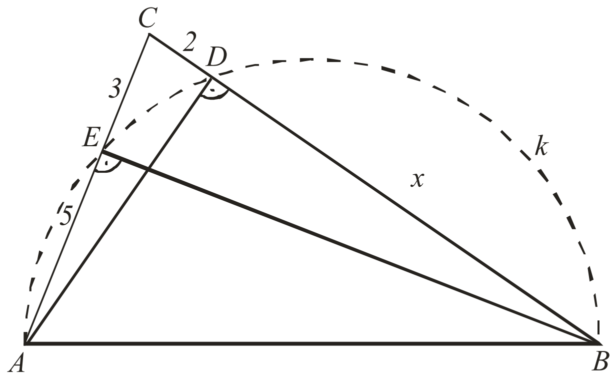
$$A(n+1)=(n+1)^3+5(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+5n+5=$$

$$=n^3+5n+\left(3n^2+3n+6\right)=A(n)+3\left(n^2+n+2\right), \text{ tj.}$$

$$A(n+1)=A(n)+3\left[(n+1)(n+2)-2n\right],$$

a ovaj broj je djeljiv sa 6 jer po pretpostavci $6\,|A(n)$, a broj $(n+1)(n+2)$ je proizvod dva uzastopna prirodna broja od kojih je jedan paran pa je broj $3\left[(n+1)(n+2)-2n\right]$ djeljiv sa $3 \cdot 2=6$. Ima ovdje fina posla!

†Sophie Germain, 1776.-1831., francuska matematičarka koja je imala uspjeha u rješavanju Fermatovog velikog teorema. Dopisivala se sa Gaussom, D'Alambertom, Legandreom, itd



Slika 1:

Kako dalje? Šta uraditi ako je $n < 0$; $n \in \mathbb{Z}$? Stavimo da je $n = -m < 0$; $(m \in \mathbb{N})$. Sada imamo

$$A(n) = A(-m) = (-m)^3 + 5 \cdot (-m) = -\left(m^3 + 5m\right),$$

a ovaj broj je djlejiv sa 6 jer smo dokazali da je broj $m^3 + 5m$; $(m \in \mathbb{N})$ djeljiv sa 6 pa je i broj $-\left(m^3 + 5m\right)$ djeljiv sa 6.

Komplikovano, nema šta! No, jedno kratko elegantno rješenje zadatka za koga je potrebna jedna sjajna ideja oblika $5n = 6n - n$ donekle nas ostavlja bez daha; naime, imamo:

$$A(n) = n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = (n-1)\,n\,(n+1) + 6n,$$

a ovaj broj je očigledno djeljiv sa 6 jer je $(n-1)\,n\,(n+1)$ proizvod tri uzastopna cijela broja za sve $n \in \mathbb{Z}$ (doduše za $n \in \{-1, 0, 1\}$ dobijamo da je taj broj 0 koji je djeljiv sa 6) od kojih je bar jedan paran a jedan djeljiv sa 3 pa je taj broj djeljiv sa $2 \cdot 3 = 6$.

Napomena: Gornju činjenicu smo mogli dokazati uz uslov da je $n = 3k$ ili $n = 3 \pm 1$; $(k \in \mathbb{Z})$.

Zadatak 5. Duži AD i BE su visine trougla ΔABC; $(D \in BC,\ E \in AC)$. Ako je $\overline{AE} = 5$, $\overline{CE} = 3$, $\overline{CD} = 2$, koliko iznosi $x = \overline{BD}$?

Rješenje: Učenici (pa i studenti) su uglavnom zaljubljeni u Pitagorinu[‡] teoremu, pa nije čudo pošto nacrtaju sliku i uoče dva pravougla trougla ΔACD i ΔBCE, polete da ovaj zadatak riješavaju pomoću te teoreme.

Imamo sada na osnovu Pitagorine teoreme (sl.1):

$$\Delta ACD : \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 = 8^2 - 2^2 = 60$$

$$\Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}\ .$$

[‡]Pitagora, starogrčki matematičar iz 6. stoljeća prije nove ere

$$\Delta ABD : \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$$
$$\Rightarrow \overline{AB}^2 = 60 + x^2$$
$$\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{60 + x^2}\ .$$
$$\Delta ABE : \overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AE}^2$$
$$\Rightarrow \overline{BE}^2 = 60 + x^2 - 25$$
$$\Rightarrow \overline{BE} = \sqrt{35 + x^2}\ .$$
$$\Delta BCE : \overline{BC}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{BE}^2$$
$$\Rightarrow (x+2)^2 = 9 + 35 + x^2$$
$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 44 + x^2$$
$$\Rightarrow x = 10\ .$$

Tačno, pretjerasmo sa Pitagorom. Teška srca ja prihvatam one koji su na ovaj način došli do rješenja i dadem im lijepu ocjenu.

Opet srećom oni lucidni pojedinci (Hvala Bogu da ih imamo u učionici!) mi vrate raspoloženje i osmijeh na lice kada riješe ovaj zadatak u tri reda koristeći činjenicu da su pravougli trouglovi ΔACD i ΔBCE slični (Zašto?). Iz te sličnosti trouglova slijedi proporcija:

$$\overline{CD} : \overline{CE} = \overline{AC} : \overline{BC}$$
$$\Leftrightarrow 2 : 3 = (5+3) : (x+2)$$
$$\Leftrightarrow 2\,(x+2) = 3 \cdot 8$$
$$x = 10.$$

Još me više obraduju oni koji uoče da zbog $\measuredangle AEB = \measuredangle ADB = 90^0$ tačke D i E pripadaju kružnici k čiji je prečnik duž AB. Sada iskoriste teoremu o potenciji tačke C u odnosu na kružnicu k, te dobijaju:

$$\overline{CE} \cdot \overline{CA} = \overline{CD} \cdot \overline{CB}$$
$$\Leftrightarrow 3 \cdot 8 = 2 \cdot (2 + x)$$
$$\Leftrightarrow 24 = 4 + 2x$$
$$\Leftrightarrow x = 10.$$

Neki mi kažu na kraju da smo zadatak mogli riješiti koristeći izračunavanje površine trougla ΔABC, tj. $P_{\Delta ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BE}}{2}$ ili trigonometriju ili pak analitičku geometriju, što je tačno. Ali zašto komplikovano, kada može jednostavno.

Zadatak 6. Izračunati maksimalnu vrijednost, izraza $\log x + \log y + \log z$ ako su $x, y, z > 0$ i pri tome važi jednakost $x + 4y + 16z = 120$.

Rješenje: Uh, zadatak u vezi nalaženja ekstremuma i to uslovnog funkcije od tri promjenljive, uz korištenje Lagrangeovog multiplikatora λ. Pa to je matematička analiza! U pitanju je funkcija:

$$F(x, y, z, \lambda) = \log x + \log y + \log z + \lambda (x + 4y + 16z - 120).$$

Parcijalni izvodi, prvi diferencijal funkcije i još koješta?! Teško brate!

Ali nije tako! Tu je sjajna nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine tri pozitivna broja kao i pravilo za logaritam proizvoda. Sitnica! Imamo:

$$\begin{aligned} &\frac{x + 4y + 16z}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot 4y \cdot 16z}; \quad (x, y, z > 0) \\ &\Leftrightarrow \tfrac{120}{3} \geq \sqrt[3]{64xyz} \\ &\Leftrightarrow 40 \geq 4 \cdot \sqrt[3]{xyz} \\ &\Leftrightarrow xyz \leq 1000 \\ &\Leftrightarrow \log x + \log y + \log z \leq 3 \\ &\Leftrightarrow Max (\log x + \log y + \log z) = 3 \ , \end{aligned}$$

ako je $x = 4y = 16z$, tj. $\frac{x}{16} = \frac{y}{4} = z$.

Sjajno rješenje! Živjela elementarna matematika i nejednakosti između brojnih sredina! VIVAT MATHEMATICA! VIVAT PROFESSORES!

Zadatak 7. Ako je $S_n = 1^3 + 2^2 + 3^3 + ... + n^3$, izračunati

$$\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{S_{2014}}}.$$

Rješenje: Uh, opet analiza; ovo je suma reda! Znamo mi da vrijedi obrazac:

$$S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

dokazali smo ga pomoću principa matematičke indukcije.

Imamo sada:

$$\frac{1}{\sqrt{S_n}} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Pa ovo se svodi na teleskopiranje. Sjajno! Slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{S_{2014}}}=$$

$$2\left(\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{2\cdot 3}+\tfrac{1}{3\cdot 4}+...+\tfrac{1}{2014\cdot 2015}\right)=$$

$$=2\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+...+\tfrac{1}{2014}-\tfrac{1}{2015}\right)=$$

$$2\left(1-\frac{1}{2015}\right)=\frac{4028}{2015}.$$

Mišljenja smo da će se ovih sedam zadataka i njihovih raznih rješenja dopasti čitaocima ovog članka. Sigurno će im dati put i neke ideje za bavljenje matematikom u budućnosti. Tu pretežno mislim na mlade maematičare i nastavnike koji rade sa ovakvim učenicima koji pokazuju veći interes za matematiku.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 3*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2011.

[3] B. Dakić, *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[4] G. Polya, *Matematička otkrića*, HDM, Zagreb, 2003.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Neki problemi pri numeričkom rješavanju diferencijalnih jednačina kojima se opisuju fizikalni procesi

Zoran Ljuboje, Ognjen Bjelica
Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Elektrotehnički fakultet
Istočno Sarajevo, BiH, Republika Srpska
zoran.ljuboje@etf.unssa.rs.ba, ognjen.bjelica@etf.unssa.rs.ba

Stručni rad

Apstrakt

U fizici je česta pojava da se procesi opisuju diferencijalnim jednačinama koje je teško riješiti analitički. Prvo se definiše dinamički model kojim se opisuje problem, a zatim se primjenjuju numeričke metode. U ovoj situaciji numeričke metode mogu dati netačna rješenja. Takođe, u rješenjima se mogu pojaviti numeričke nestabilnosti a i tzv. numerički haos. U radu je ilustrovan primjer numeričkog rješavanja obične diferencijalne jednačine, koja se može riještiti analitički. Pokazano je kako različite metode mogu dati različita i pogrešna rješenja Takođe je pokazano kako se pogodnim izborom metode dolazi do tačnih rješenja.

1 Rješavanje fizikalnog procesa numeričkim metodama

Uticaj informacionih tehnologija na razvoj svih oblasti je očigledan. Primjena računara na istraživanja u svim oblastima fizike je takođe vrlo značajna. Fizikalni procesi se često definišu diferencijalnim jednačinama koje je teško riješiti analitički. U tim situacijama problemi se rješavaju numeričkim metodama pri čemu je potrebno primjeniti adekvatnu metodu koja će nam dati najtačnija rješenja [1].

Rješavanje nekog fizikalnog problema može se prikazati šematski (slika 1). Polazeći od fizikalnog sistema koji se zasniva na eksperimentalnim rezultatima primjenjuju se dinamički modeli kojima opisujemo problem a zatim primjenjuju numeričke metode kojima se tretiraju dati modeli. Izračunavanje se izvodi kompjuterima i dobijeni rezultati se analiziraju.

U nestabilnom fizičkom sistemu ovaj lanac može pući na svakoj vezi, tj. u dobijenim rezultatima imaćemo pojavu numeričkih nestabilnosti ili numeričkog haosa što je prouzrokovano bilo kojom karikom u datom lancu.

Može se desiti da iako je fizički sistem stabilan opet u rješenjima možemo imati pojavu numeričkih nestabilnosti. U ovoj situaciji uzrok nestabilnostima može biti primjenjeni model, numerička metoda ili sam kompjuter.

Prvi problem je vezan za same računare, tj. preciznost, greška u zaokruživanju brojeva, itd.

Slika 1: Šematski prikaz rješavanja fizikalnog problema

Drugi problem je vezan za numeričke metode. Različite metode mogu za isti model voditi različitim rješenjima koja su različita i haotično se ponašaju iako sam model nije haotičan. Ovaj problem proističe iz činjenice da rješavajući neprekidni dinamički model moramo izvršiti njegovu diskretizaciju a sama diskretizacija fundamentalno mijenja prirodu neprekidnih dinamičkih modela i mnogo utiče na tačnost konačnih rješenja. Tačnost numeričkih metoda zavisi od mnogo parametara, kao što je npr. dužina integracinonog koraka.

Jedna od primjena numeričkih metoda je dobijanje aproksimativnih rješenja diferencijalnih jednačina. Ako je teško ili nemoguće naći analitičko rješenje, numeričkom metodom je potrebno naći aproksomativno rješenje.

Pri rješenju diferencijalne jednačine na nekom intervalu potrebno je uzeti dovoljno mali integracioni korak, takav da je rješenje dobra aproksimacija tačnog rješenja. Ako želimo integraliti diferencijalnu jednačinu na velikom intervalu i ako smo primorani primjeniti veoma kratke korake, račun može biti komplikovan. S druge strane, ako primjenimo širi korak greška pri računu će biti veća. Treba naći najoptimalnije rješenje.

Ako rješimo i ove početne probleme, tačnost može zavisiti i od primjenjene numeričke metode.

2 Numeričko rješavanje diferencijalne jednačine

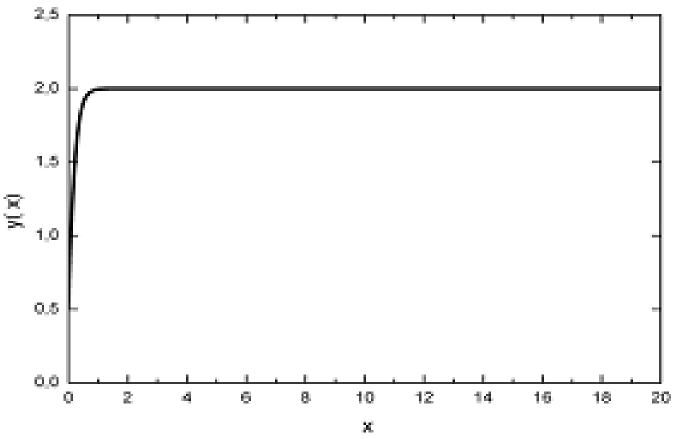
U ovom radu analiziraćemo jedan matematički primjer, tj. analiziraćemo rješavanje relativno jednostavne diferencijalne jednačine koja se može riješiti analitički. Pokazaćemo šta se dešava ako primjenimo neadekvatnu numeričku metodu, tj. pokazaćemo kako nas metoda vodi u pogrešna rješenja i numeričke nestabilnosti pa i u numerički haos iako je sam model stabilan. Analizirajmo diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{dy}{dx} = (y+4)(2-y)\,; \tag{1}$$

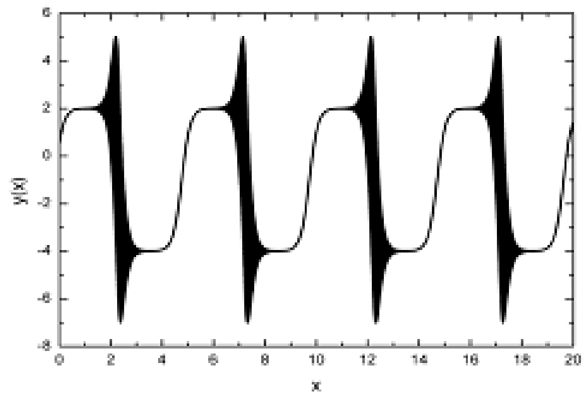
pri čemu je poznat početni uslov $y(0) = y_0$.

Navedena jednačina 1 može se lako tačno riješiti analitički, pri čemu je rješenje dato izrazom:

$$y = \frac{2Ce^{6x}+4}{Ce^{6x}-1} \tag{2}$$



Slika 2: Tačno rješenje jednačine 2



Slika 3: Rješenje jednačine koje slijedi iz izraza (3)

gdje je konstanta $C = (y_0 + 4) \,/\, (y_0 - 2)$.

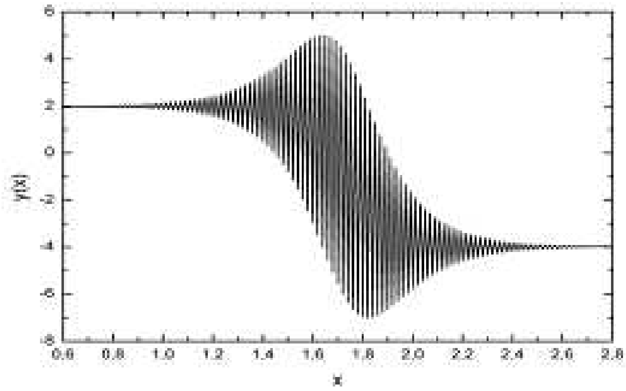
Ako uzmemo početnu vrijednost $y_0 = 0,5$, rješenje jednačine 2 daje vrijednost za y koje monotono raste i konvergira ka vrijednosti $y = 2$ kad $x \to \infty$ (slika 2).

Analizirajmo sada numerička rješenja jednačine 1. Za početak ćemo primjeniti tzv. *modifikovanu Ojlerovu metodu* (*metoda centralnih razlika*) [2], na osnovu koje iz jednačine 1 slijedi izraz:

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = (u_n + 4)\,(2 - u_n)\,; \tag{3}$$

gdje je h integracioni korak, a u_n numeričko rješenjenje nakon n koraka. Početni uslovi su: $u_0 = y_0$ i $u_1 = y_0 + h\,(y_0 + 4)\,(2 - y_0)$.

Neka su početne vrijednosti u_0=*0.5* i u_1= *0.513* , a za integracioni korak uzmimo h = *0.002*. Dobijeno rješenje koje slijedi iz izraza 3 dato je na slici 3.



Slika 4: Detalj kao na slici 3

Zaključujemo da je rješenje netačno pri čemu sa porastom promjenjljive x, rješenja na pojedinim intervalima osciluju oko karakterističnih tačaka *2* i *-4* što se dešava na zatamnjenim dijelovima grafika. Ove oscilacije su ilustrovane na slici 4 što odgovara sličnim zatamnjenim detaljima na slici 3. Na slici 4 se uzima da je $u_0=0.5$, $u_1=0.567$, a integracioni korak je $h=0.01$. Zaključujemo da se oscilacije uočavaju zbog većeg koraka h.

Transformišimo izraz 3 i napišimo ga u obliku:

$$u_{n+1} = 2h\,(u_n + 4)\,(2 - u_n) + v_n,\ \ v_{n+1} = u_n. \tag{4}$$

Iz 4 definišimo preslikavanje:

$$y_{n+1} = 2h(y_n + 4)(2 - y_n) + z_n,\ \ z_{n+1} = y_n. \tag{5}$$

Preslikavanje iz 5 dato je na slici 5 gdje se vidi da se rješenja najviše zadržavaju oko tačaka *2* i *-4*. Parametri su kao za sliku 3.

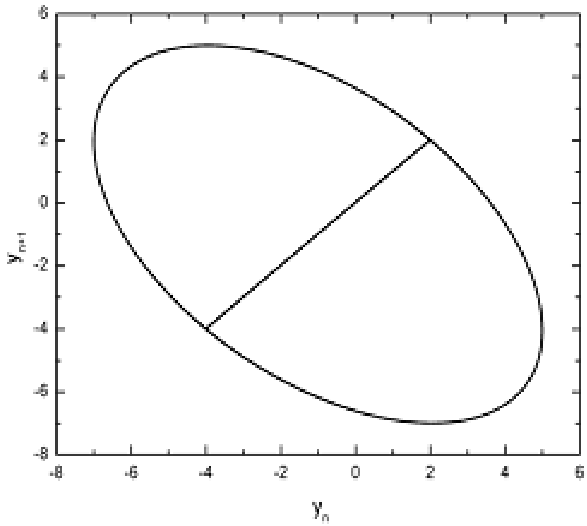
Razlog koji dovodi do nestabilnosti je neadekvatna numerička metada pri čemu najveći uticaj može imati greška zaokruživanja do decimale kolika je preciznost računara, kao i primjenjeni korak.

Ako pri daljnjoj analizi neznatno smanjujemo korak integraljenja, u rješenjima imamo mala poboljšanja dok se sa značajnijim smanjenjem koraka dobijaju potpuno netačna rješenja.

Ako se uzima veći korak integraljenja, greška je velika i rješenje vrlo brzo teži $u_n \to -\infty$.

Analizirajmo sada navedeni primjer primjenjujući složeniju metodu, tzv. *kombinovanu numeričku metodu* koja se dobija kombinacijom *metode centralnih razlika* i *Ojlerove metode* [3][4][5] . Na osnovu ove metode iz jednačine 1 slijedi izraz:

$$\frac{(1-m)\,(u_{n+1} - u_{n-1})}{2h} + \frac{m\,(u_{n+1} - u_n)}{h} = (u_n + 4)\,(2 - u_n)\,; \tag{6}$$



Slika 5: Preslikavanje rješenja datog na slici 3

gdje je m parameter, čije su vrijednosti:$0 \leq m \leq 1$. Za *m=1,* prethodni izraz svodi se na Ojlerovu metodu, a za *m=0,* svodi se na metodu centralnih razlika. Iz navedenog izraza 6 slijedi:

$$u_{n+1} = \frac{1-m}{1+m} u_{n-1} + \frac{2}{1+m} \left[(m-2h)\, u_n + h \left(8 - u_n^2 \right) \right]. \qquad (7)$$

Očigledno je da rješenja izraza 7 zavise od početnih vrijednosti, integracionog koraka *h,* ali i parametra *m.* Pokazuje se da za slučaj $m < h$ ova metoda daje netačna rješenja sa numeričkim nestabilnostima i numeričkim haosom.

Na slici 6. je je dato rješenje za: u_0*=0.5, h= 0.002* dok je *m=0.001.*

Sa slike 6. se vidi da na malom početnom intervalu promjenjive x , rješenje teži tačnoj vrijednosti, ali nakon toga dobijamo oscilacije. Sa daljnjim porastom promjenjljive, rješenje teži karakterističnim tačkama *2* i *-4.*

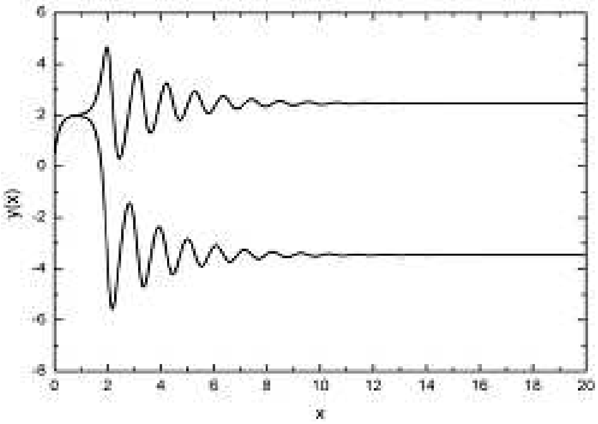
Sličnom analizom kao kod metode centralnih razlika, tj. kao što iz 3, slijedi 4, iz izraza 7 slijedi

$$u_{n+1} = \frac{1-m}{1+m} \nu_n + \frac{2}{1+m} \left[(m-2h)\, u_n + h \left(8 - u_n^2 \right) \right], \; v_{n+1} = u_n \qquad (8)$$

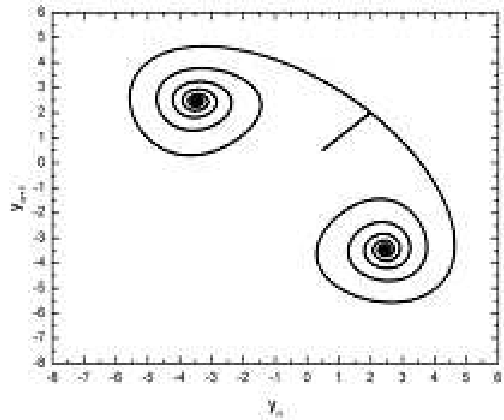
odnosno iz 8 možemo definisati preslikavanje:

$$y_{n+1} = \frac{1-m}{1+m} z_n + \frac{2}{1+m} \left[(m-2h)\, y_n + h \left(8 - y_n^2 \right) \right], \; z_{n+1} = y_n. \qquad (9)$$

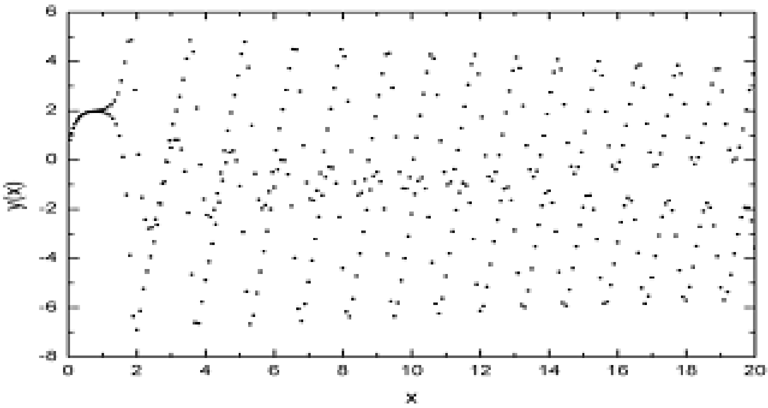
Na slici 7 je predstavljeno preslikavanje koje slijedi iz 9 za iste podatke kao za sliku 6 gdje se takođe vidi kako rješenje teži stabilnim tačkama *2* i *-4.*



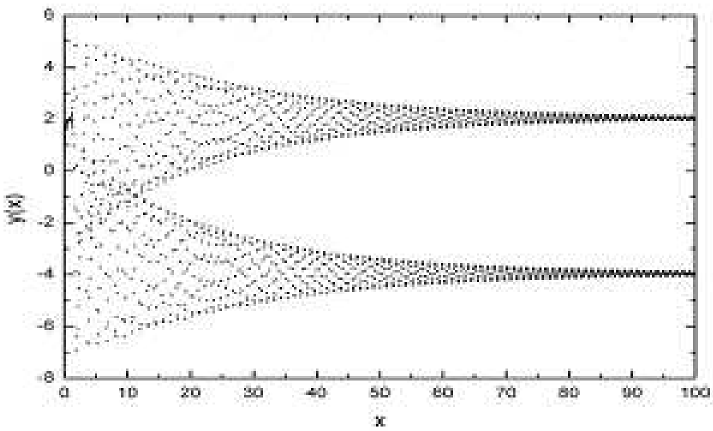
Slika 6: Rješenje koje slijedi iz kombinovane numeričke metode



Slika 7: Preslikavanje za rješenje na slici 6



Slika 8: Rješenje u kome se pojavljuje numerički haos



Slika 9: Rješenje sa istim podacima kao za sliku 8

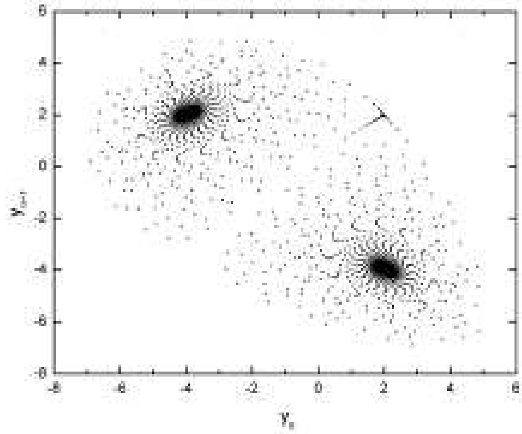
Za jednaku vrijednost koraka kao u prethodnom slučaju $h=0.05$, povećanjem parametra $m=0.002$ dobijamo još veće numeričke nestabilnosti u rješenjima (slika 8 i slika 9). Na početnom intervalu nezavisno promjenljive rješenje teži tačnoj vrijednosti a zatim prelazi u numerički haos (slika 8). Sa daljnjim porastom promjenljive, rješenja teže konstantnim rješenjima 2 i -4 (slika 9).

Za slučaj dat na slici 9, iz preslikavanja 9 slijedi grafik na slici 10.

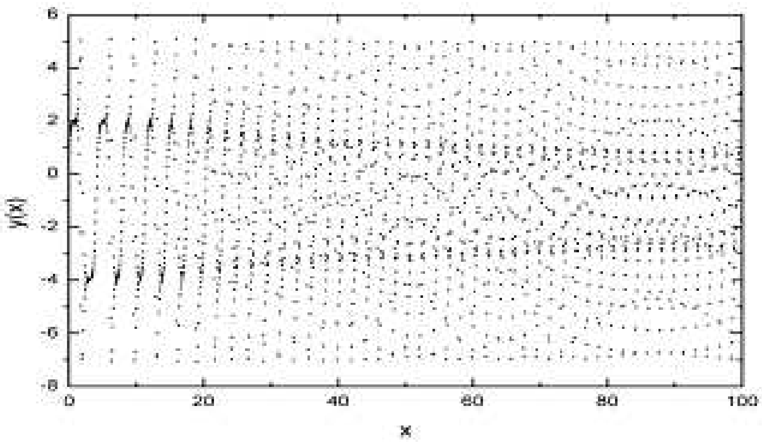
Za jednake vrijednosti $h=0.05$ i smanjenjem vrijednosti parametra $m=0.00005$, dobijamo numerički haos na još većem interval nezavisno promjenljive (slika 11 i slika 12).

Za ovaj slučaj iz preslikavanja 9 slijedi grafik na slici 13.

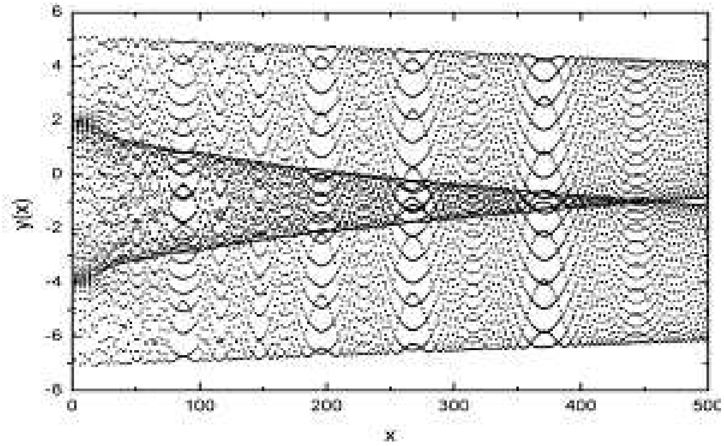
Daljnja analiza pokazuje da se smanjenjem koraka h i podešavanjem parametra m, pri čemu je $h < m$, može doći do tačnog rješenja. Npr. za $h=0.002$ i $m=0.2$



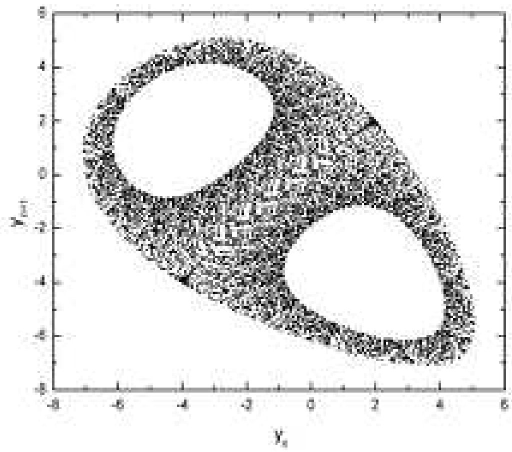
Slika 10: Preslikavanje za rješenje na slici 9



Slika 11: Rješenje koje dovodi do numeričkog haosa



Slika 12: Rješenje koje dovodi do numeričkog haosa



Slika 13: Preslikavanje za rezultate na slici 12

dolazimo do tačnog rješenja kao na slici 2.

Takođe, pri daljnjim analizama se pokazje da se može naći adekvatnija numerička metoda kao što je npr. Runge-Kuta metoda četvrtog reda koja daje tačno rješenje.

Iz svega zakuljučujemo da pri nepreciznom numeričkom rješavanju diferencijalnih jednačina može doći do pogrešnih rješenja. Ova problematika pogotovo dolazi do izražaja kada se na ovaj način rješavaju složeni, nestabilni fizikalni pro-esi.

Literatura

[1] M. R. Belić, *Computational chaos in Spatio-temporal structure and chaos in heat and mass transfer processes*, M. Todorović and L. Pismen eds, 309, Mrljes and Sons, Nicosia (1993).

[2] Z. Ljuboje, *Numerički haos u fotorefraktivnoj optici* Neobjavljeno.

[3] M. Yamaguti and S. Ushiki, *Chaos in numerical analysis of ordinarydiferential equations*, Phisica 3D 618 (1981).

[4] Glyn James, *Advanced Modern Engineering Matematics,* 4th Ed.,Prentice Hall, 2011.

[5] Z. Ljuboje, *Numeričke nestabilnosti pri rješavanju nekih problema u fizici*, INFOTEH 2014

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Modelovanje jednačina u mlađim razredima osnovne škole

Dragica Milinković
Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Pedagoški fakultet
Bijeljina, BiH, Republika Srpska
sadra@teol.net

Stručni rad

Apstrakt

U početnoj nastavi matematike najveći broj problema se svodi na rješavanje pomoću jednačina, koje predstavljaju izazov za učenike, iako njihova primjena na tom uzrastu ima znatna ograničenja. Prilikom upotrebe modela jednačina u rješavanju realnih problema u mlađim razredima osnovne škole, učenici se susreću sa brojnim teškoćama, među kojima su najvažnije formiranje odgovarajućih jednačina i rješavanje formiranih jednačina, budući da su veze između poznatih i nepoznatih veličina u realnim problemima različitog karaktera. Shodno tome, ne postoji univerzalna metoda po kojoj bismo kontekstualne probleme preveli na algebarski jezik.

Zato je u bazičnom školskom ciklusu neophodno, prije svega, iskoristiti kognitivne kompetencije učenika u implementiranju sadržaja o linearnim jednačinama što podrazumijeva da se u poučavanju koriste jednostavniji, pogodniji i efikasniji načini koji slijede njihove sposobnosti, odnosno metode koje omogućavaju "slikovit" pristup postavljanju i rješavanju jednačina. U tom smislu, matematičko modelovanje linearnih jednačina primjenom grafičkog pristupa podrazumijeva određene postupke koji se redoslijedom mogu primijeniti pri rješavanju svakog problema: proučavanje verbalnih (tekstualnih, ilustrativnih) prikaza kontekstualnih problema, identifikovanje numeričkih i promjenljivih veličina koje su eksplicitno date kao "nepoznate" i njihovo grafičko predstavljanje, uočavanje i izražavanje algebarskih odnosa u vizuelnom prikazu, postavljanje i rješavanje algebarskih jednačina, te kontekstualne interpretacije numeričkih i algebarskih izraza u njima.

Shodno tome, u prvom dijelu rada predstavićemo matematičke modele u kojima slikovne demonstracije pojednostavljuju modelovanje linearnih jednačina.

Drugi, metodološki dio orijentisan je na utvrđivanje efekata slikovnog pristupa u modelovanju jednačina u mlađim razredima osnovne škole primjenom eksperimentalne metode, a treći na interpretaciju kvantitativnih i kvalitativnih pokazatelja.

Evidentno je da heuristička vrijednost vizuelizacije u mlađim razredima osnovne škole, upućuje na primjenu slikovnog predstavljanja, ne samo u modelovanju linearnih jednačina, nego i u prikazivanju matematičkih pojmova, pravila i rješavanju problema.

1 Jednačine u mlađim razredima osnovne škole

Matematika se od svoga nastanka primjenjivala u rješavanju praktičnih životnih problema, a upravo rješavanje mnogih od njih se svodi na algebarske jednačine. Imajući u vidu raznovrsnost problema koji se mogu rješavati pomoću jednačina, te njihovu dominaciju u odnosu na druge postupke, metode i modele, ne rijetko se smatra da je čitava algebra nastala iz potrebe rješavanja raznih jednačina.

Sa jednačinama učenici se susreću u najranijem školskom uzrastu, što podrazumijeva da se sa jednakosti među brojevima prešlo na formule u kojima figuriše nekoliko veličina, odnosno da je "srušena" čvrsta ograda između aritmetike i algebre. Ulazak u svijet algebre zahtijeva poseban umni napor za učenike mlađeg školskog uzrasta, odnosno savladavanje brojnih psiholoških barijera i shodno tome ima obilježje postupnosti.

Kieran u svojim istraživanjima ističe da je ključni činilac neuspjeha u učenju algebre algebarska simbolika: "Zahtjevi postavljeni pred učenike pri učenju algebre podrazumevaju tretiranje simboličkih reprezentacija, koje ili imaju malo ili nimalo semantičkog sadržaja matematičkog objekta" (Kieran 1992: 394).

U razrednoj nastavi matematike učenici izučavaju jednačine sa sabiranjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem u skupu N i N_0.

Binarne operacije *sabiranje* i *množenje* na skupu N se uvode putem definicije.

Definicija 1.1. Proizvoljnom uređenom paru $(x,\ y)$ elemenata iz N pridružuje se element iz N, $x + y$ sa:
$1°$ $(\forall x \in N)\ x + 1 = x'$;
$2°$ $(\forall x, y \in N)\ x + y' = (x + y)'$.

Simbolom $+$ označava se ta binarna operacija. Elementi x i y, u izrazu $x + y$ nazivaju se *sabirci*, a rezultat sabiranja je *zbir*.

Definicija 1.2. Proizvoljnom uređenom paru $(x,\ y)$ elemenata iz N pridružuje se proizvod $x \cdot y$ sa:
i) $(\forall x \in N)$ x вЂў $1 = x$;
ii) $(\forall x, y \in N)\ x \cdot y' = xy + x$.

Elementi x i y zovu se *činioci* (*faktori*), a operacija definisana sa *i*) i *ii*) naziva se *množenje*.

Definicija 1.3. Jedinstven broj x takav da važi $a + x = b$, $a < b$, naziva se *razlika* brojeva b i a i pišemo $x = b - a$ $(a < b)$. Broj b se naziva *umanjenik*, a broj a *umanjilac*.

Binarna operacija oduzimanje je uslovna u N i samo pri $a < b$, $x = b - a$ je prirodan broj.

Definicija 1.4. Prirodan broj x *deli* prirodan broj y ako postoji prirodan broj z takav da važi $y = x \cdot z$ i piše se $x\ |y$.

Stav 4.1. Binarna relacija "deli" (ili "se sadrži") je relacija delimičnog uređenja u N (Pikula, Marković, 2014: 46- 53).

U nastavi matematike bazičnog školskog ciklusa učenici se sa jednačinama susreću već u prvom razredu, što podrazumijeva formiranje pojmova jednakost, jednačina i rješenje. Na nivou prvog i drugog razreda učenici upoznaju jednakosti vezane za sabiranje i oduzimanje, npr. $5 + 3 = 8$, $8 - 3 = 5$, a uvježbanost veze između tih operacija predstavlja osnovu za rješavanje jednačina tipa:

$5 + \square = 8$, $\square + 3 = 8$,

$3 + x = 8$, $x + 5 = 8$,

$8 - \square = 3$, $\square - 5 = 3$,

$8 - x = 5$, $x - 3 = 5$.

Iako se u okviru programskih sadržaja I razreda ne nalaze sadržaji o jednačinama, učenici se sa njima susreću prilikom rješavanja zadataka sa sabiranjem i oduzimanjem u skupu prirodnih brojeva do 10, u kojima je potrebno izračunati nepoznati sabirak, umanjenik ili umanjilac (nepoznata figuriše kao), dok se, prema aktuelnom nastavnom planu i programu za osnovnu školu Republike Srpske, u II razredu obrađuju jednačine oblika $a + x = b$, $x + a = b$, $x - a = b$, $a - x = b$ u skupu brojeva do 20. U trećem razredu se izučavaju navedeni tipovi jednačina u skupu brojeva do 100, te formiraju pojmovi jednačina oblika $x \cdot a = b$, $a \cdot x = b$, $x : a = b$, $a : x = b$, odnosno jednačine sa nepoznatim činiocem, djeljenikom i djeliocem. U četvrtom razredu se znanja o jednačinama stečena u prethodnim razredima proširuju na skup prirodnih brojeva do 1000, a u petom na prirodne brojeve iz skupa N i N_0veće od 1000.

Izučavanje jednačina u mlađim razredima osnovne škole se nastavlja formiranjem i rješavanjem jednačina sa dvije operacije istog nivoa, oblika:

$x + a + b = c$, $a + x + b = c$, $a + b + x = c$,

$x - a - b = c$, $a - x - b = c$, $a - b - x = c$

$x \cdot a \cdot b = c$, $a \cdot x \cdot b = c$, $a \cdot b \cdot x = c$

$x : a : b = c$, $a : x : b = c$, $a : b : x = c$.

Slijedi obrada jednačina sa dvije operacije različitog nivoa, tipa:

$a \cdot x + b = c$, $a + b \cdot x = c$, $a \cdot x - b = c$,

$x \cdot a + b = c$, $a + x \cdot b = c$, $x \cdot a - b = c$,

$a - b \cdot x = c$, $x : a + b = c$, $a + b : x = c$,

$a - x \cdot b = c$, $a : x + b = c$, $a + x : b = c$,

$x : a - b = c$, $a - b : x = c$.

Na kraju, kao najsloženije, u nastavi bazičnog školskog ciklusa se formiraju i rješavaju jednačine sa više operacija.

Uvažavajući kompleksnost algebarskog jezika s jedne, te razvojni i intelektualni nivo učenika mlađeg školskog uzrasta s druge strane, teoretičari i praktičari su saglasni u tvrdnji da nije rješavanje jednačina, nego njihovo sastavljanje, odnosno prevođenje zadatka sa prirodnog jezika na jezik algebre ono što je najvažnije. "Kad to sastavljanje ide bez teškoća većini u razredu, znak je da smo naš zadatak razvijanja ideje o promenljivoj uspešno ostvarili" (Marjanović, 1996: 73).

Prirodni jezik	Algebarski jezik
Marko je za rođendan dobio određenu količinu novca;	x
za kupovinu cipela je utrošio 76 novčanih jedinica;	$x - 76$
ostatku je dodao ovomjesečni džeparac koji iznosi 50 novčanih jedinica;	$x - 76 + 50 = x - 26$
za užinu u školi platio je 18 novčanih jedinica;	$x - 26 - 18 = x - 44$
novcem koji je dobio za stipendiju ostatak je uvećao tri puta;	$3 \cdot (x - 44) = 3 \cdot x - 132$
za odlazak na izlet potrošio je 32 novčane jedinice;	$3 \cdot x - 132 - 32 = 3 \cdot x - 164$
ostatku je dodao 44 novčane jedinice svoje sestre;	$3 \cdot x - 164 + 44 = 3 \cdot x - 120$
tako je udvostručio polazni iznos.	$3 \cdot x - 120 = 2x$

Tabela 1: Prevođenje zadatka sa prirodnog na algebarski jezik

Svođenje realnog problema na algebarski jezik ilustrovaćemo na primjeru koji slijedi, a prezentovati tabelom 1:

Marko je za rođendan dobio određenu količinu novca. Za kupovinu cipela je utrošio 76 novčanih jedinica. Ostatku je dodao ovomjesečni džeparac koji iznosi 50 novčanih jedinica. Zatim je za užinu u školi platio 18 novčanih jedinica. Novcem koji je dobio za stipendiju ostatak je uvećao tri puta. Nakon toga je za odlazak na izlet potrošio 32 novčane jedinice. Na kraju je ostatku dodao 44 novčane jedinice svoje sestre i tako udvostručio polazni iznos. Izračunaj količinu novca koju je Marko imao na početku.

Rješavanjem posljednje jednačine ($3 \cdot x - 120 = 2x$) dolazimo do rješenja realnog problema, odnosno do podatka o količini novca koju je Marko imao na poˇetku (120 novčanih jedinica).

1.1 Modelovanje jednačina

Prevazilaženje prepreka u procesu rješavanja problema iz konteksta, podrazumijeva matematička znanja, koja različitim misaonim postupcima povezujemo sa stvarnom, konkretnom situacijom, s obzirom da dolazak do rješenja zahtijeva značajno vremensko angažovanje, visok nivo misaonog angažovanja, motivisanost, strpljivost i racionalnost (Milinković, 2013).

Savremena metodika matematike za razrednu nastavu poseban akcenat stavlja na tzv. savremene metode nastave i učenja među kojima je, u okviru sistema metoda kibernetike (Mayer, G., 1968), i metoda modela, koja svoju punu primjenu nalazi u rješavanju realnih životnih problema. Osnovna uloga modela je, bez obzira na područje stvarnosti koju predstavlja, da zamijeni predmet istraživanja na osnovu koga je projektovan i da daje nove informacije o njemu.

Modelovanje u početnoj nastavi matematike teži da kod učenika razvije bolje razumijevanje matematičkih koncepata, uči ih razumijevanju matematičkih problema, uočavanju činjenica, formulisanju i rješavanju problema koji su rezultat specifičnih realnih situacija, te razvijanju kritičkog i stvaralačkog mišljenja. Veliki broj radova i istraživanja u svijetu ukazuje na pozitivne karakteristike matematičkog modelovanja, ali ono još uvijek nije potpuno integrisano u početnu nastavu matematike, odnosno postoji prazan prostor između tradicionalne nastave i ovakvih nastavnih formi u mlađim razredima osnovne škole (Milinković, 2014: 91-92).

U nastavnom procesu modeli služe kao simulacije realnih situacija i u funkciji su pripreme učenika za izazove u kojima će se naći izvan škole, poslije završetka školovanja. Njima se omogućava razvijanje sposobnosti kao što su razumijevanje, interpretacija, opisivanje, tumačenje podataka kao i konstruisanje i upravljanje kompleksnim matematičkim sistemima.

Prvi koji se sistematično bavio problematikom "svođenja" kontekstualnih problema na matematički, odnosno algebarski jezik je francuski matematičar, fizičar i filozof Ren'e Descartes (1596-1650). On je došao do sljedećih pravila koja karakterišu tzv. Descartesovu metodu rješavanja problema:

1. zadatak bilo koje vrste se svodi na matematički zadatak;
2. svaki matematički zadatak se svodi na algebarski zadatak;
3. algebarski zadatak se uvijek svodi na rješavanje jedinstvene jednačine.

Iako Descartesova metoda ne sadrži opšte upute za prevođenje realnih problema na algebarski jezik, njegova pravila sadrže značajne odrednice metodike rješavanja matematičkih zadataka:

1. razumijevanje zadatka, uočavanje datih i nepoznatih objekata i veličina, uočavanje uslova, svođenje zadatka na pronalaženje nepoznatih veličina;
2. proučavanje (analiza) zadatka, očigledno predstavljanje odnosa između datih i nepoznatih veličina, shodno redoslijedu i uslovima;
3. izdvajanje dijela uslova koji omogućavaju izražavanje jedne veličine na različite načine, sastavljanje jednačine koja povezuje nepoznate veličine, raščlanjivanje uslova i sastavljanje jednačine za svaku nepoznatu veličinu;
4. svođenje sistema jednačina na jedinstvenu jednačinu.

Imajući u vidu znatna ograničenja u primjeni algebarskog jezika u nastavi matematike bazičnog školskog ciklusa, relacije koje se najčešće koriste u modelovanju jednačina na tom uzrastu su:

1. z je za y veći od x, tj. $z = x + y$;

2. z je za y manji od x, tj. $z = x - y$;

3. z je y puta veći od x, tj. $z = y. x$;

4. z je y puta manji od x, tj. $z = x : y$;

5. uzastopni prirodni brojevi $(n, n + 1, n \in N)$;

6. dvocifreni broj $10 n + m$, n i m - cifre dekadnog brojevnog sistema;

7. zbir brojeva x i y $(x + y)$;

8. proizvod brojeva x i y $(x . y)$.

Uvažavajući navedeno, u početnoj nastavi matematike neophodno je, prije svega, iskoristiti kognitivne kompetencije učenika u implementiranju sadržaja o linearnim jednačinama što podrazumijeva da se u poučavanju koriste jednostavniji, pogodniji i efikasniji načini koji slijede njihove sposobnosti, odnosno metode koje omogućavaju "slikovni" pristup postavljanju i rješavanju jednačina. U tom smislu, matematičko modelovanje linearnih jednačina primjenom grafičke metode koja je učenicima najprimjerenija, podrazumijeva određene postupke koji se redoslijedom mogu primijeniti pri rješavanju svakog problema:

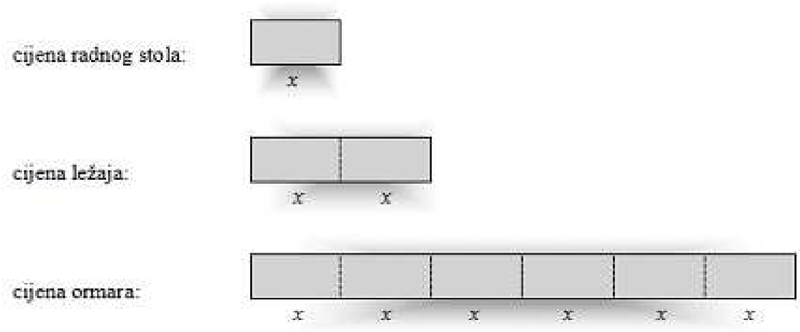
1. (a) proučavanje verbalnih (tekstualnih, ilustrativnih) prikaza kontekstualnih problema,
   (b) identifikovanje numeričkih i promjenljivih veličina koje su eksplicitno date kao "nepoznate" i njihovo grafičko predstavljanje,
   (c) uočavanje i izražavanje algebarskih odnosa u vizuelnom prikazu,
   (d) postavljanje i rješavanje algebarskih jednačina,
   (e) kontekstualne interpretacije numeričkih i algebarskih izraza u njima.

Grafička reprezentacija, odnosno ikoničko predstavljanje odnosa između veličina u problemskom zadatku podrazumijeva svako slikovno (geometrijsko) prikazivanje ili predstavljanje, kojim se vizuelizuju bitne karakteristike nekog matematičkog problema (Zech, 1999).

Poseban značaj ima ikonička predstava u obliku prikaza ili skice situacije, pri čemu se grafički prikaz situacije može smatrati za pomoćno sredstvo u rešavanju problema.

Slijede primjeri zadataka koji se modeluju algebarskom, grafičko - aritmetičkom i grafičko -algebarskom metodom.

Primer 1.1. Markovi roditelji su kupili namještaj za njegovu sobu koji su platili 360 novčanih jedinica. Ležaj je dva puta skuplji od radnog stola, dok je ormar dva puta skuplji od ležaja i radnog stola zajedno. Kolike su cijene svakog dijela namještaja?



Slika 1:

Rješenje:

1. *algebarsko:*

x - cijena radnog stola $z = 2(x + 2x) = 6x$
y – cijena ležaja $x + 2x + 6x = 360$
z – cijena ormara $9x = 360$
$x + y + z = 360$ $\underline{x = 40}$
$y = 2x$ $y = 80$
$\underline{z = 2(x + y)}$ $z = 240$

1. *grafičko-algebarsko:*

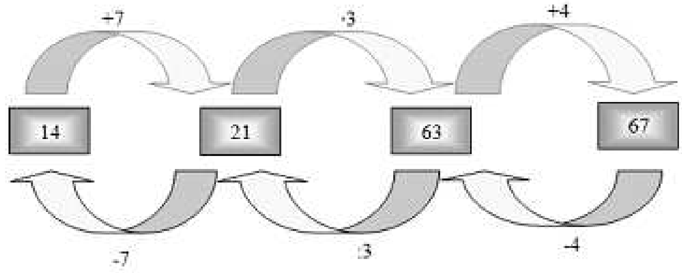
$9x = 360$
$x = 360 : 9$
$\underline{x = 40}$
Cijena radnog stola – 40 novčanih jedinica
Cijena ležaja – 80 novčanih jedinica
Cijena ormara – 240 novčanih jedinica

Primer 1.2. Petar je 7 godina stariji od sestre Katarine, a tri puta mlađi od bake Stane. Koliko oni imaju godina, ako će baka za 4 godine imati 67 godina?

Rješenje:

1. *algebarsko:*

x – Katarinine godine
y – Petrove godine
67 – bakine godine
$y = x + 7$
$\underline{3\,y + 4 = 67}$
$3y = 67 - 4$



Slika 2:

$3y = 63$
$\underline{y = 21}$
$x = y - 7$
$\underline{x = 14}$

1. *grafičko-aritmetičko:*

Katarina ima 14, a Petar 21 godinu.

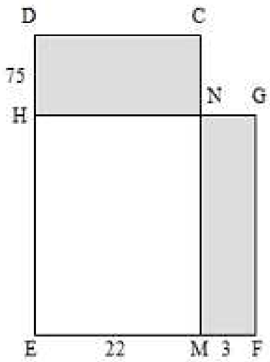
Primer 1.3. Leteći uz vazdušni tok, putnički avion preleti rastojanje između dva mjesta za 25 časova. Da je letio niz isti vazdušni tok, letio bi 75km/h brže i za prelazak istog rastojanja utrošio bi 3 časa manje. Kojom brzinom je putnički avion letio uz vazdušni tok? Koliko je rastojanje između ta dva mjesta?

Rješenje:

1. *algebarsko:*

x - brzina aviona uz vazdušni tok
25 – vrijeme leta aviona uz vazdušni tok
$x + 75$ - brzina aviona niz vazdušni tok
$25 - 3$ – vrijeme leta aviona niz vazdušni tok
y – rastojanje između dva mjesta
$y = 25 \cdot x$
$\underline{y = (25 - 3) \cdot (x + 75)}$
$25x = 22(x + 75)$
$25x = 22x + 1650$
$3x = 1650$
$\underline{x = 550}$
$P = 25 \cdot 550$
$P = 13750$

1. *grafičko-algebarsko:*



Slika 3:

$3 \cdot x = 22 \cdot 75$
$x = 1650 : 3$
$x = 550$
$P = 25 \cdot 550$
$P = 13750$
Putnički avion je uz vazdušni tok letio brzinom od 550km/h.
Rastojanje između dva mjesta je 13750 km.

2 Metodološki pristup problemu istraživanja

Predmet istraživanja je usmjeren na utvrđivanje efikasnosti modelovanja jednačina u mlađim razredima osnovne škole. U tom smislu, cilj istraživanja je ispitivanje i komparacija dobijenih rezultata u pogledu uspješnosti rješavanja realnih problema algebarskim, grafičko – algebarskim i grafičko – aritmetičkim metodama. Zbog prirode cilja istraživanja korištena je neeksperimentalna kauzalna metoda, a kao istraživački instrument neformalni test znanja sa 10 realnih problema, konstruisan prema vlastitim iskustvenim saznanjima i saznanjima drugih istraživača, te prema aktuelnom udžbeniku. Istraživanje je provedeno na uzorku od 62 učenika iz tri odjeljenja petog razreda Osnovne škole "Sveti Sava" u Bijeljini, u kojima razredni nastavnici, pri rješavanju problemskih zadataka, primjenjuju navedene metode.

Dobijeni numerički pokazatelji su statistički obrađeni, te podvrgnuti kvantitativnoj, kvalitativnoj i kauzalnoj analizi.

3 Rezultati istraživanja i diskusija

U prvom dijelu analize opravdanost svojih pretpostavki testirali smo tako što smo empirijske podatke statistički obradili primjenom F- testa i izvršili analizu varijansnog količnika (tabela 1), s ciljem utvrđivanja razlika između tri kategorije

Metoda rješavanja zadataka	**N**	**M**	**SD**	**F**	**df**	p
algebarska	18	15,8333	9,5101	19,182	2	0,0001
grafičko – algebarska	24	23,0208	8,8765			
grafičko – aritmetička	20	32,7500	6,8297			
Ukupno	62	24,0726	10,7050			

Tabela 2: Razlike u uspjehu na testu s obzirom na metodu rješavanja zadataka

Metoda rješavanja zadataka	**M (diferencija)**	**p**
algebarska, grafičko – algebarska	−7,1875	0,009
algebarska, grafičko – aritmetička	−16,9167	0,0001
grafičko – algebarska, grafičko – aritmetička	−9,7292	0,001

Tabela 3: Međugrupne razlike između metoda rješavanja u pogledu efikasnosti

zadataka s obzirom na efikasnost metode primijenjene u rješavanju (algebarska, grafičko – algebarska, grafičko – aritmetička).

Evidentno je na osnovu podataka iz tabele da je srednja vrijednost u pogledu broja osvojenih bodova, ostvarena pri rješavanju realnih problema algebarskom metodom najmanja (15,8333), grafičko – algebarskom nešto veća (23,0208), a grafičko – aritmetičkom najveća (32,7500).

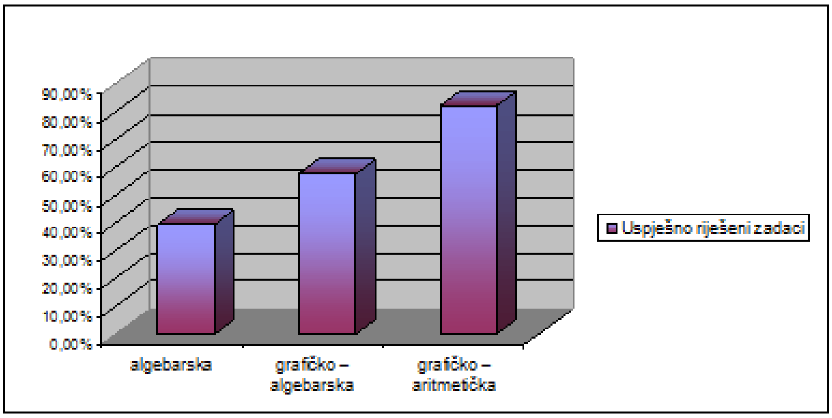
Za varijansu između kategorija zadataka s obzirom na metodu rješavanja, F – vrijednost je statistički značajna na nivou $p = 0{,}0001$ za $F = 19{,}182$ i $df = 2$. To znači da su razlike, odnosno bar jedna od razlika između aritmetičkih sredina osvojenih bodova, statistički značajne. U ovom slučaju, sve tri moguće razlike su značajne:

1. između algebarske i grafičko – algebarske na nivou 0,009;
2. između algebarske i grafičko – aritmetičke na nivou 0,0001;
3. između grafičko – algebarske i grafičko – aritmetičke na nivou 0,001(tabela 2).

Zbirni rezultati u pogledu broja i procenta uspješno riješenih zadataka prikazani su tabelom 3 i grafikonom 1. Oni omogućavaju upoređivanje metoda rješavanja u pogledu efikasnosti primjene u rješavanju kontekstualnih problema.

Metoda rješavanja zadataka	Broj zadataka		Broj riješenih zadataka	
	$\sum$	%	$\sum$	%
algebarska	180	100,00	71	39,44
grafičko – algebarska	240	100,00	138	57,50
grafičko – aritmetička	200	100,00	164	82,00
ukupno	620	100,00	373	60,16

Tabela 4: Zbirni rezultati u pogledu uspješnosti rješavanja zadataka (Σ č %)



Slika 4: Uspješno riješeni zadaci s obzirom na metodu rješavanja – zbirni rezultati (%)

Vidljivo je da su od ukupno 180 zadataka, modelovanih algebarskom metodom, učenici riješili 71 ili 39,44%, od 240 zadataka modelovanih grafičko – algebarskom metodom riješili 138 ili 57,50%, dok su od 200 zadataka modelovanih grafičko – aritmetičkom metodom riješili 164 ili 60,16%. Takvi podaci su svakako pokazatelji efikasnosti grafičkih metoda, te nedovoljne razvijenosti algebarskog mišljenja u nastavi matematike bazičnog školskog ciklusa.

Prezentovani rezultati potvrđuju da su efekti modelovanja realnih problema algebarskim metodama, bez obzira na njihovu dominantnost u aktuelnoj nastavi matematike, nezadovoljavajući, s obzirom na kompleksnost algebarskog jezika.

4 Zaključak

Najveći broj realnih problema u nastavi matematike bazičnog ciklusa učenici svode na rješavanje pomoću algebarskih jednačina, bez obzira na poteškoće sa kojima se susreću pri njihovom formiranju i rješavanju i nezadovoljavajuće rezultate.

S druge strane, heuristička vrijednost vizuelizacije u mlađim razredima osnovne škole, upućuje na primjenu "slikovnog" predstavljanja, ne samo u modelovanju linearnih jednačina, nego i u prikazivanju matematičkih pojmova, pravila i u rješavanju problema, s obzirom da ikonizacija u mlađim razredima osnovne škole pruža mentalne slike koje predstavljaju pomoć u shvatanju formalnih zakona u aritmetičkim strukturama.

Geometrijsko modelovanje algebarskih jednačina, bez obzira na veliki značaj u bazičnom matematičkom obrazovanju još uvijek nije potpuno integrisano u poˇetnu nastavu matematike jer postoji prazan prostor između konvencionalne nastave i ovakvih nastavnih formi u mlađim razredima osnovne škole.

Literatura

[1] Kieran, C., *The learning and teaching of school algebra*, In D. A. Grouws "Handbook of research on mathematics teaching and learning" (390–419), New York: Macmillan, (1992).

[2] Marjanović M., *Metodika nastave matematike*, Drugi deo. Beograd: Učiteljski fakultet, 1996.

[3] Mayer, G., *Kibernetika i nastavni pro es*, Školska knjiga, Zagreb, 1968.

[4] Milinković Dragica, *Metodika matematičkog modelovanja za razrednu nastavu*, Filozofski fakultet Pale, 2013.

[5] Milinković Dragica, *Primjena metoda matematičkog modelovanja u početnoj nastavi matematike*, Zbornik radova sa naučnog skupa "Nauka i globalizacija" Filozofski fakultet Pale, 2014.

[6] Pikula Milenko, Marković Olivera, *Osnove algebre i geometrije*, Učiteljski fakultet Užice, 2014.

[7] Zech, F., *Grundkurs Mathematikdidaktik - Theoretische und praktische Anleitungen fΓjr das Lehren und Lernen von Mathematik*, Weinheim und Basel: Beltz Verlag, 1999.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Asimptotika svojstvenih vrijednosti Sturm-Liouvilleovog problema sa konstantnim preticanjem

Elmir Čatrnja
Univerzitet "Džemal Bijedić" u Mostaru, Nastavnički fakultet
elmir.catrnja@unmo.ba

Milenko Pikula
Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Filozofski fakultet Pale
pikulam1947@gmail.com

Pregledni rad

Apstrakt

U posljednje vrijeme došlo je do velikog pomaka u teoriji diferencijalnih jednačina tipa Sturm-Liouvillea sa raznim vrstama kašnjenja. U ovom radu ćemo umjesto kašnjenja posmatrati preticanje, te definisati diferencijalnu jednačinu tipa Sturm-Liouvillea sa konstantim preticanjem pri Dirichletovim graničnim uslovima. Pri tome ćemo konstruisati rješenje takve jednačine, te formirati njenu karakterističnu funkciju i na kraju dati izraz za asimptotsko ponašanje svojstvenih vrijednosti te jednačine.

1 Uvod

Na segmentu $[0, \pi]$ posmatraćemo Sturm-Liovilleovu jednačinu sa konstantnim preticanjem

$$-y''(x) + q(x)y(x+\tau) = \lambda y(x), \tag{1}$$

pri čemu ćemo za potencijal $q(x)$ uzimati realnu funkciju iz $L_2[0, \pi]$ prostora. Za preticanje τ ćemo uzeti da vrijedi $\tau \in \mathbb{R}^+$ i $\tau < \pi$.

Pored ove jednačine posmatraćemo i granične uslove Dirichletovog tipa

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{2}$$

Zbog specifičnosti jednačine sa preticanjem, kako x bude uzmalo vrijednosti iz skupa $[0, \pi]$, $x + \tau$ će prolaziti skupom $[\tau, \pi + \tau]$, pa će polazni skup funkcije $y(\cdot)$ biti $[0, \pi + \tau]$. Zbog toga ćemo u našem razmatranju uzimati da je

$$y(x) \equiv 0 \text{ za } x \in [\pi, \pi + \tau]. \tag{3}$$

Primijetimo da će u tom slučaju i proizvod $q(x)y(x+\tau)$ biti jednak nuli za $x \in [\pi - \tau, \pi]$.

Definicija 1.1. Sa L_τ označimo operator definisan sa (1), (2) i (3), tj. operator

$$L_\tau(y(x)) := -y''(x) + q(x)y(x+\tau)$$

2 Analiza problema

Vrijedi sljedeća lema.

Lema 2.1. Jednačina Sturm-Liouvillea sa preticanjem (1) zajedno sa Dirichletovim graničnim uslovima (2) je ekvivalentna integralnoj jednačini Volterrinog tipa

$$y(x,z) = C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int_x^{\pi} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau,z)dt. \tag{4}$$

Dokaz. Dokaz ćemo izvršiti metodom varijacije konstante. Napišimo jednačinu (1) u obliku

$$y''(x) + \lambda y(x) = q(x)y(x+\tau). \tag{5}$$

Rješenje homogene jednačine

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0$$

je

$$y = C_1 \cos zx + C_2 \sin zx, \tag{6}$$

Sada, smatrajući da su C_1 i C_2 funkcije po promjenjivoj x, diferenciranjem dobijamo

$$y'(x) = C_1'(x)\cos zx - C_1(x)z\sin zx + C_2'(x)\sin zx + C_2(x)z\cos zx.$$

Stavimo da je

$$C_1'(x)\cos zx + C_2'(x)\sin zx = 0 \tag{7}$$

i nađimo $y''(x)$. Imamo

$$y''(x) = -C_1'(x)z\sin zx - C_1(x)z^2\cos zx + C_2'(x)z\cos zx - C_2(x)z^2\sin zx.$$

Uvrštavajući u jednačinu (5) dobijamo

$$-C_1'(x)z\sin zx + C_2'(x)z\cos zx = q(x)y(x+\tau). \tag{8}$$

Sada iz (7) i (8), možeći prvu sa $z\sin zx$, a drugu sa $\cos zx$ i sabirajući ih dobijamo

$$C_2'(x)(z\sin^2 zx + z\cos^2 zx) = q(x)y(x+\tau)\cos zx,$$

pa je

$$C_2'(x) = \frac{1}{z}q(x)y(x+\tau)\cos zx,$$

tj.

$$C_2(x) = C_2 + \frac{1}{z}\int_x^{\pi} q(t)y(x+\tau)\cos zt.$$

Slično, iz (7) i (8), množeći prvu sa $z\cos zx$, a drugu sa $-\sin zx$ i sabirajući ih dobijamo

$$C_1(x) = C_1 + \frac{1}{z}\int_x^\pi q(t)y(t+\tau)\sin zt.$$

Uvrštavajući ovako dobijene $C_1(x)$ i $C_2(x)$ u rješenje homogene jednačine (6) i koristeći se elementarnim trigonometrijskim transformacijama, konačno dobijamo

$$y(x) = C_1\cos zx + C_2\sin zx - \frac{1}{z}\int_x^\pi q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt.$$

Iz drugog graničnog uslova $y(\pi)=0$ imamo,

$$y(\pi) = C_1\cos z\pi + C_2\sin z\pi - \frac{1}{z}\int_\pi^\pi q(t)\sin z(\pi-t)y(t+\tau)dt = 0.$$

Integral u gornjem izrazu je 0, pa je

$$C_1\cos z\pi + C_2\sin z\pi = 0,$$

tj.

$$C_2\cos z\pi = -C_1\frac{\cos z\pi}{\sin z\pi}.$$

Sada je

$$y(x) = C_1\cos zx - C_1\frac{\cos z\pi}{\sin z\pi}.\sin zx - \frac{1}{z}\int_x^\pi q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau,z)dt,$$

tj.

$$y(x) = \frac{C_1}{\sin z\pi}\cos zx\sin z\pi - \cos z\pi\sin zx - \frac{1}{z}\int_x^\pi q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau,z)dt,$$

ili nakon što smo umjesto $\frac{C_1}{\sin z\pi}$ stavili jednostavno C_1 i primjenili adicionu formulu dobijamo (4).

U [4] se pokazuje da Volterrina jednačina ima jedinstveno rješenje.

Pokažimo da vrijedi i obrnuto, tj. da je dobijena integralna jednačina rješenje Sturm-Liouvilleove jednačine. Zaista, diferencirajući izraz dat sa (4) dva puta dobijamo

$$y(x) = C_1\sin z(\pi-x) - \frac{1}{z}\int_x^\pi q(t)\sin zx\cos zt\; y(t+\tau)dt+$$

$$+\frac{1}{z}\int\limits_x^\pi q(t)\cos zx\sin zt\; y(t+\tau)dt.$$

$$\begin{aligned}y(x)=C_1\sin z(\pi-x)-\sin zx\;\frac{1}{z}\int\limits_x^\pi q(t)\cos zt\; y(t+\tau)dt+\\ +\cos zx\;\frac{1}{z}\int\limits_x^\pi q(t)\sin zt\; y(t+\tau)dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'(x)&=-C_1 z\cos z(\pi-x)-\\ &-\frac{1}{z}\sin zxq(x)\cos zxy(x+\tau,z)-\frac{1}{z}z\cos zx\int\limits_x^\pi q(t)\cos zt\; y(t+\tau)dt+\\ &+\frac{1}{z}\cos zx\; q(x)\sin zx\; y(x+\tau,z)-\frac{1}{z}z\sin zx\int\limits_x^\pi q(t)\cos zty(t+\tau)dt,\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}y'(x)=&-C_1 z\cos z(\pi-x)-\\ &-\cos zx\int\limits_x^\pi q(t)\cos zty(t+\tau)dt-\\ &-\sin zx\int\limits_x^\pi q(t)\sin zty(t+\tau)dt.\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}y''(x)&=-C_1 z^2\sin z(\pi-x)-\\ &+z\sin zx\int\limits_x^\pi q(t)\cos zty(t+\tau,z)dt-\cos zxq(x)\cos zxy(x+\tau)-\\ &-z\cos zx\int\limits_x^\pi q(t)\sin zty(t+\tau,z)dt-\sin zxq(x)\sin zxy(x+\tau)=\\ &=-C_1 z^2\sin z(\pi-x)-q(x)y(x+\tau)+\\ &+z\sin zx\int\limits_x^\pi q(t)\cos zty(t+\tau,z)dt-\end{aligned}$$

$$- z\cos zx \int\limits_x^{\pi} q(t)\sin zt y(t+\tau,z)dt =$$

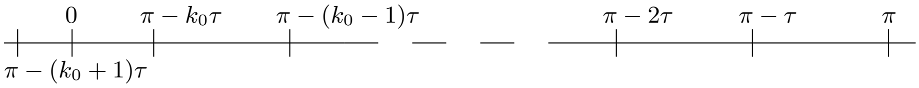
$$= -C_1 z^2 \sin z(\pi - x) - q(x)y(x+\tau) + z\int\limits_x^{\pi} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau,z)dt.$$

Uvrštavajući u (1) dobijamo identitet, čime smo dokazali i obrat. □

Primijetimo da funkcija data sa (4) zavisi ne samo od x, nego i od z, pa smo strogo gledano trebali pisati $y(x,z)$. Međutim, zbog jednostavnijeg zapisivanja izostavljaćemo promjenjivu z kad god je to moguće i ne utiče na razmatranje.

Nađimo rješenje jednačine (4) koristeći se metodom koraka.

Pošto je $\tau \in (0,\pi)$ moŽemo naći $k_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $k_0\tau < \pi \leq (k_0+1)\tau$. Izvršimo podjelu segmenta $[0,\pi]$ na način prikazan na slici



Radi jednostavnijeg zapisa uvedimo sljedeće oznake, pri čemu ćemo sa staviti $t_0 = t$.

$$\left.\begin{aligned}
Q(T_l) &= q(t)q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_l) = \prod_{i=0}^{l} q(t_i),\\
dT_l &= dt\, dt_1\, dt_2\, \cdots\, dt_l = \prod_{i=0}^{l} dt_i,\\
D_l(x) &= \left\{ (t,t_1,\dots,t_l) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x & \leq t \leq & \pi-(l+1)\tau \\ t+\tau & \leq t_1 \leq & \pi - l\tau \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{l-1}+\tau & \leq t_l \leq & \pi-\tau \end{array} \right\},\\
P(T_l) &= \prod_{i=1}^{l} \sin z(t_{i-1}+\tau-t_i).
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Primijetimo, također, da su ove oznake rekurzivnog karaktera, npr. $P(T_l) = P(T_{l-1})\sin z(t_{l-1}+\tau-t_l)$.

Posmatrajmo sada sljedeće slučajeve,

1. $x \in (\pi-\tau,\pi]$. Prema postavci problema je $y(x) \equiv 0$ za $x \in [\pi,\pi+\tau]$, pa je $y(x+\tau) \equiv 0$, za $x \in [\pi-\tau,\pi]$. Sada je integral u jednačini (4) dobijene u prethodnoj teoremi jedan nuli, pa je

$$\begin{aligned}y(x) &= C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int\limits_x^\pi q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt.\\ &= C_1 \sin z(\pi - x)\end{aligned}$$

2. $x \in (\pi - 2\tau, \pi - \tau]$.

$$\begin{aligned}y(x) &= C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int\limits_x^\pi q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt =\\ &= C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int\limits_x^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt-\\ &\quad -\frac{1}{z}\int\limits_{\pi-\tau}^{\pi} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt\end{aligned}$$

Kao i u prethodom koraku drugi integral je jednak nuli, a u prvom integralu $t+\tau$ prolazi skupom $[\pi-\tau, 0]$, pa je $y(t+\tau) = C_1 \sin z(\pi - t - \tau)$. Dakle,

$$y(x) = C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{C_1}{z}\int\limits_x^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)\sin z(\pi - t - \tau)dt.$$

3. $x \in (\pi - 3\tau, \pi - 2\tau]$.

$$\begin{aligned}y(x) &= C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int\limits_x^\pi q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt =\\ &= C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int\limits_x^{\pi-2\tau} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt-\\ &\quad -\frac{1}{z}\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt-\\ &\quad -\frac{1}{z}\int\limits_{\pi-\tau}^{\pi} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt\end{aligned}$$

Zadnji integral je kao i dosada jednak nuli. Posmatrajmo prvi integral. Kako t ide skupom $[x, \pi - 2\tau]$, to $t + \tau$ ide skupom $[x + \tau, \pi - \tau]$. Dakle, u izrazu $y(t+\tau)$ promjenjiva ide skupom $[\pi-2\tau, \pi-\tau]$, pa moŽemo iskoristiti rezultat drugog koraka. Dobijamo

$$\frac{1}{z}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt =$$

$$= \frac{1}{z}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau} q(t)\sin z(x-t)\Bigg(C_1 \sin z(\pi-t-\tau)-$$

$$- \frac{C_1}{z}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t_1)\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1\tau)dt_1\Bigg)dt =$$

$$= \frac{C_1}{z}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau} q(t)\sin z(\pi-t-\tau)\sin z(x-t)dt-$$

$$- \frac{C_1}{z^2}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1-\tau)\sin z(x-t)dt_1 dt$$

U drugom integralu kako t ide skupom $[\pi-2\tau, \pi-\tau]$, $t+\tau$ ide skupom $[\pi-\tau, \pi]$. Dakle, u izrazu $y(t+\tau)$ promjenjiva ide skupom $[\pi-\tau, \pi]$, pa moŽemo iskoristiti rezultat prvog koraka, pa dobijamo

$$\frac{1}{z}\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt = \frac{C_1}{z}\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)\sin z(\pi-t-\tau)dt.$$

Sada je

$$y(x) = C_1\sin z(\pi-x) - \frac{C_1}{z}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau} q(t)\sin z(x-t)\sin z(\pi-t-\tau)dt+$$

$$+ \frac{C_1}{z^2}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1-\tau)dt_1 dt-$$

$$- \frac{C_1}{z}\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)\sin z(\pi-t-\tau)dt =$$

$$= C_1\sin z(\pi-x) - \frac{C_1}{z}\int\limits_{x}^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)\sin z(\pi-t-\tau)dt+$$

$$+ \frac{C_1}{z^2}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\sin z(x-t)\sin z(\pi-t_1-\tau)\sin z(t+\tau-t_1)dt_1 dt =$$

$$= C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{C_1}{z} \int\limits_x^{\pi-\tau} q(t) \sin z(x-t) \sin z(\pi - t - \tau) dt +$$

$$+ \frac{C_1}{z^2} \iint\limits_{D_1} Q(T_1) \sin z(x-t) P(T_1) dT_1$$

4. $x \in [\pi - 4\tau, \pi - 3\tau]$. Rezonujući kao i prethodnom koraku imamo da je

$$y(x) = C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z} \int\limits_x^{\pi} q(t) \sin z(x-t) y(t+\tau) dt =$$

$$= C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z} \int\limits_x^{\pi-3\tau} q(t) \sin z(x-t) y(t+\tau) dt -$$

$$- \frac{1}{z} \int\limits_{\pi-3\tau}^{\pi-2\tau} q(t) \sin z(x-t) y(t+\tau) dt -$$

$$- \frac{1}{z} \int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t) \sin z(x-t) y(t+\tau) dt -$$

$$- \frac{1}{z} \int\limits_{\pi-\tau}^{\pi} q(t) \sin z(x-t) y(t+\tau) dt$$

pa primjenjući rezultate prethodnih koraka dobijamo vodeći računa o tome kojim intevalim se kreće promjenjiva imamo

za $[x, \pi - 3\tau]$

$$\frac{1}{z} \int\limits_x^{\pi-3\tau} q(t) \sin z(x-t) y(t+\tau) dt =$$

$$\frac{1}{z} \int\limits_x^{\pi-3\tau} q(t) \sin z(x-t) \Bigg(C_1 \sin z(\pi - t - \tau) -$$

$$- \frac{C_1}{z} \int\limits_x^{\pi-\tau} q(t) \sin z(x-t) \sin z(\pi - t - \tau) dt +$$

$$+ \frac{C_1}{z^2} \iint\limits_{D_1} Q(T_1) \sin z(x-t) P(T_1) dT_1 \Bigg) =$$

$$= \frac{C_1}{z} \int\limits_{x}^{\pi-3\tau} q(t) \sin z(x-t) \sin z(\pi - t - \tau) -$$

$$- \frac{C_1}{z^2} \int\limits_{x}^{\pi-3\tau} \int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1) \sin z(t+\tau-t_1) \sin z(x-t) \sin z(\pi - t_1 - \tau) dt_1 dt +$$

$$+ \frac{C_1}{z^3} \int\limits_{x}^{\pi-3\tau} q(t) \sin z(x-t) \iint\limits_{D_1} Q(T_1) \sin z(x-t) P(T_1) dT_1 =$$

$$= \frac{C_1}{z} \int\limits_{x}^{\pi-3\tau} q(t) \sin z(x-t) \sin z(\pi - t - \tau) -$$

$$- \frac{C_1}{z^2} \int\limits_{x}^{\pi-3\tau} \int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1) \sin z(t+\tau-t_1) \sin z(x-t) \sin z(\pi - t_1 - \tau) dt_1 dt +$$

$$+ \frac{C_1}{z^3} \int \int \int_{D_2} Q(T_2) \sin z(x-t) P(T_2) dT_2$$

Analogno na segmentu $[\pi - 3\tau, \pi - 2\tau]$ imamo

$$\frac{1}{z} \int\limits_{\pi-3\tau}^{\pi-2\tau} q(t) \sin z(x-t) y(t+\tau) dt =$$

$$= \frac{1}{z} \int\limits_{x}^{\pi-3\tau} q(t) \sin z(x-t) \Bigg(C_1 \sin z(\pi - t - \tau) -$$

$$- \frac{C_1}{z} \int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t_1) \sin z(t+\tau-t_1) \sin z(\pi - t_1 - \tau) dt_1. \Bigg) dt =$$

$$= \frac{C_1}{z} \int\limits_{\pi-3\tau}^{\pi-2\tau} q(t) \sin z(x-t) \sin z(\pi - t - \tau) -$$

$$- \frac{C_1}{z^2} \int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} \int_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1) \sin(x-t) \sin z(t+\tau-t_1) \sin z(\pi - t_1 - \tau) dt_1 dt =$$

a na segmentu $[\pi - 2\tau, \pi - \tau]$

$$\frac{1}{z} \int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t) \sin z(x-t) y(t+\tau) dt =$$

$$= \frac{1}{z} \int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t) \sin z(x-t) \Bigg(C_1 \sin z(\pi - t - \tau) \Bigg) =$$

$$\frac{C_1}{z} \int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t) \sin z(x-t) \sin z(\pi - t - \tau)$$

pa konačno imamo

$$\begin{aligned} y(x) = {} & C_1 \sin z(\pi - x) - \\ & - \frac{1}{z} \int\limits_{x}^{\pi-\tau} q(t) \sin z(x-t) \sin z(\pi - t - \tau) + \\ & + \frac{C_1}{z^2} \int \int_{D_1} Q(T_1) \sin z(x-t) P(T_1) dT1 - \\ & - \frac{C_1}{z^3} \int \int \int_{D_2} Q(T_2) \sin z(x-t) P(T_2) dT_2 = \\ & = C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z} \int\limits_{x}^{\pi-\tau} q(t) \sin z(x-t) \sin z(\pi - t - \tau) + \\ & + \sum_{k=2}^{3} \frac{(-1)^k}{z^k} \int \cdots \int_{D_k} Q(T_k) \sin z(x-t) P(T_k) dT_k \end{aligned}$$

...

$\mathbf{k_0}$. $x \in [0, \pi - k_0\tau]$. Ponavljajući postupak iz prethodnih koraka dobijamo

$$\begin{aligned} y(x) = {} & C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{C_1}{z} \int\limits_{x}^{\pi} q(t) \sin z(x-t) y(t+\tau) dt = \\ & = C_1 \sin z(\pi - x) - \frac{C_1}{z} \int\limits_{x}^{\pi-\tau} q(t) \sin z(x-t) \sin z(\pi - t - \tau) dt + \\ & + C_1 \sum_{k=1}^{k_0} \frac{(-1)^k}{z^k} \int \ldots \int_{D_k} Q(T_k) \sin z(x-t) P(T_k) dT_k \end{aligned}$$

Sada je poljednjim izrazom dato rješenje jednačine na cijelom segmentu $[0, \pi]$. Primjetimo, također, da je gornje rješenje moguće napisati u obliku

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + \cdots + y_{k_0}(x),$$

pri čemu je

$$y_0(x) = C_1 \sin z(\pi - x), \quad x \le \pi,$$

a $y_k(x)$, $k \neq 0$ su dati rekurzivno izrazom

$$y_k(x) = \begin{cases} \frac{-1}{z} \int\limits_{x}^{\pi - k\tau} \sin z(x-t) q(t) y_{k-1}(t+\tau)\, dt, & x \le \pi - k\tau \\ 0, & x > \pi - k\tau \end{cases}$$

3 Karakteristična funkcija

Definicija 3.1. Ako je skup svojstvenih vrijednosti operatora L_τ identičan skupu nula funkcije F, tada funkciju F zovemo karakteristična funkcija operatora L_τ.

Teorema 3.1. $\lambda = z^2$ je svojstvena vrijednost operatora L_τ ako i samo ako je $F(z) = 0$.

Rješenja jednačine (1) pored uslova $y(\pi) = 0$ trebaju zadovoljavati i uslov $y(0) = 0$, pa dobijamo

$$y(0) = C_1 \sin z\pi - \frac{C_1}{z} \int\limits_{0}^{\pi-\tau} q(t) \sin z(0-t) \sin z(\pi - t - \tau) dt +$$
$$+ C_1 \sum_{k=2}^{k_0} \frac{(-1)^k}{z^k} \int \cdots \int_{D_k} Q(T_k) \sin z(0-t) P(T_k) dT_k = 0$$

Također, pošto nas interesuju netrivijalne funkcije y koje su rješenja problema moŽemo pretpostaviti da je $C_1 \neq 0$.

Sada se karakteristična funkcija moŽe zapisati u sljedećem obliku

$$F(z) = \frac{1}{C_1} \left(y_0(0) + y_1(0) + \cdots + y_{k_0}(0) \right).$$

Očigledno je funkcija

$$F(z) = \sin \pi z - \frac{1}{z} \int\limits_{0}^{\pi-\tau} q(t) \sin z(0-t) \sin z(\pi - t - \tau) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{k_0} \frac{(-1)^k}{z^k} \int \ldots \int_{D_k} Q(T_k) \sin z(0-t) P(T_k) dT_k,$$

tj.

$$F(z) = \sin \pi z + \frac{1}{z} \int\limits_{0}^{\pi-\tau} q(t) \sin zt \sin z(\pi - t - \tau) +$$

$$+\sum_{k=2}^{k_0}\frac{(-1)^{k-1}}{z^k}\int\dots\int_{D_k}Q(T_k)\sin ztP(T_k)dT_k$$

karakteristična funkcija operatora L_τ. Iz prethodnog zapisa karakteristične funkcije vidi se da vrijedi sljedeća lema

Lema 3.1. Karakteristična funkcija je cijela funkcija polovičnog stepena rasta.

Pokazaćemo da vrijedi sljedeća lema

Lema 3.2. Vrijedi sljedeća asimptotska relacija

$$y_k(x)=O\left(\frac{e^{\mathrm{Im}z(\pi-x-k\tau)}}{z^k}\right),\ \mathrm{Im}\,z>0,|z|\to\infty,x\le\pi-k\tau.$$

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti metodom matematičke indukcije. DokaŽimo da je tvrdnja tačna za $k=1$, tj. da vrijedi

$$y_1(x)=O\left(\frac{e^{\mathrm{Im}z(\pi-x-\tau)}}{z}\right),\ \mathrm{Im}z>0,|z|\to\infty,x\le\pi-\tau.$$

Pošto je na osnovu identiteta $\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

$$y_1(x)=-\frac{C_1}{z}\int_x^{\pi-k\tau}q(t)\sin z(x-t)\sin z(\pi-t-\tau)\,dt=$$
$$=\frac{C_1}{2z}\int_x^{\pi-\tau}q(t)\cos z(\pi-2t+x-\tau)\,dt-\frac{C_1}{2z}\cos z(\pi-x-\tau)\int_x^{\pi-\tau}q(t)\,dt,$$

to je

$$\frac{y_1(x)}{\frac{e^{\mathrm{Im}z(\pi-x-\tau)}}{z}}=\frac{\frac{C_1}{2z}\int_x^{\pi-\tau}q(t)\cos z(\pi-2t+x-\tau)\,dt-\frac{C_1}{2z}\cos z(\pi-x-\tau)\int_x^{\pi-\tau}q(t)\,dt}{\frac{e^{\mathrm{Im}z(\pi-x-\tau)}}{z}}=$$
$$=\frac{C_1}{2}\left(\int_x^{\pi-\tau}q(t)\frac{\cos z(\pi-2t+x-\tau)}{e^{\mathrm{Im}z(\pi-x-\tau)}}-\frac{\cos z(\pi-x-\tau)}{e^{\mathrm{Im}z(\pi-x-\tau)}}\int_x^{\pi-\tau}q(t)dt\right)$$

Sada je, koristeći $\cos(z)=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$,

$$\frac{\cos z(\pi-x-\tau)}{e^{\mathrm{Im}z(\pi-x-\tau)}}=\frac{e^{i\mathrm{Re}z(\pi-x-\tau)-\mathrm{Im}z(\pi-x-\tau)}+e^{-i\mathrm{Re}z(\pi-x-\tau)+\mathrm{Im}z(\pi-x-\tau)}}{2e^{\mathrm{Im}z(\pi-x-\tau)}}=$$
$$=\frac{e^{i\mathrm{Re}z(\pi-x-\tau)}}{2e^{2\mathrm{Im}z(\pi-x-\tau)}}+e^{-i\mathrm{Re}z(\pi-x-\tau)}=O(1)$$

za Im$z > 0$, $|z| \to \infty$, $x \leq \pi - \tau$. Slično je i

$$\frac{\cos z(\pi - 2t + x - \tau)}{e^{\mathrm{Im}z(\pi - x - \tau)}} = O(1)$$

za Im$z > 0$, $|z| \to \infty$, $x \leq \pi - \tau$.

Iz ovoga moŽemo zaključiti da je tvrdnja tačna za $y_1(x)$.

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $y_k(x)$, tj. da vrijedi

$$y_k(x) = O\left(\frac{e^{\mathrm{Im}z(\pi - x - k\tau)}}{z^k}\right), \quad \mathrm{Im}\, z > 0, |z| \to \infty, x \leq \pi - k\tau.$$

pa dokaŽimo da je tačna i za $y_{k+1}(x)$.

Zaista,

$$\frac{y_{k+1}(x)}{\frac{e^{\mathrm{Im}z(\pi - x - (k+1)\tau)}}{z^{k+1}}} = \frac{\frac{-1}{z}\int\limits_x^{\pi-(k+1)\tau} q(t)\sin z(x-t) y_k(t+\tau)dt}{e^{\mathrm{Im}z(x-(k+1)\tau)} z^{-k-1}} =$$

$$= \int\limits_x^{\pi-(k+1)\tau} q(t)\sin z(x-t)\frac{y_k(t+\tau)}{e^{\mathrm{Im}z(x-(k+1)\tau)} z^{-k}}dt$$

Primijenjujući induktivnu pretpostavku imamo da je

$$\int\limits_x^{\pi-(k+1)\tau} q(t)\sin z(x-t) e^{-\mathrm{Im}z(x-t)} = O(1)$$

za Im$z > 0$, $|z| \to \infty$, $x \leq \pi - \tau$. Pošto smo već dokazali da je i

$$\frac{\sin z(x-t)}{e^{\mathrm{Im}z(x-t)}} = O(1)$$

za Im$z > 0$, $|z| \to \infty$, $x \leq \pi - \tau$, kompletirali smo dokaz leme. □

Iz ove leme slijedi da vrijedi slijedeći teorem

Teorema 3.2. Za funkciju $F(z)$ vrijedi sljedeća asimptotska relacija

$$F(z) = \sin \pi z + \frac{1}{z}\int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)\sin zt \sin z(\pi - t - \tau)dt + O\left(\frac{e^{\mathrm{Im}z(\pi - 2\tau)}}{z^2}\right), \quad |z| \to \infty, \mathrm{Im} z > 0.$$

Dokaz. Iz leme direktno slijedi da je

$$y_2(0) + \ldots y_{k_0}(0) = O\left(\frac{e^{\mathrm{Im}z(\pi - 2\tau)}}{z^2}\right)$$

za $\mathrm{Im}z > 0$, $|z| \to \infty$, $x \le \pi - (k+1)\tau$, a pošto je

$$F(z) = \frac{1}{C_1}\left(y_0(0) + y_1(0) + \cdots + y_{k_0}(0)\right),$$

imamo je tvrnja teorema tačna. □

Teorema 3.3. Funkcija $F(z)$ ima prebrojivo mnogo nula, pri čemu se za dovoljno veliko n u krugu $K_n = \left\{z \,|\, |z-n| < \frac{1}{n}\right\}$ nalazi tačno jedna nula ove funkcije.

Dokaz. Pokazano je da vrijedi

$$F(z) = \sin \pi z + \frac{1}{z}\int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)\sin zt \sin z(\pi - t - \tau)dt + O\left(\frac{e^{\mathrm{Im}z(\pi-2\tau)}}{z^2}\right),$$

za $\mathrm{Im}z > 0$, $|z| \to \infty$.

Sada stavljajući

$$f(z) = \sin \pi z$$
$$g(z) = \frac{1}{z}\int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)\sin zt \sin z(\pi - t - \tau)dt + O\left(\frac{e^{\mathrm{Im}z(\pi-2\tau)}}{z^2}\right)$$

primjenom Rušeove teoreme (vidjeti [11]) pokazujemo tačnost naše tvrdnje. □

Dakle, pokazali smo da karaktertična funkcija ima prebrojivo mnogo nula i da se sve nule nalaze u blizini cijelih brojeva, pri čemu se tačno jedna nula nalazi u krugu poluprečnika $\frac{1}{n}$ sa centrom u $(n, 0)$.

Teorema 3.4. Ako je $F(z)$ karakteristična funkcija i ako je z_n, $\mathrm{Im}z_n > 0$ niz nula funckije $F(z)$, pri čemu je z_n ona nula koja je najbliŽa prirodnom broju n i standardnoj metrici skupa kompleksnih brojeva tada vrijedi:

$$z_n = n + \frac{c_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty$$

gdje je c_n ograničen niz za koji vrijedi

$$c_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)dt \cos n\tau - \int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)\cos n(2t-\tau)dt\right).$$

Dokaz. Na osnovu ranije dokazanog imamo da je

$$z_n = n + a_n,$$

pri čemu je

$$|a_n| < \frac{1}{n},$$

pa je

$$a_n = (1)\,, n \to \infty.$$

Sada iz $F(z_n) = 0$ imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} z_n \sin z_n\pi + \int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)\sin z_n t \sin z_n(\pi - t - \tau)\, dt = 0.$$

Ovdje smo koristili činjenicu da $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$ i da je

$$\lim_{n\to\infty} z_n O\left(\frac{e^{\mathrm{Im} z_n(\pi-2\tau)}}{z_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} z_n O\left(\frac{e^{\mathrm{Im} z_n(\pi-2\tau)}}{z_n^2}\right)\frac{z_n^2}{e^{\mathrm{Im} z_n(\pi-2\tau)}}\frac{e^{\mathrm{Im} z_n(\pi-2\tau)}}{z_n^2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\mathrm{Im} z_n(\pi-2\tau)}}{z_n} O(1) = 0.$$

Dalje je

$$\lim_{n\to\infty}(n + a_n)\sin(n + a_n)\pi + \int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)\sin(n + a_n)t \sin(n + a_n)(\pi - t - \tau)\, dt = 0.$$

Naime, pošto je $a_n = o(1)$, $n \to \infty$ pokazuje se da je

$$\int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)\sin(n + a_n)t\ \sin(n + a_n)(\pi - t - \tau)\, dt = O(1),\ n \to \infty$$

jer je podintegralna funkcija ograničena.

Dalje je,

$$\begin{aligned}
(n + a_n)\sin(n + a_n)\pi &= O(1),\ n \to \infty\\
(-1)^n(n + a_n)\sin a_n\pi &= O(1),\ n \to \infty\\
\frac{a_n\pi(-1)^n(n + a_n)\sin a_n\pi}{a_n\pi} &= O(1),\ n \to \infty\\
a_n\pi(-1)^n(n + a_n) &= O(1),\ n \to \infty
\end{aligned}$$

Sada zbog $na_n = O(1)$, $n \to \infty$ imamo da je

$$a_n = \frac{c_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty.$$

Odredimo c_n. Pošto vrijedi

$$F(z_n) = \sin\pi z_n + \frac{1}{z_n}\int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)\sin z_n t \sin z_n(\pi - t - \tau)dt + O\left(\frac{e^{\mathrm{Im} z(\pi-2\tau)}}{z_n^2}\right) =$$

$$= \sin \pi z_n + \frac{1}{2z_n} \cos z_n(\pi - \tau) \int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)\, dt - \frac{1}{2z_n} \int\limits_0^{\pi-\tau} q(t) \cos z_n(\pi - 2t + \tau)\, dt + o\left(\frac{1}{z_n}\right)$$

uzimajući u obzir da je $z_n = n + \frac{c_n}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$ vrijede sljedeće asimptotske relacije kad $n \to \infty$

$$\sin \pi z_n = (-1)^n \frac{c_n \pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\cos(\pi - \tau) z_n = (-1)^n \left(\cos n\tau + \frac{c_n(\pi - \tau)}{n} \sin n\tau\right) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\frac{1}{z_n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\cos(\pi - 2t + \tau) z_n = (-1)^n \left(\cos n(2t - \tau) + \frac{c_n(\pi - 2t + \tau)}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

Uvrštavajući prethodne asimptotske relacije u

$$F(z_n) = \sin \pi z_n + \frac{1}{2z_n} \cos z_n(\pi - \tau) \int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)\, dt - \frac{1}{2z_n} \int\limits_0^{\pi-\tau} q(t) \cos z_n(\pi - 2t + \tau)\, dt + o\left(\frac{1}{z_n}\right)$$

dobijamo nakon sređivanja

$$c_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi-\tau} q(t) dt \cos n\tau - \int\limits_0^{\pi-\tau} q(t) \cos n(2t - \tau) dt \right).$$

□

Posledica 3.4.1. Neka su λ_n svojstvene vrijednosti operatora L_τ, takve da je $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Tada vrijedi

$$\lambda_n = n^2 - \frac{\cos n\tau}{\pi} \int\limits_0^{\pi-\tau} + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi-\tau} q(t) \cos n(2t - \tau) dt + o(1),\ n \to \infty.$$

Dokaz. Već smo pokazali da je

$$z_n = n + \frac{1}{2\pi n} \left(\cos n\tau \int\limits_x^{\pi-\tau} q(t)\, dt - \int\limits_x^{\pi-\tau} q(t) \cos n(\pi - 2t + \tau)\, dt \right) + o\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty$$

Pošto je $\lambda_n = z_n^2$ imamao da je

$$\lambda_n = z_n^2 = \left[n + \frac{1}{2\pi n} \left(\cos n\tau \int\limits_x^{\pi-\tau} q(t)\, dt - \int\limits_x^{\pi-\tau} q(t) \cos n(\pi - 2t + \tau)\, dt \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^2 =$$

$$= n^2 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\left(\cos n\tau \int\limits_x^{\pi-\tau} q(t)\,dt - \int\limits_x^{\pi-\tau} q(t)\cos n(\pi - 2t + \tau)\,dt\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left(\cos n\tau \int\limits_x^{\pi-\tau} q(t)\,dt - \int\limits_x^{\pi-\tau} q(t)\cos n(\pi - 2t + \tau)\,dt\right) + 2no\left(\frac{1}{n}\right) +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n\pi}\left(\cos n\tau \int\limits_x^{\pi-\tau} q(t)\,dt - \int\limits_x^{\pi-\tau} q(t)\cos n(\pi - 2t + \tau)\,dt\right) =$$

$$= n^2 + \frac{\cos n\tau}{\pi}\int\limits_x^{\pi-\tau} q(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_x^{\pi-\tau} q(t)\cos n(\pi - 2t + \tau)\,dt + o\,(1)\,, (n \to \infty)$$

□

4 Zaključak

U ovom radu smo konstruisali rješenje Sturm-Liouvilleove jednačine sa konstantnim preticanjem, te izveli karakterističnu funkciju operatora L_τ uz Dirichletove granične uslove. Također, smo pokazali asimptotsko ponašanje svojstvenih vrijednosti tog operatora.

Literatura

[1] L. È. Èl'sgol'c, Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments, Translated from the Russian by Robert J. McLaughlin, Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif.-London-Amsterdam, (1966) MR 0192154 (33 #381)

[2] G. Freiling and V. Yurko, Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, NOVA Science Publishers, New York, (2001)

[3] G. Freiling G. and V.A. Yurko, Inverse problems for Sturm-Liouville diferential operators with a constant delay, Applied Mathematics letters, (2012)

[4] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York, (1978)

[5] A. D. Myshkis and L. È. Èl'sgol'ts, Some results and problems in the theory of differential equations, Uspehi Mat. Nauk 22 (1967) no. 2, 21-57, Russian Math. Surveys 22 (1967) no. 2.

[6] S. B. Norkin, Differential Equations of the Second Order with Retarded Argument, American Mathematical Society, (2005)

[7] M. Pikula, Određivanje diferencijalnog operatora šturm-Liuvilla s kašnjenjem na osnovu dva spektra, Matematički vesnik 34, (1991), 159–171

[8] M. Pikula, O određivanju diferencijalnog operatora s promjenjivim argumentom, Matematica Montinsigri, Vol VI, (1996) 71–91

[9] M. Pikula and T. Marjanović, The regulation independent of the potential simmetrical to center $[\tau, \pi]$ for Sturm-Liouville operator with a constant delay, Facta Universitatis, Ser. Math. Inform. 14, (1999), 21–29

[10] M. Pikula and T. Marjanović, The construction of the small potential for an equation of Sturm-Liouville type with constant delay, Proceedings of the II Mathematical Conference in Priština, (1996), 135–141

[11] V. Vladičić, Primjena Fourijevih redova u inverznom problemu jednačina sa kašnjenjem, doktorska disertacija, Filozoski fakultet Pale, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, (2013).

[12] A. M. Zverkin, G. A. Kamenskii, S. B. Norkin, and L. È. Èl'sgol'c, Differential equations with deviating argument, Uspehi Mat. Nauk 17 (1962), no. 2 (104), 77–164 (Russian). MR 0140789 (25 #4203)

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Zenonov paradoks o Ahileju i kornjači i beskonačnost

Ivan Budimir
Grafički fakultet Sveučilišta u Zagrebu
ibudimir@grf.hr

Naučna kritika

Apstrakt

Čuveni Zenonov paradoks o utrci između najbržeg starogrčkog heroja iz Homerove Ilijade i Odiseje, Ahileja i spore kornjače i danas je, nakon više od 2500 godina, predmetom brojnih rasprava u filozofiji i matematici. Drevni filozofi Platon, Aristotel, Toma Akvinski, suvremeni filozofi poput Martina Heideggera, osnivači diferencijalnog računa Newton i Leibniz, osnivač teorije relativnosti Albert Einstein, matematičar i logičar Bertrand Russel i brojni drugi znanstvenici suočavali su se s Zenonovim argumentima. Prema Russelu ovi paradoksi *"postali su osnova matematičke reneseanse"*. I danas je ovaj "zloglasni" paradoks predmetom proučavanja filozofa i matematičara, o čemu govore mnogi radovi koji su objavljeni na tu temu. U ovom radu ukazano je na višeznačnost ključnog Zenonovog argumenata u paradoksu o Ahileju i kornjači. Analizirana je beskonačna djeljivost konačnih intervala prostora i vremena koja se javlja u Zenonovim konstrukcijama. Detaljnom analizom beskonačne djeljivosti nailazi se na problem višeznačnosti pojma beskonačnosti koja se može interpretirati kao potencijalna ili aktualna beskonačnost. U klasičnom matematičkom rješenju pomoću geometrijskog reda, beskonačna djeljivost svodi se na određivanje limesa niza parcijalnih suma. Na taj način, rješenje paradoksa ovisi o definiciji limesa niza koji se tumači preko potencijalne beskonačnosti. U tom smislu paradoks se može smatrati riješenim. No, ako se beskonačna djeljivost shvati u smislu aktualne beskonačnosti, izvod starogrčkog genija i dalje ostaje u određenom smislu paradoksalan. Naime, aktualnu beskonačnost nije moguće iskustveno predočiti. Stoga aktualnu beskonačnost nije moguće niti adekvatno pojmiti. Beskonačno kao totalitet transcendira sve sposobnosti našeg mišljenja i ostaje mu nedohvatljivo. Ovim radom pokazano je da nam Zenonov paradoks o Ahileju i kornjači ukazuje da prostor i vrijeme sadrže neka zagonetna svojstva, poput beskonačne djeljivosti, koju ne možemo obuhvatiti našim intelektom.

Ključne riječi: Zenonovi paradoksi, potencijalna beskonačnost, aktualna beskonačnost, geometrijski red

1 Uvod

Zenon iz Eleje, (490. - 430. pr. Kr.) grčkog gradića na jugu Italije, filozof je iz razdoblja prije Sokrata. Njegove aporije, grč. nesavladive, nerješive poteškoće ili problemi, najpoznatiji su matematički paradoksi svih vremena koji su i danas predmet proučavanja matematičara i filozofa. Učenik je slavnog filozofa Parmenida, grč. (515. pr. Kr.) kojega Platon, grč. smatra *"velikim i uzvišenim"* te je pripadao njegovoj Elejskoj školi filozofije. Zenonov utjecaj na vodeće grčke filozofe Platona i Aristotela iznimno je velik. Najznačajniji Platonovi dijalozi *Parmenid* i *Sofist* posvećeni su promišljanju o bitku, biću i idejama koje je razvijao Parmenid. Prema Parmenidovoj filozofija bitka, biće je uvijek u sebi jednako vječno i savršeno, ne može nestati niti nastati [1]:

"Jedino opis preostaje puta
prema kom (biće) postoji.
Na njemu vrlo su mnogi znaci da je
nenastalo i neuništivo biće,
jer je celovito (ono), nepomično, bez završetka;
niti je bilo niti će biti, čitavo sad je, jedno,
neprekidno."

Pravi filozofi upoznati su s ovom vječnom spoznajom te se nalaze na putu istine. Većini običnih ljudi ona ostaje zauvijek skrivena. Prosječni ljudi na putu su mnijenja, jer se [2] *"Na temelju ljudskog iskustva ne može sagledati dubina prave istine."*. Parmenid je tako jedan od prvih velikih kritičara ljudske spoznaje u povijesti Zapadne filozofije.

Da bi potkrijepio Parmenidova stajališta Zenon je iznio četrdeset paradoksa, od kojih je Aristotel, (384. - 322. pr. Kr.) izdvojio četiri te ih je nazvao aporijama ili paradoksima. Iako je mnogo doprinio filozofiji i logici, Zenon je najpoznatiji upravo po svojim čuvenim paradoksima. Spomenute paradokse Aristotel je iznio u svojoj *Fizici*. Oni predstavljaju prvi primjer uvođenja dokaznog postupka koji je poznat kao *reductio ad absurdum*, odnosno načela kontradikcije. Najpoznatiji su paradoksi o Ahileju i kornjači, dihotomiji, strijeli i stadionu.

Smisao Zenonovih paradoksa nije u dokazivanju da prostor, vrijeme i kretanje ne postoje, što bi bilo potpuno apsurdno. Naprotiv, Zenon paradoksima nastoji ukazati kako je čovjekovo mišljenje kojim nastoji opisati kategorije prostora, vremena i kretanje nejasno i kontradiktorno. Iz toga slijedi zaključak kako prostor, vrijeme i kretanje nije moguće matematički i logički opisati. Ove kategorije naprosto izmiču mogućnostima čovjekovog mišljenja.

Zenonovi paradoksi već 2500 godina inspiriraju vodeće filozofe i matematičare. Tumačili su ih drevni grčki filozofi poput Simpliciusa od Cilicia, Arhimeda, Aristotela, Platona i monogih drugih. Filozofski značaj paradoksa uočili su i srednjovjekovni filozofi poput Tome Akvinskog. Jedno vrijeme se činilo da su paradoksi riješeni pomoću geometrijskih redova koji su otkriveni u 17. stoljeću. Pojam konvergencije nizova početkom 19. stoljeća prvi put precizno je definirao Augustin

Louis Cauchy. Time su osnovni pojmovi diferencijalnog i integralnog računa dobili precizan suvremeni oblik. U tom kontekstu javljaju se i nova rješenja Zenonovih paradoksa koji se svode na sume geometrijskih redova. Međutim, nova otkrića iz 19. stoljeća u teoriji skupova Georga Cantora omogućila su potpuno novi pogled na pojam beskonačnosti. Spomenuta otkrića omogućila su i novi pristup Zenonovim paradoksima koji su se ponovo našli u središtu interesa najvećih matematičara toga vremena. Početkom 20. stoljeća s razvojem teorijske matematike i moderne matematičke logike raste Zenonova popularnost. Jedan od najvećih matematičara 20. stoljeća Bertrand Russell bio je fasciniran Zenonovim argumentima. Prema Russelovim riječima [3]:

"U ovom hirovitom svijetu ništa nije hirovitije od posmrtne slave. Jedan od najboljih primjera žrtvi zbog lošeg rasuđivanja novih generacija jest Elejac Zenon. Nakon što je izmislio četiri argumenta od kojih su svi bili nemjerljivo suptilni i smišljeni, najveći dio kasnijih filozofa ga je proglasilo dovitljivim, a njegove argumente sofizmima. Poslije dvije tisuće godina neprestanog opovrgavanja, ovi su sofizmi ponovo postavljeni, i postali su osnova matematičke renesanse ..."

Danas se Zenonovi paradoksi javljaju kao nezaobilazna tema nove matematičke teorije poznate kao ne-standardna analiza. Spomenutu teoriju uveo je Abraham Robinson koji je skup realnih brojeva proširio nestandardnim infinitezimalnim elementima [4]. Time se uvodi novi račun s infinitezimalno malim veličinama koji zamjenjuje dosadašnju $\varepsilon - \delta$ tehniku. U okviru ne standardne analize javljaju se i novi dokazi Zenonovih paradoksa [5].

Interes za Zenonove paradokse ni danas ne prestaje o čemu svjedoči veliki broj znanstvenih radova objavljenih na tu temu [6-8]. Pristup Zenonovim paradoksima i koncepti njihovih rješenja ovise o stupnju razvoja filozofije, matematike i znanosti određene epohe. Stoga je prilično naivan stav da su spomenuti paradoksi jednom zauvijek riješeni.

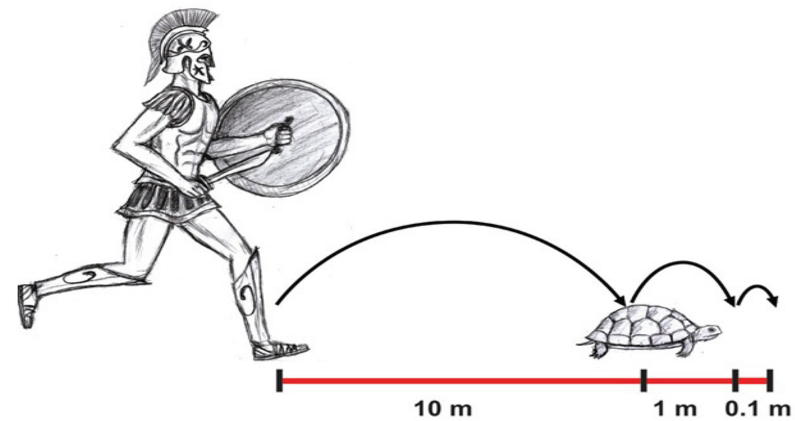
Cilj ovog rada je jasno pokazati kako rješenje Zenonovog paradoksa o Ahileju i kornjači ovisi o definiciji pojma beskonačnosti kao potencijalne i aktualne. Ukoliko se prihvati koncepcija aktualne beskonačnosti, Zenonovi izvodi i dalje ostaju paradoksalni. Oni ukazuju na nedostatnost matematičkog mišljenja pri opisivanju kategorija prostora i vremena.

2 Paradoks o Ahileju i kornjači i geometrijski redovi

U matematici i filozofiji često puta se može pronaći mišljenje da su Zenonovi paradoksi riješeni primjenom geometrijskih redova. Još je Arhimed, (287. - 212. pr. Kr.) pronašao metodu pomoću koje je moguće zbrojiti beskonačno mnogo članova niza čiji članovi geometrijski opadaju. Svoju metodu primjenio je na određivanje površine ispod parabole. Tako je površinu ispod odsječka parabole izračunao popunjavajući je sve manjim i manjim trokutima. Broj π Arhimed je aproksimirao opisujući oko kružnice i upisujući u kružnicu pravilne poligone. Računavši njihove površine dobio je vrlo preciznu aproksimaciju iznosa 3.14. U prethodno navedenim izračunima kriju se osnovne ideje infinitezimalnog računa. Upravo pomoću infinitezimalnog računa, preciznije geometrijskih redova, moguće je izračunati put koji prevali Ahilej dok sustigne kornjaču kao i vrijeme koje je za to potrebno.

Sam paradoks o Ahileju i kornjači, kao i druge Zenonove paradokse, zapisao je Aristotel u svojoj *Fizici*. Prema Aristotelu Zenonov izvod glasi [9]:

Ahil: "U utrci, najbrži trkač nikada ne može prestići najsporijeg, zato što gonitelj prvo mora doći do točke odakle je gonjeni pošao, pa prema tome najsporiji uvijek ima prednost." (Aristotel, Fizika VI:9, 239b15)



Slika 1. Utrka između brzog Ahileja i spore kornjače

Zenon je zamislio utrku između brzog Ahileja i spore kornjače (Slika 1). Pojednostavljeno, neka je kornjači dana prednost od 10 m nad Ahilejem te neka je Ahilej 10 puta brži od kornjače. Tada, dok Ahilej pretrči 10 m, kornjača prevali 1 m. Dok Ahilej pretrči taj 1 m, kornjača odšeće još 0.1 m. Dok Ahilej pretrči preostalih 0.1 m, kornjača se udalji još 0.01 m i tako dalje, sve do u beskonačnost. Čini se, dakle, da Ahilej nikada neće pretrčati kornjaču.

Zenonov Ahilej ipak će sustići kornjaču i to nakon što prevali 10 m i 1 m i 0.1 m i 0.01 m itd. Prevaljeni put može se zapisati kao beskonačni geometrijski red, čija se suma odredi matematičkom formulom:

$$10 + 1 + 0.1 + 0.01 + ... = \frac{10}{1 - 0.1} = \frac{10}{0.9} = \frac{100}{9} m$$

Prevaljeni put je, naravno, konačan i iznosi točno $\frac{100}{9}m$.

Pritom je i vrijeme potrebno da Ahilej dostigne kornjaču konačno. Neka je Ahilova brzina jednaka v. Tada je vrijeme u kojemu on prevali prvih 10 m jednako $t_1 = 10m/v$, slijedeći 1 m prijeđe za $t_2 = 1m/v$, preostali 0.1 m za $t_3 = 0.1m/v$ i tako dalje do u beskonačnost.

Ukupno vrijeme koje je Ahileju potrebno da sustigne kornjaču jednako je:

$$t_1 + t_2 + t_3 + ... = 10m/v + 1m/v + 0.1m/v + ... =$$

$$= \frac{1}{v}(10 + 1 + 0.1 + ...) = \frac{100}{9v}m$$

Prema tome, vrijeme potrebno da Ahilej sustigne kornjaču je konačno i iznosi $\frac{100}{9v}m$. Kako su dobiveni put i vrijeme konačni, na prvi pogled se čini da je problem riješen.

Međutim, daljnjim analiziranjem sume geometrijskog reda koja se svodi na limes niza parcijalnih suma, vidi se da rješenje ovisi o definiciji limesa niza ($n \to \infty$). Prethodno izračunati limesi ovisni su o Cauchyjevom poimanju limesa ($\varepsilon - \delta$ ili $\varepsilon - n_0$ tehnika). Kako pojam limesa sadrži pojam beskonačnosti, u njegovoj definiciji nužno je sadržana ideja beskonačnosti. Opisana beskonačnost koja se javlja u definiciji limesa je potencijalna beskonačnost. Limes niza se pritom shvaća kao vrijednost kojoj niz teži, ali je ne može nikada dostići ili aktualizirati. Koliko god konvergentni niz bio blizu svojoj graničnoj vrijednosti on je nikada stvarno ne dohvaća, iako mu se nalazi po volji blizu. Stoga i rješenje paradoksa pomoću geometrijskih redova ovisi o tumačenju potencijalne beskonačnosti. Ovdje se susreću dvije najznačajnije međusobno suprotne koncepcije beskonačnosti koje prožimaju čitavu povijest filozofije i matematike: potencijalna i aktualna beskonačnost.

3 Potencijalna i aktualna beskonačnost i paradoks o Ahileju i kornjači

Davno prije Newtona, Leibniza, Cauchya i Cantora problemom beskonačnosti bavili su se starogrčki filozofi u samim počecima razvoja filozofskog mišljenja. Pitanje beskonačnosti, neograničenosti, neizmjernosti u filozofiju je uveo starogrčki filozof Anaksimandar, (610. - 546. pr. Kr.), pripadnik Miletske škole, označivši prapočelo, grč. Nakon njega, problemom beskonačnosti bavili su se gotovo svi veliki starogrčki filozofi.

Tako je i vodeći starogrčki filozof Aristotel nastojao odgovoriti na pitanje postoji li uopće apeiron ili beskonačno? Ako beskonačno postoji, potrebno je protumačiti na koji način postoji? Prema Aristotelu očigledno je da beskonačno postoji. U prilog toj tvrdnji Aristotel iznosi nekoliko argumenata. Neke argumenate Aristotel preuzima iz matematike te ih iznosi u svojoj *Fizici*. Spomenuti argumenti odnose se na beskonačnu djeljivost te beskonačnost matematičkih veličina i brojeva:

“...drugo iz dijeljenja kolikoća, jer i matematičari upotrebljavaju beskonačnost...peto, u najvećoj mjeri i najistinskije zbog onoga što prouzrokuje svima zajedničku poteškoću, naime, otud što u mišljenju nema prestanka čini se da je beskonačan i broj i matematičke veličine...“
(Fizika III, 203 b 15-32.)

Aristotel iznosi i druge argumente poput beskonačnosti tijeka vremena i beskonačnosti procesa nastajanja i propadanja.

Za razumijevanje Aristotelovog učenja o beskonačnosti potrebno je objasniti neke temeljne pojmove njegove metafizike. Prema Aristotelu unutrašnja počela koja određuju svako biće su mogućnost (*potentiae*) i zbiljnost (*actus*). Mogućnost i zbiljnost nisu bića nego počela svakog bića. Pojednostavljeno, zbiljnost predstavlja ostvarenje ili perfekciju ili neko svojstvo koju neka stvar može postići. Primjerice, iz kamena se može načiniti kip. U kamenu je na neki način sadržan kip, ali samo u mogućnosti. Već načinjeni kip jest kip u zbiljnosti. Stoga mogućnost postoji, ali samo u odnosu na zbiljnost, na neko realno svojstvo ili sadržaj koje biće može aktualizirati. Svako biće se prema Aristotelu nalazi između mogućnosti i zbiljnosti. U tom smislu Aristotel shvaća i beskonačno na dva različita načina, kao potencijalno i aktualno beskonačno.

Aktualno beskonačno je nešto što je dovršeno i zaista načinjeno od beskonačno mnogo elemenata. Aktualno beskonačno predstavlja totalitet, jedinstvenu beskonačnu cjelinu koja aktualno ili zbiljski postoji kao beskonačna. Međutim, Aristotel smatra da beskonačnost postoji samo na potencijalan način:

"Beskonačnost biva samo po potenciji."
(Aristotel, Fizika III, 206 a 17)

Nastojavši detaljnije objasniti način postojanja potencijalne beskonačnosti Aristotel tvrdi da:

"Beskonačnost uopće postoji u smislu da se uzima uvijek drugo i opet drugo, a to što se uzima uvijek je ograničeno, ali i uvijek i opet različito."
(Aristotel, Fizika III, 206 a 27-29)

Prema tome potencijalnu beskonačnost treba shvatiti u smislu dodavanja uvijek novih i različitih dijelova ili dijeljenja na sve manje i manje dijelove. Pogrešna bi bila interpretacija potencijalne beskonačnosti kao potencijalne mogućnosti da iz konačnog nastane beskonačno, kao što iz kamena može nastati kip. Naime, beskonačnost nikada ne može biti aktualizirana.

Aristotelovo tumačenje potencijalne beskonačnosti u skladu je s poimanjem beskonačnosti skupa prirodnih brojeva $\mathbf{N}$. Naime, koliko god veliki prirodni broj $n \in \mathbf{N}$ bio izabran uvijek postoji veći i drugačiji, potpuno novi prirodni broj $n+1 \in \mathbf{N}$.

Također, u odnosu na beskonačnu djeljivost prostora i vremena, Aristotelova definicija potencijalne beskonačnosti u skladu je sa suvremenom Cauchyjevom definicijom limesa niza. Naime, bilo koja konačna veličina uvijek se može dijeliti na dva dijela. Na taj način dobije se $\frac{1}{2}$ te veličine. Zatim se $\frac{1}{2}$ veličine podijeli na dva dijela te se dobije $\frac{1}{4}$ veličine. Nadalje, prema Aristotelu ovaj postupak moguće je ponoviti proizvoljno mnogo puta. Time se, nakon ponavljanja, dobije proizvoljno malena veličina dimenzije $\frac{1}{2^n}$. Međutim, koliko god vrijednost $\frac{1}{2^n}$ bila mala, ona nikada neće biti jednaka nuli. Što znači da se proces dijeljenja prema Aristotelu nikada ne može dovršiti odnosno potpuno aktualizirati, što je unutar koncepcije potencijalne beskonačnosti potpuno logično. Naime, nije moguće aktualno ili stvarno načiniti beskonačno mnogo podjela.
U tom smislu nazire se i Aristotelovo riješenje Zenonovog paradoksa o Ahileju i kornjači. Naime, nije moguće zbiljski provesti beskonačnu diobu konačnog dijela prostora i vremena na sve manje i manje intervale oblika:

$$[0, 10m], [10m, 11m], [11m, 11.1m], [11.1m, 11.11m], ...$$

i

$$[0, 10m/v], [10m/v, 11m/v], [11m/v, 11.1m/v], [11.1m/v, 11.11m/v], ...$$

Beskonačna djeljivost prostora i vremena jest potencijalno beskonačna i kao takva ona nikada ne može biti aktualno ostvarena. Stoga nije ni moguća podjela intervala prostora i vremena na aktualno beskonačno mnogo dijelova. Aktualno beskonačno mnogo dijelova ne može prema Aristotelu ni postojati.

Na ovom mjestu sam Aristotel je veoma jasan:

"kad je prijeđena cijela crta, izlazi da je izbrojen beskonačan broj, što je po općem mnijenju nemoguće"
(Fiz. 263a9-11).

Aristotelova koncepcija potencijalne beskonačnosti odredila je razvoj matematičkih ideja. Prihvaćali su je matematičari i fizičari poput Newtona, Cauchya, Dedekinda i Weierstrassa. Spomenuti matematičari na matematički su način formalizirali Aristotelove ideje potencijalne beskonačnosti i pretočili je u definiciju limesa, derivacije ili integrala. U prethodnom poglavlju opisano je rješenje Zenonovih paradoksa pomoću geometrijskih redova.

Potpuno drugačiji smisao ima pojam aktualne beskonačnosti. Ideju aktualne beskonačnosti zastupali su brojni znanstvenici i filozofi poput Giordana Bruna, Galileo Galileia, Leibniza i Hegela. U matematiku aktualno beskonačno uvodi George Cantor sredinom 19. stoljeća u okviru svoje teorije skupova. Cantorove ideje potaknule su razvoj suvremene matematike. Ipak, aktualnu beskonačnost nije moguće iskustveno predočiti. Beskonačno kao beskonačno nadilazi sposobnost čovjekovog mišljenja koje je utemeljeno na iskustvenim činjenicama. Beskonačno kao takvo ostaje s druge strane čovjekove spoznaje. Kako je Aristotel ispravno uočio, čovjeku je moguće shvatiti samo potencijalnu beskonačnost čija se definicija oslanja na konačno.

Stoga, Zenonov paradoks u konačnici ovisi o poimanju beskonačnosti kao potencijalne i aktualne. Ako se beskonačna djeljivost konačnih dijelova prostora i vremena koja se javlja u paradoksu o Ahileju i kornjači pokuša interpretirati u smislu aktualne beskonačnosti paradoks i dalje vrijedi. Nije moguće zamisliti utrku koja bi se sastojala od aktualno beskonačno mnogo prostornih i vremenskih intervala.

Sam Zenonov paradoks o Ahileju i kornjači ukazuje na ograničenost čovjekovog mišljenja pri pokušaju matematičkog opisivanja prostora i vremena. Prostor i vrijeme sadrže neka svojstva koja čovjek nije u stanju do kraja misaono opisati. Zato su Zenonovi paradoksi i danas, nakon 2500 godina, ponovo aktualni.

4 Zaključak

U radu je pokazano kako se interpretacija rješenja Zenonovog paradoksa može promatrati sa dva stajališta ovisno o poimanju beskonačnosti u matematici. Beskonačna djeljivost prostora i vremena koja predstavlja jezgru Zenonovih argumenata može se protumačiti na dva različita načina. Prvi uključuje potencijalnu beskonačnost koja se primjenjuje u definiciji matematičkog pojma limesa. U tom smislu Zenonov paradoks svodi se na limes niza te je na taj način i riješen. Promatra li se beskonačnost kao aktualna beskonačnost uočava se da problem beskonačne djeljivosti prostora i vremena nije moguće predočiti. Matematičko mišljenje pokazuje se nedovoljnim za adekvatno rješenje problema. Time ključni Zenonov argument i dalje ostaje na snazi.

Literatura

[1] Herman Dils, *Pretsokratovci I, str. 208., 211. (izvodi iz Parmenidove poeme)*

[2] Damir Barbarić, *Grčka filozofija*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[3] Bertrand Russell, *Principi Matematike I*, 1903.

[4] ABRAHAM ROBINSON, *Non-Standard Analysis*, Princeton University Press, 1974.

[5] WILLIAM I. MCLAUGHLIN AND SYLVIA L. MILLER, *An Epistemological Use of Nonstandard Analysis to Answer Zeno's Objections against Motion, Synthese*, Vol. 92, No. 3, pp. 371.-384.

[6] VAN BENDEGEM, JEAN PAUL (1987)., *Discussion: Zeno's Paradoxes and the Tile Argument*, Philosophy of Science (Belgium) 54 (2): 295.-302.

[7] B. KOŽNJAK, *O problemu gibanja: Zenon, Aristotel, Heisenberg*, Iz: D. Barbarić (Ur.), *Aristotel i aristotelizam*, Zagreb, 85.-127., (2003.)

[8] W. I. MC LAUGHLIN, *Resolving Zeno's Paradoxes*, Scientific American, 84.-89., 1994.

[9] ARISTOTEL, *Fizika*, prijevod Tomislav Ladan, Zagreb, 1988.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Teselacije

Mina Šekularac
Matematička gimnazija, Beograd
minasekularac@hotmail.com

Aleksandar Pejčev, mentor
Mašinski fakultet Beograd
vpejcev@eunet.rs

Studentski rad

Apstrakt

Prisustvo različitih geometrijskih figura koje u pravilnom redu prekrivaju površine moguće je videti na podovima i zidovima mnogih arhitektonskih objekata i spomenika kulture. Ovako dobijene šare nastale preciznim uklapanjem geometrijskih oblika, bez međusobnog preklapanja i ostavljanja slobodnog prostora mogu se videti i na mozaicima, vitražima, kao i na šarama na posudama.

Ono što me je podstaklo na istraživanje u ovoj oblasti jeste saznanje da je formiranje površina pomoću geometrijskih šara, istraženo u matematičkoj oblasti nazvanoj *teselacije*. Pojam teselacije definisan je u matematici tek u XVII veku, iako se od antičkih dana čovek bavio geometrijskim figurama i njihovim kombinovanjem u cilju prekrivanja površina. Primena teselacija prisutna je na raznim meridijanima, u mnogim kulturama i kroz vremenske epohe polazeći od najjednostavnijih popločavanja pa do fantastičnih geometrijskih kombinacija, prateći određeni sled i dolazeći do istih logičkih obrazaca i istih rezultata. Jedan od razloga odabira ove teme je i njena univerzalnost u vremenu i prostoru. Danas se princip teselacije primenjuje u mnogim oblastima, u tekstilnoj industriji, pri izradi raznih dezena tekstila, u građevinarstvu, u dizajniranju elemenata podnih i zidnih obloga, u umetnosti, u mnogim naukama, u optici i kristalografiji. Teselacije su prisutne i u društvenim igrama, u dečijim igrama slagalica kao i u složenim kompjuterskim igricama. U kompjuterskoj grafici i u dizajnu danas se u velikoj meri primenjuju teselacije.

1 Uvod

Područje istraživanja u ovom radu predstavljaju teselacije koje su poznate jos od antičkog perioda, ali sam pojam *teselacije* i njegovu definiciju uveo je Kepler 1619. godine. Termin *teselacije*, predstavlja prekrivanje, odnosno popločavanje različitih površina geometrijskim oblicima, koji se ponavljaju bez međusobnog preklapanja i formiranja šupljina između sebe. Ovako složeni oblici stvaraju različite šare, raznih oblika i boja, koje se mogu videti na raznim mestima na popločavanju, mozaicima i vitražima. Ove teselacije nastale su u različitim epohama, na različitim mestima u svetu, iz estetskih ili spiritualnih razloga. Predmet istraživanja ovog rada obuhvata:

1. analizu i ispitivanje teselacija,
2. analizu teselacija kroz istoriju,
3. ispitivanje 1-uniformnih teselacija euklidske ravni,
4. primenu teselacija u savremenom životu.

Cilj istraživanja u ovom radu je:

1. teorijska analiza u smislu primene saznanja o teselacijama,
2. sagledavanje i utvrđivanje primene teselacija,
3. utvrđivanje široke primene teselacija u svim sferama savremenog života,
4. afirmacija teselacija kao poznate matematičke teorije, koja se primenjuje u mnogim disciplinama i iznova potvrđuje svoju aktuelnost.

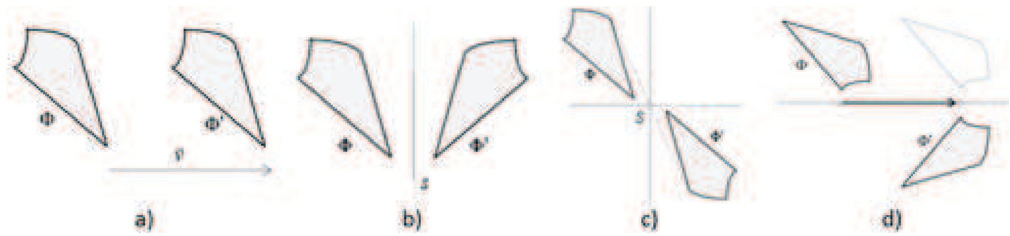
Za istraživanje u okviru rada o teselacijama korististene sledeće metode istraživanja:

1. analiza podataka iz prikupljene literature o ovoj problematici,
2. analiza prethodnih istraživanja u ovoj oblasti uz obradu podataka dobijenih prethodnim analizama i sistematizacijom podataka,
3. metoda zaključivanja iz prethodnih činjenica o opštem saznanju.

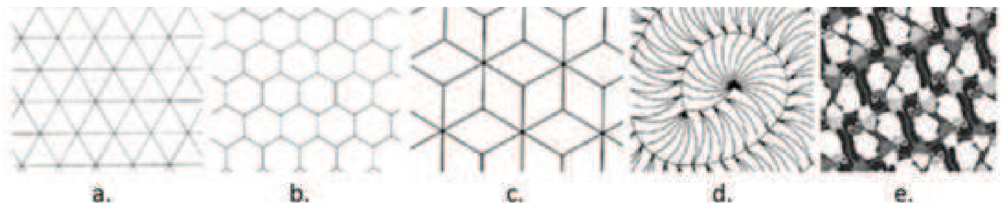
Rezultati istraživanja o teselacijama i njihovoj primeni u svakodnevnom životu biće prikazani kroz sumiranje i interpretaciju prethodnih saznanja i novih zaključaka do kojih se ovim istraživanjem došlo.

2 Rezultati istraživanja i diskusija

Reč teselacija potiče od jonske verzije grčke reči tesseres što znaći broj četiri. Analizirajući tekstove koji se bave ovom problematikom veoma često u istorijskim tekstovima prisutna je reč tessellate koja ima značenje popločavanja različitih površina pločicama kvadratnog oblika, kao kada se pravi mozaik. U istoriji arhitekture i umetnosti prva osmišljena popločavanja bila su upravo pločicama kvadratnog oblika. Pod terminom "popločavanje ravni" podrazumevamo prekrivanje ravni oblicima koji se po nekom pravilu ponavljaju tako da izmedu njih nema šupljina i da se oblici ne preklapaju. Geometrijske figure koje prave teselaciju



Slika 1: Primeri uklapanja pločica u teselacije korišćenjem:a) translacije,b) osne refleksije,c) centralne simetrije i d) klizajuće refleksije



Slika 2: Primeri monoedarskih teselacija: a. popločavanje pravilnim trouglom, b. popločavanje pravilnim šestouglom, c. popločavanje rombovima, d. spiralno monoedarsko popločavanje, e. popločavanje pločicama nepravilnog oblika.

nazvaćemo pločicama. Termin teselacije definišemo kao prebrojivi skup pločica, koji prekriva celu ravan i to tako da svaka tačka ravni pripada tačno jednoj pločici i da je mera preseka svake dve pločice jednaka nuli. Dve pločice zvaćemo susednim ako imaju zajedničku ivicu. Krajeve ivica zvaćemo zajedničkim temenima teselacije ili kraće temenima. Istraživanje u ovom radu baviće se teselacijama euklidske ravni gde je svaka ivica teselacije ujedno i cela ivica poligona te teselacije. Ovakve teselacije zovemo teselacije ivice na ivicu. Svakoj teselaciji euklidske ravni pridružićemo grupu njenih simetrija koja predstavlja sve izometrijske transformacije ravni. Te transformacije mogu biti: translacija, osna refleksija, centralna simetrija, rotacija i klizajuća refleksija (Slika 1.).

Kod popločavanja u euklidskoj i hiperboličkoj ravni set pločica je beskonačan, dok je kod teselacije sfera taj broj konačan. U ovom radu biće razmatrane samo teselacije euklidske ravni, pa će set pločica biti beskonačan.

3 Klasifikacija teselacija

Teselacije euklidske ravni kod kojih su sve pločice podudarne nazivamo monoedarskim teselacijama. Kod monoedarske teselacije sve pločice su istog oblika i iste veličine (Slika 2.)

Teselacije euklidske ravni kod kojih su sve pločice podudarne jednom od dva modela pločica T_1 i T_2 nazivamo diedarskim teselacijama. Ako je τ teselacija euklidske ravni sa pravilnim, konveksnim poligonima i ako je $S(\tau)$ grupa simetrija te teselacije takva da za bilo koja dva temena te teselacije postoji transformacija iz $S(\tau)$ koja preslikava jedno teme u drugo, teselaciju τ zvaćemo 1-uniformnom teselacijom. Ukoliko su sve pločice, odnosno poligoni, 1-uniformne teselacije međusobno jednaki, tj. poligoni podudarni, te teselacije zovemo pravilnim teselacijama. Kod pravilnih teselacija poligoni su uvek poređani na isti način oko jednog temena, prvo pišemo broj stranica poligona sa najmanjim brojem stranica, neka je to a, pa broj stranica poligona sa brojem stranica b, itd. Na ovaj način formiramo ciklični niz koji određuje to teme (a,b,c,d...x,y,z) i tu teselaciju u oznaci (a,b,c,d...x,y,z). Pravilnu teselaciju kod koje se poligon p pojavljuje k puta označavamo kao $(p, p, p...p, p)$ ili kraće (pk).

4 Istorijski pregled teselacija

Na području današnjeg Irana, oko 3500 godina pre naše ere, u preislamskom periodu, korišećne su pločice od uglačanog kamena i gline za pravljenje najrazličitijih šara i ornamenata. Ova umetnost ređanja pločica počinje da se širi na zapad, preko Egipta, Grčke, Rima, do Španije i današnje Britanije. Rimljani i stari Grci dekorisali su pločice koje su koristili za teselacije tako što su na njima slikali ljudske likove u elementima mozaika. Arapi su kombinacijom jednostavnih i jednobojnih pločica stvarali veoma složene geometrijske figure. Ova složena popločavanja kombinacijom od samo dve vrste pločica navode nas na zaključak da su Arapi bili sjajni matematičari, a da se o tome malo zna. Po uzoru na ove persijske geometrijske šare (Slika 3.) i na fasadama vizantijskih crkava pravljene su mnoge šare i ornamenti od opeke.

Arhimed $(287-212$ godine pre naše ere) se smatra prvim matematičarem koji je razmatrao slaganje poligona bez šupljina i preklapanja i tako postavio osnove za razvijanje ideja i principa teselacija. Spisi u kojima je on ovo izučavao nisu sačuvani, osim sačuvane i zabeležene prepiske sa aleksandrijskim matematičarima u kojoj je o ovome bilo reči. Trinaest polupravilnih poliedara, koji se mogu posmatrati kao teselacija sfere, po njemu su i nazvana Arhimedovim telima. Jedan od prvih sačuvanih matematičkih radova koji se bavio tesalacijama je rad nemačkog matematičara i astronoma Keplera (Johannes Kepler 1571 - 1630). On je 1619. godine izvršio potpunu numeraciju uniformnih teselacija euklidske ravni koja je i danas aktuelna. Naredna tri veka ovim izučavanjem niko se nije bavio i tek je Somervil (Sommerville 1879 - 1934) 1905. godine dokazao tačnost Keplerovog tvrđenja o postojanju tačno jedanaest uniformnih teselacija u euklidskoj ravni. Matematičaru Davidu Hilbertu (1862 - 1943) problem teselacija ravni se u početku činio neinteresantnim. On se u svom delu iz 1900. godine bavio isključivo popločavanjem u prostorima sa tri i više dimenzija. Kasnije je Hilbert uvideo da je problem dvodimenzionalnih teselacija daleko od trivijalnog. Matematičari Hao Wang, Robert Berger, Donald Knuth i Roger Penrose takođe su se bavili problematikom teselacija u drugoj polovini i krajem XX veka.

Slika 3: Primeri teselacija - Persijske geometrijske šare; popločavanje podova i oblaganje zidova keramičkim pločicama i oblaganje kupola mozaicima

5 1-uniformne teselacije euklidse ravni

Teorema 5.1. Postoji tačno 11 1-uniformnih teselacija euklidse ravni: 3 pravilne monoedarske teselacije, 6 pravilnih diedarskih teselacija i 2 pravilne teselacije sa tri pravilna mnogougla.

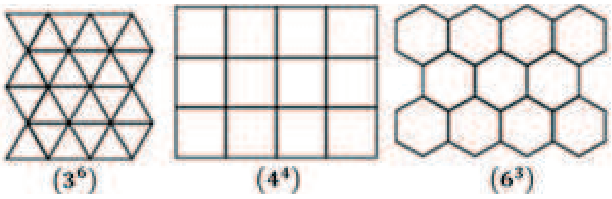
6 Pravilne monoedarske teselacije

Lema 6.1. Postoje tačno 3 pravilne monoedarske teselacije: sa 6 pravilnih trouglova, sa 4 pravilna četvorougla i sa 3 pravilna šestougla.

Dokaz 6.1. Predpostavimo da k pravilnih mnogouglova, sa n stranica, i sa jednim zajedničkim temenom obrazuju teselaciju τ. Po uslovima teselacija da između mnogouglova ne postoji šupljina, niti preklapanje može se zaključiti da je zbir unutrašnjih uglova tih k mnogouglova jednak 2π. S obzirom da je mera unutrašnjeg ugla pravilnog mnogougla jednaka:

$\varphi = \frac{n-2}{n}\pi$, onda je:

$k \cdot \varphi = \frac{n-2}{n}\pi \cdot \kappa$



Slika 4: Pravilne monoedarske teselacije

$2\pi = \frac{n-2}{n}\pi \cdot k$

$k = 2 \cdot \frac{n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$

$k, n \in N \Rightarrow n-2|4 \Rightarrow n \in \{3,4,6\} \Rightarrow (n,k) \in \{(3,6)(4,4)(6,3)\}$

7 Pravilne diedarske teselacije

Lema 7.1. Postoji 8 načina popločavanja prostora oko tačke sa dve vrste pravilnih mnogouglova.

Analiziranjem svih pravilnih mnogouglova sa zajedničkim temenom bez međusobnog preklapanja i bez šupljina između njih, i to k_1 mnogouglova sa n_1 stranica i k_2 mnogouglova sa n_2 stranica, dolazi se do uslova da je zbir svih unutrašnjih uglova svih mnogouglova jednak 2π.

$2\pi = \frac{n_1-2}{n_1}\pi \cdot k_1 + \frac{n_2-2}{n_2}\pi \cdot k_2$

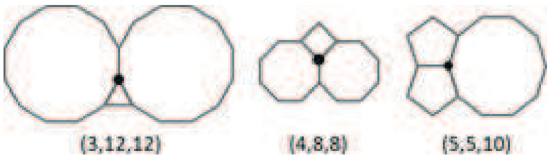
$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot k_1 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot k_2$

Pri čemu važi $k_1, k_2, n_1, n_2 \in N$ i $n_1, n_2 \geqslant 3$ i iz prvog dokaza može se zaključiti da ukoliko je n najmanje moguće onda je k=6, a najmanje k je k=3; ukoliko bi k bilo 2 onda to ne bi mogao da bude pravilan mnogougao, pa je $3 \leqslant k_1 + k_2 \leqslant 6$. Ali slučaj kada je $k_1 + k_2 = 6$ se ne razmatra jer bi onda $n_1 = n_2 = 3$. I slučaj kada je $n_1 = n_2$ je takođe razmatran u prvom dokazu. Pa će biti razmatrani sledeći slučajevi:

$k_1 = 1$ i $k_2 = 2$ ili $k_1 = 2$ i $k_2 = 1$
$k_1 = 1$ i $k_2 = 3$ ili $k_1 = 3$ i $k_2 = 1$
$k_1 = 1$ i $k_2 = 4$ ili $k_1 = 4$ i $k_2 = 1$
$k_1 = 2$ i $k_2 = 2$
$k_1 = 2$ i $k_2 = 3$ ili $k_1 = 3$ i $k_2 = 2$

$\mathbf{k_1 = 1}$ **i** $\mathbf{k_2 = 2}$ **ili** $\mathbf{k_1 = 2}$ **i** $\mathbf{k_2 = 1}$

$k_1 = 1$ i $k_2 = 2$



Slika 5: Teselacije kada je $k_1 = 1$i $k_2 = 2$

Slika 6: Teselacija kada je $k_1 = 1$ i $k_2 = 4$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 2$

$n_1 = \frac{2 \cdot n_2}{n_2 - 4} = 2 + \frac{8}{n_2 - 4}$

$k_1, k_2, n_1, n_2 \in N$ i $n_2 \geq 3 \Rightarrow n_2 - 4 | 8 \Rightarrow n_2 \in \{3, 5, 6, 8, 12\} \Rightarrow$

$(n_1, n_2) \in \{(3, 12)(4, 8), (6, 6), (10, 5)\}$i slučaj kada je $n_1 = n_2$ je već razmatran.

Rešenja su ista kao i pod a (nema novih rešenja).

$\mathbf{k_1 = 1}$ i $k_2 = 3$ ili $k_1 = 3$ i $k_2 = 1$

$k_1 = 1$ i $k_2 = 3$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 3$

$n_1 = \frac{n_2}{n_2 - 3} = 1 + \frac{3}{n_2 - 3}$

$k_1, k_2, n_1, n_2 \in N$ i $n_2 \geq 3 \Rightarrow n_2 - 3 | 3 \Rightarrow n_2 \in \{4, 6\} \Rightarrow$

$(n_1, n_2) \in \{(4, 4)(2, 6)\}$ i slučaj kada je $n_1 = n_2$ je već razmatran i $n_1 \geq 3$.

Rešenja su ista kao i pod a (nema novih rešenja).

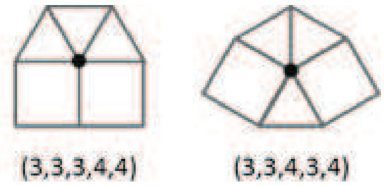
$\mathbf{k_1 = 1}$ i $\mathbf{k_2 = 4}$ ili $\mathbf{k_1 = 4}$ i $\mathbf{k_2 = 1}$

$k_1 = 1$ i $k_2 = 4$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 4$

$n_1 = \frac{2 \cdot n_2}{3 \cdot n_2 - 8}$

$k_1, k_2, n_1, n_2 \in N$ i $n_1 \geq 3 \Rightarrow \frac{2 \cdot n_2}{3 \cdot n_2 - 8} \geq 3$



Slika 7: Teselacija kada je $k_1 = 2$ i$k_2 = 2$

$n_2 \leq \frac{24}{7}$

$n_2 = 3i n_1 = 6$
$\mathbf{k_1 = 2}$ i $\mathbf{k_2 = 2}$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 2 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 2$

$1 = 1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2}$

$n_1 = \frac{2 \cdot n_2}{n_2 - 2} = 2 + \frac{4}{n_2 - 2}$

$k_1, k_2, n_1, n_2 \in N$ i $n_2 \geq 3 \Rightarrow n_2 - 2|4 \Rightarrow n_2 \in \{3, 4, 6\} \Rightarrow$

$(n_1, n_2) \in \{(6, 3)\}, (4, 4)(3, 6)\}$ i slučaj kada je $n_1 = n_2$ je već razmatran ,i kako je $k_1 = k_2$ onda se razmatrajun svi slučajevi.

$\mathbf{k_1 = 2}$ i $\mathbf{k_2 = 3}$ ili $\mathbf{k_1 = 3}$ i $\mathbf{k_2 = 2}$

$k_1 = 2$ i $k_2 = 3$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 2 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 3$

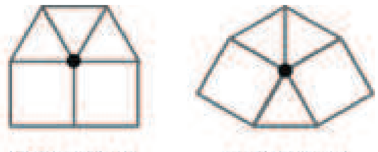
$n_1 = \frac{4 \cdot n_2}{3 \cdot n_2 - 6} = 1 + \frac{n_2 + 6}{3 \cdot n_2 - 6}$

$k_1, k_2, n_1, n_2 \in N$ i $n_1 \geq 3 \Rightarrow \frac{n_2 + 6}{3 \cdot n_2 - 6} \geq 2$

$n_2 \leq \frac{18}{5}$

$n_2 = 3$ i $n_1 = 4$

Rešenja su ista kao i pod a (nema novih rešenja).



Slika 8: Teselacije kada je $k_1 = 2$ i$k_2 = 3$

8 Pravilne teselacije sa tri vrste pravilnih mnogouglova

Lema 8.1. Postoji tačno 10 načina popločavanja prostora oko tačke sa tri vrste pravilnih mnogouglova.

Analiziranjem svih pravilnih mnogouglova sa zajedničkim temenom bez međusobnog preklapanje i bez šupljina između njih, i to k_1 mnogouglova sa n_1 stranica, k_2 mnogouglova sa n_2 stranica i k_3 mnogouglova sa n_3 stranica, dolazi se do uslova da je zbir svih unutrašnjih ugova svih mnogouglova jednak 2π.

$$2\pi = \frac{n_1-2}{n_1}\pi \cdot k_1 + \frac{n_2-2}{n_2}\pi \cdot k_2 + \frac{n_3-2}{n_3}\pi \cdot k_3$$

$$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot k_1 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot k_2 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot k_3$$

Pri čemu važi $k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in Nin \geq 3$ i iz prvog dokza može se zaključiti da ukoliko je n najmanje moguće onda je$k = 6$, a najmanje k je$k = 3$, ukoliko bi k bilo 2 onda to ne bi mogao da bude pravilan mnogougao,pa je $3 \leq k_1 + k_2 + k_3 \leq 6$. Slučaj kada je $k_1 + k_2 + k_3 = 6$ se ne razmatra jer bi onda $n_1 = n_2 = n_3 = 3$.Razmatrani će biti sledeći slučajevi:

$k + 1, k_2 = 1$ i $k_3 = 1$

$k_1 = 1, k_2 = 1$ i $k_3 = 2$ ili $k_1 = 1, k_2 = 2$ i $k_3 = 1$ ili $k_1 = 2, k_2 = 1$ i$k_3 = 1$

$k_1 = 1, k_2 = 1$ i $k_3 = 3$ ili $k_1 = 1, k_2 = 3$ i $k_3 = 1$ ili $k_1 = 3, k_2 = 1$ i $k_3 = 1$

$k_1 = 1, k_2 = 2$ i $k_3 = 2$ ili $k_1 = 2, k_2 = 2$ i $k_3 = 1$ ili $k_1 = 2, k_2 = 1$ i $k_3 = 2$

$\mathbf{k_1 = 1, k_2 = 1}$ **i** $\mathbf{k_3 = 1}$

$$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$$

$k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in N$ i ne umanjujući opštost predpostavimo da važi $3 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3$

$n_1 = 3$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$

$n_3 = \frac{6n_2}{n_2-6} = 6 + \frac{36}{n_2-6}$

$k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in N$ i $n_2 \geq 7 \Rightarrow n_2{-}6|36\, n_2 \in \{7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42\} \Rightarrow$

$(n_2, n_3) \in \{(7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15), (12, 12), (15, 10), (18, 9)(24, 8)(42, 7)\}$
i kako je po predpostavci $n_2 < n_3$ onda se razmatraju sledeći clučajevi:

$(n_1, n_2, n_3) \in \{(3, 7, 42), (3, 8, 24)(3, 9, 18)(3, 10, 15)\}$
$n_1 = 4$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$

$n_3 = \frac{4n_2}{n_2-4} = 4 + \frac{16}{n_2-4}$

$k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in N$ i $n_2 \geq 5 \Rightarrow n_2 - 4|16 \Rightarrow n_2 \in \{5, 6, 8, 12, 20\} \Rightarrow$

$(n_2, n_3) \in \{(5, 20), (6, 12), (8, 8), (12, 6), (20, 5)\}$ i kako je po pretpostavci $n_2 <$
n_3 onda se razmatraju sledeći slučajevi:$(n_1, n_2, n_3) \in \{(4, 5, 20), (4, 16, 20)\}$

$n_1 = 5$

$\frac{3}{10} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$

$n_3 = \frac{10n_2}{3n_2-10}$

$k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in N$ i $n_2 > n_1 = 5$

$n_2 = 6 \Rightarrow n_3 \notin N$

$n_2 = 7 \Rightarrow n_3 \notin N$

$n_2 \geq 8 \Rightarrow n_2 > n_3$

Tako da nema rešenja za $n_1 = 5$

$n_1 = 6$

Ukoliko su n_2 i n_3 najmanja moguća onda je:

$\frac{1}{2} > \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

Tako da nema rešenja za $n_1 \geq 6$.

$\mathbf{k_1 = 1, k_2 = 1}$, i $\mathbf{k_3 = 2}$ ili $\mathbf{k_1 = 1, k_2 = 1}$, i $\mathbf{k_3 = 1}$ ili $\mathbf{k_1 = 2, k_2 = 1}$, i $\mathbf{k_3 = 1}$

$k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in N$ i ne umanjujući opštost predpostavimo da važi $3 \leq n_1 < n_2 < n_3$

$k_1 = 1$, $k_2 = 1$ i $k_3 = 2$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot 2$

$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{2}{n_3}$

$n_1 = 3$

$\frac{2}{3} = \frac{1}{n_2} + \frac{2}{n_3}$

$n_3 = \frac{6n_2}{2n_2-3} = 3 + \frac{9}{2n_2-3}$

$k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in N$ i $n_2 \geq 3 \Rightarrow 2n_2 - 3|9 \Rightarrow n_2 \in \{3, 6\} \Rightarrow$
$(n_2, n_3) \in \{(3, 6), (6, 4)\}$ i kako je $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ onda nema rešenja.

$n_1 = 4$

Ukoliko su n_2 i n_3 najmanja moguća onda je:

$1 > \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6}$

Tako da nema rešenja za $n_1 \geq 4$.

$k_1 = 1$, $k_2 = 2$ i $k_3 = 1$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 2 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot 1$

$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$

$n_1 = 3$

$\frac{2}{3} = \frac{2}{n_2} + \frac{1}{n_3}$

$n_2 = \frac{6n_3}{2n_3-3} = 3 + \frac{9}{2n_3-3}$

$k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in N$ i $n_3 \geq 3 \Rightarrow 2n_3 - 3|9 \Rightarrow n_3 \in \{3, 6\} \Rightarrow$
$(n_2, n_3) \in \{(6,3), (4,6)\}$ i kako je $n_2 \leq n_3$ onda se ne razmatraju svi slučajevi.

$n_1 = 4$

Ukoliko su n_2 i n_3 najmanja moguća onda je:

$1 > \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6}$

Tako da nema rešenja za $n_1 \geq 4$.

$k_1 = 2$, $k_2 = 1$ i $k_3 = 1$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 2 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot 1$

$1 = \frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$

$n_1 = 3$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$

$n_3 = \frac{3n_2}{n_2-3} = 3 + \frac{9}{n_2-3}$

$k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in N$ i $n_2 \geq 3 \Rightarrow n_2 - 3|9 \Rightarrow n_2 \in \{4, 6, 12\} \Rightarrow$
$(n_2, n_3) \in \{(4, 12), (7, 6)(12, 4)\}$ i kako je $n_2 \leq n_3$ ostali slučajevi se ne razmatraju.

$n_1 = 4$

Ukoliko su n_2 i n_3 najmanja moguća onda je:

$1 > \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

Tako da nema rešenja za $n_1 \geq 4$.

$\mathbf{k_1 = 1, k_2 = 1}$, i $\mathbf{k_3 = 3}$ ili $\mathbf{k_1 = 1, k_2 = 3}$, i $\mathbf{k_3 = 1}$ ili $\mathbf{k_1 = 3, k_2 = 1}$, i $\mathbf{k_3 = 1}$

$k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in N$ i ne umanjujući opštost pretpostavimo da važi $3 \leq n_1 < n_2 < n_3$

$k_1 = 1$, $k_2 = 1$ i $k_3 = 3$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot 3$

$\frac{3}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{3}{n_3}$

Tako da nema reššenja.

$k_1 = 1$, $k_2 = 3$ i $k_3 = 1$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 3 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot 1$

$\frac{3}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{3}{n_3}$

$n_1 = 3$ i kada su ostala dva n najmanja moguća onda je:
$\frac{3}{2} > \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5}$

Tako da nema rešenja.

$k_1 = 3$, $k_2 = 1$ i $k_3 = 1$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 3 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot 1$

$n_1 = 3$ i kada su ostala dva n najmanja moguća onda je:

$\frac{3}{2} > \frac{3}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

Tako da nema rešenja.

$\mathbf{k_1 = 1, k_2 = 2}$, i $\mathbf{k_3 = 2}$ ili $\mathbf{k_1 = 2, k_2 = 2}$, i $\mathbf{k_3 = 1}$ ili $\mathbf{k_1 = 2, k_2 = 1}$, i $\mathbf{k_3 = 2}$

$k_1, k_2, k_3, n_1, n_2, n_3 \in N$ i ne umanjujući opštost pretpostavimo da važi $3 \leq n_1 < n_2 < n_3$

$k_1 = 1$, $k_2 = 2$ i $k_3 = 2$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 2 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot 2$

$\frac{3}{2} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{3}{n_3}$

$n_1 = 3$ i kada su ostala dva n najmanja moguća onda je:

$\frac{3}{2} > \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5}$

Tako da nema rešenja.

$k_1 = 2$, $k_2 = 2$ i $k_3 = 1$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 2 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 2 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot 1$

$\frac{3}{2} = \frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{1}{n_3}$

$n_1 = 3$ i kada su ostala dva n najmanja moguća onda je:

$\frac{3}{2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5}$

Tako da nema rešenja.

$k_1 = 2$, $k_2 = 1$ i $k_3 = 2$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 2 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot 2$

$n_1 = 3$ i kada su ostala dva n najmanja moguća onda je:

$\frac{3}{2} > \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$

Tako da nema rešenja.

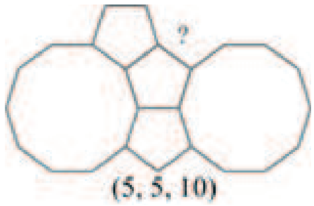
9 Pravilne teselacije sa četiri i više vrsta pravilnih mnogouglova

Lema 9.1. Ne postoje pravilne teselacije sa 4 i više vrsta pravilnih mnogouglova.

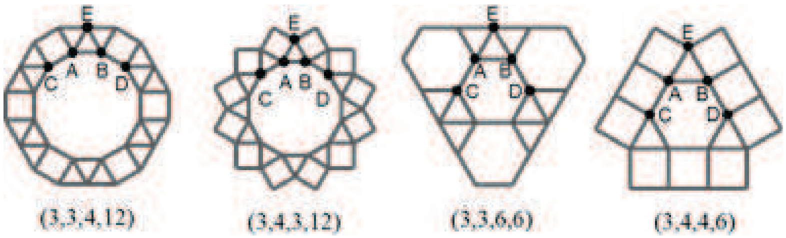
Analiziranjem svih pravilnih mnogouglova sa zajedničkim temenom bez međusobnog preklapanje i bez šupljina između njih, i to k_1 mnogouglova sa n_1 stranica, k_2 mnogouglova sa n_2 stranica, k_3 mnogouglova sa n_3 stranica i k_4 mnogouglova sa n_4 stranica, dolazi se do uslova da je zbir svih unutrašnjih ugova svih mnogouglova jednak 2π.

$2\pi = \frac{n_1-2}{n_1}\pi \cdot k_1 + \frac{n_2-2}{n_2}\pi \cdot k_2 + \frac{n_3-2}{n_3}\pi \cdot k_3 + \frac{n_4-2}{n_4}\pi \cdot k_4$

$2 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot k_1 + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot k_2 + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot k_3 + \left(1 - \frac{2}{n_4}\right) \cdot k_4$



Slika 9: Grafički prikaz jednog slučaja iz Grupe I



Slika 10: Grafički prikaz slučajeva iz Grupe II

Pri čemu važi $k_1, k_2, k_3, k_4, n_1, n_2, n_3, n_4 \in N$ i $n \geq 3$ i $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$. Desna strana izraza je minimalna kada su $k_1, k_2, k_3, k_4, n_1, n_2, n_3, n_4$ najmanji mogući i jednaka je:

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot 1+\left(1-\frac{2}{4}\right)\cdot 1+\left(1-\frac{2}{5}\right)\cdot 1+\left(1-\frac{2}{6}\right)\cdot 1=\frac{21}{10}$$

tako da je on uvek veći od 2. Desna strana izraza bila bi još veća da ima više od četiri vrste pravilnih mnogouglova, tako da ne postoje pravilne teselacije sa 4 i više vrsta pravilnih mnogouglova.

10 Teselacije ravni

Teorema: Postoji tačno 11 teselacija ravni pravilnim mnogouglovima. Dokaz teoreme: Postoji 21 način popločavanja ravni oko tačke. Ova popločavanja treba podeliti u 3 grupe:

Grupa I: $(3,7,42),(3,8,24),(3,9,18),(3,10,15),(5,4,20),(5,5,10)$.

Grupa II: $(3,3,4,12),(3,3,6,6),(3,4,3,12),(3,4,4,6)$.

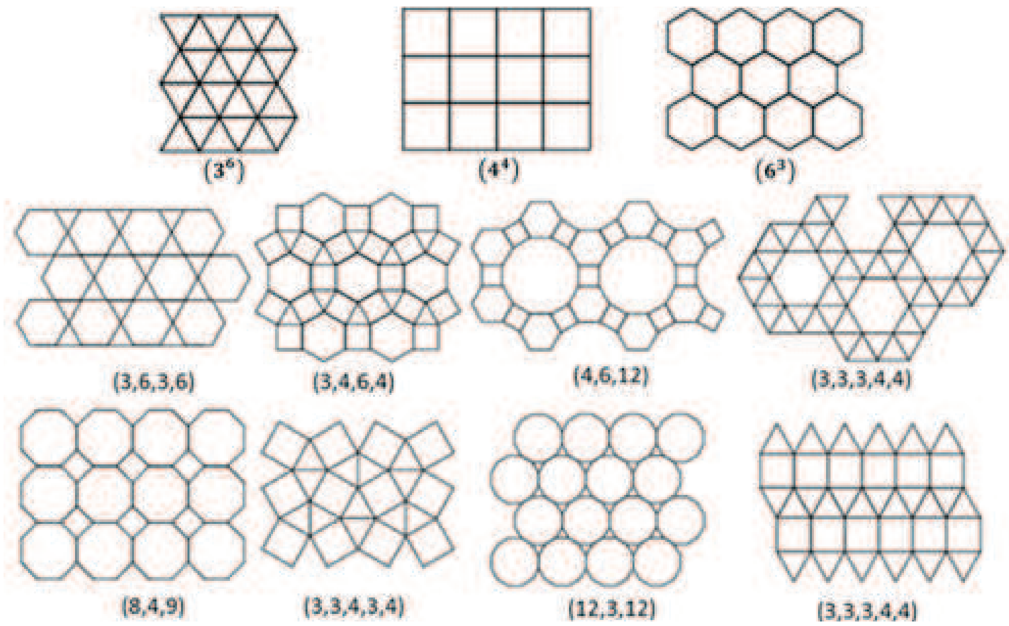
Grupa III: $(3,12,12),(4,6,12),(4,8,8),(6,6,6),(3,4,6,4),(3,6,3,6)$, $(4,4,4,4),(3,3,3,3,6),(3,3,3,4,4),(3,3,4,3,4),(3,3,3,3,3,3)$.

Grupa I

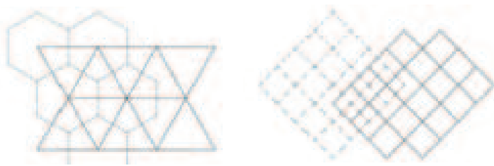
Kod Grupe I n_1 je neparno, $n_2 \neq n_3$ i $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, u jednoj tački će biti $k_1 = 1, k_2 = 2$ i $k_3 = 0$ i doći će do međusobnog preklapanja ili do stvaranja šupljina (Slika 9.).

Grupa II

Grafički prikaz svih popločavanja prostora oko tačke Grupe II (Slika 10.).



Slika 11: Grafički prikaz svih pravilnih 1-uniformnih teselacija ravni



Slika 12: Međusobno dualne pravilne teselacije (3^6) i (6^3) i pravilna teselacija (4^4) dualna sama sebi

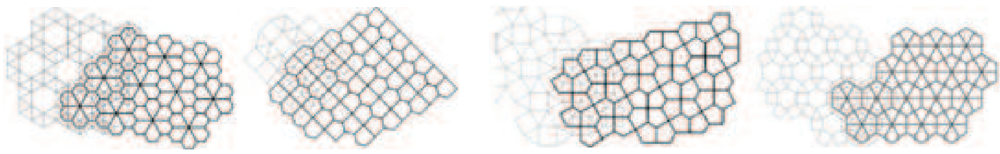
Tačke A, B, C, D imaju isti način popločavanja prostora oko tačke, a tačka E ima na drugi način poređane mnogouglove pri popločavanju prostora i zato ovi slučajevi ne pripadaju teselacijama.

Grupa III

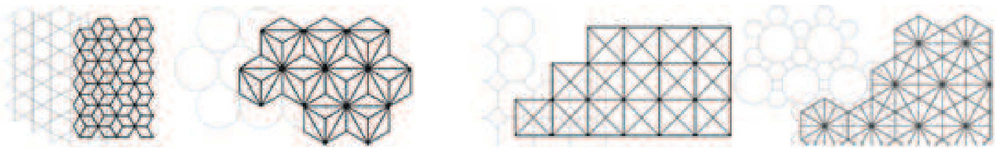
Grupi III pripadaju sve pravilne 1-uniformne teselacije (Slika 11.).

11 Dualnost teselacija

Za dva popločavanja kažemo da su međusobno dualna ako postoji bijekcija koja preslikava težišta, ivice i temena pločica jednog popločavanja redom u temena, ivice i težišta pločica drugog popločavanja (Slika 12, Slika 13, Slika 14.). Svako 1-uniformno popločavanje ima svoje dualno popločavanje.



Slika 13: Teselacije $(3^4, 6), (3^3, 4^2)$, $(3^2, 4, 3, 4)i(3, 4, 6, 4)$ i njihove dualne teselacije



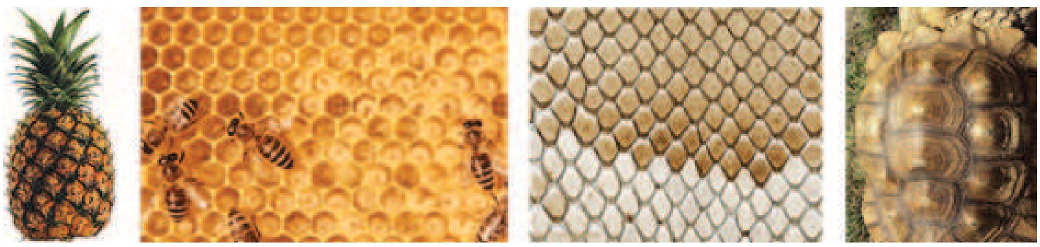
Slika 14: Teselacije $(3, 6, 3, 6), (3, 12^2)$, $(4, 8^2)i(4, 6, 12)$ i njihove dualne teselacije

12 Postojanje teselacija u svetu oko nas

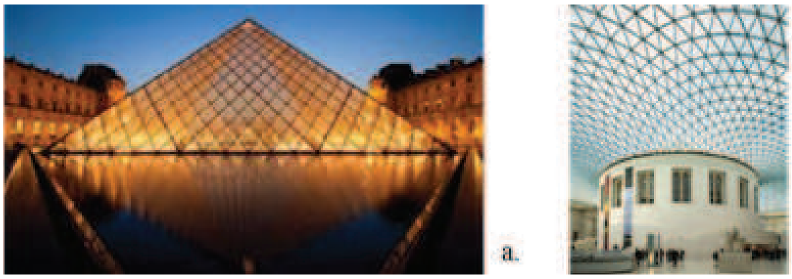
Teselacije su prisutne svuda oko nas. Analizirajući prirodu uviđamo površine koje se sastoje od različitih pločica (površina) postavljenih jedna do druge bez međusobnog preklapanja i bez šupljina između njih. Prisustvo teselacija u živom svetu govori o njihovom postojanju i bez uticaja čoveka. Postojanje teselacija u prirodi po ko zna koji put potvrđuje njeno savršenstvo i mogućnost stvaranja savršenih oblika i formi bez uticaja čoveka i njegovog intelekta.

12.1 Postojanje teselacija u prirodi

U živom svetu pojava teselacija najčešće se uočava na pčelinjem saću, čija slika nije ništa drugo do pravilna monoedarska teselacija šestouglovima. Teselacija je prisutna u svetu botanike na primeru kore ananasa. U svetu zoologije teselacija je uočljiva i na koži zmije i na oklopu kornjače (Slika 15.).



Slika 15: Postojanje teselacija u prirodi - kora ananasa, pčelinje saće, zmijska koža i oklop kornjače



a. b.

Slika 16: Primena teselacija u arhitekturi i građevinarstvu

12.2 Postojanje teselacija u arhitekturi i umetnosti

Teselacije su prisutne u arhitekturi. Na zidovima, fasadama, kupolama i podovima mnogih arhitektonskih zdanja neretko susrećemo geometrijske oblike koji svojim izgledom, geometrijskom kompozicijom predstavljaju primere teselacije. Šare dobijene preciznim uklapanjem geometrijskih oblika u vidu pločica, mogu se videti i na mozaicima i vitražima. Primeri teselacija u arhitekturi nastali su 3500 godina pre naše ere, u preislamskom periodu, kada su na području damašnjeg Irana korišćene pločice od uglačanog kamena i gline za pravljenje najrazličitijih šara i ornamenata. Uticaj umetnosti formiranja šara ređanjem pločica širio se svetom. I danas u Egiptu, Grčkoj, Rimu, u arapskom svetu i celoj Zapadnoj Evropi možemo videti primere popločavanja i šara na zidovima utemeljenim na principu teselacije. Savremena arhitektonska dela svedoče o aktuelnosti teselacija. U modernim arhitektonskim objektima teselacija je prisutna i na fasadama i krovnim konstrukcijama velikih raspona (Slika 16.).

Prisustvo različitih geometrijskih figura koje u pravilnom redu prekrivaju površine moguće je videti i danas na podovima i zidovima mnogih arhitektonskih objekata (Slika 17.) i spomenika kulture.

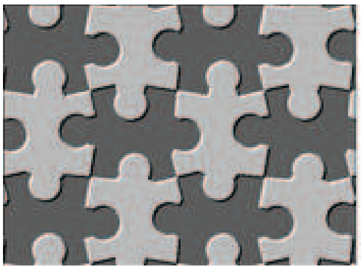
12.3 Primena teselacija u dečijim igrama

Teselacije su prisutne i u društvenim igrama, u dečijim igrama slagalica (puzzle), i u kompjuterskim igricama, kao što je popularni Tetris (Slika 18.).

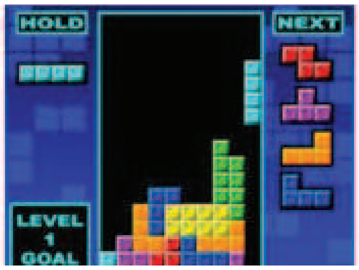
12.4 Primena teselacija u savremenim tehnologijama

U kompjuterskoj grafici i u dizajnu danas se u velikoj meri primenjuju teselacije. Zadatu površinu moguće je podeliti na geometrijske oblike i na taj način omogućiti osnovu za dalje korišćenje ove površine u animaciji ili drugoj potrebnoj grafici. Površina svakoga ekrana podeljena je kvadratnom mrežom na veliki broj identičnih pločica koje nazivamo pikselima čija veličina utiče na oštrinu i preciznost slike (Slika 19.).

Slika 17: Primeri teselacija različitih geometrijskih figura prisutnih na zidovima i podovima

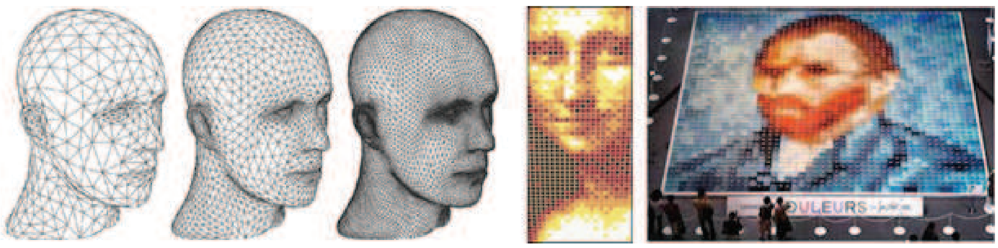


a.

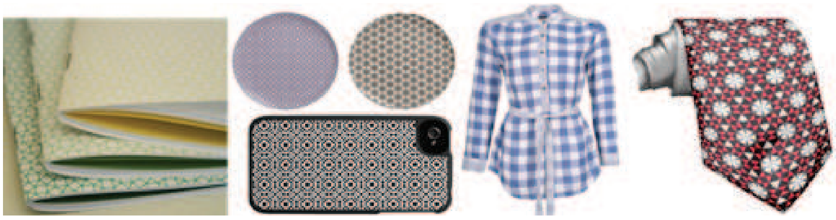


b.

Slika 18: Pravilne monoedarske teselacije u dečjim igrama: a. Puzzle, b. Tetris



Slika 19: Primena teselacije u digitalnoj animaciji i kompjuterskoj grafici



Slika 20: Prisustvo teselacija na predmatima za svakodnevnu upotrebu

12.5 Primena teselacija u svakodnevnom životu

Po principu teselacije urađene su i šare na posudama koje su se nekada koristile u svakodnevnom životu. Princip teselacije se primenjuje u mnogim industrijama, na primer u tekstilnoj industriji, pri izradi raznih dezena, u građevinarstvu, u dizajniranju elemenata podnih i zidnih obloga. Zbog svoje jednostavnosti, ali i savršenosti, tesalacije imaju široku primenu u savremenom svetu i to u dizajniranju industrijskih predmeta široke potrošnje: od ambalaže, preko modne industrije, do predmeta za svakodnevnu upotrebu (Slika 20.).

13 Zaključak

Istraživanja o tesalacijama su stara vekovima. Pored teoriskog i praktičnog značaja u matematici, teselacije se sreću u prirodi, u umetnosti, u arhitekturi i građevinarstvu, ali i u digitalnoj umetnosti i savremenoj grafici. Matematika je nauka u kojoj ne postoje ograni čenja. Geometrija predstavlja jednu od osnovnih oblasi matematike i njenom istraživanju nema kraja, kao što nema kraja ni mogućnostima kombinovanja geometrijskih figura i načina prekrivanja različitih površina geometriskim figurama, koje se ponavljaju bez međusobnog poklapanja i formiranja šupljina između njih. Teselacijma nema granica ,pa samim tim ni granica mogućnostima geometrije i matematike. Teselacije svedoče o jedinstvu postojeće veze između matematike i prirode , kao i neraskidive veze između životinjskog sveta, istorije umetnosti i savrenmenih thenologija. Danas je teselacija prisutna svuda oko nas, od sačuvanih šara na mozaicima antičkog sveta do najsitnijeg piksela na monitoru našeg računra.

Literatura

[1] Z. Ličić, Euklidska i hiperbolička geometrija, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1997.

[2] M. Mirtović, M. Veljković, S. Ognjanović, Lj. Petković, N. Lazarvić: Geometrija, za prvi razred Matematičke gimnazije, Krug Beograd, Beograd, 2006.

[3] Tangenta - časopis za matematiku i računarstvo, 21. br, Beograd, 2000.

[4] http//mathworld.wolfram.com /Tessellation.html (dostupno januara 2014.)

[5] http//probabilitysports.com/tilings.html (dostupno januara 2014.)

[6] http//www.uwgb.edu/dutchs/symettry/uniftil.html (dostupno januara 2014.)

[7] htpp//mathworld.wolfram.com/ DualTessallation.html (dostupno januara 2014.)

[8] htpp//mathworld.wolfram.com/SemiregularTessallatio.html (dostupno januara 2014.)

[9] htpp//mathworld.wolfram.com/RegularTessallatio.html (dostupno januara 2014.)

[10] http//edtech2.boisestate.edu/meganhoopesmyers/502/virtualtour/history.html (dostupno januara 2014.)

[11] http//jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.2003.fall/Thomas/Tessallation20 project/History/html (dostupno januara 2014.)

[12] http//www.mathartfun.com/shopsite-sc/store/html/Profiles.html (dostupno januara 2014.)

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Jedna aproksimacija Katalanovih brojeva

Jelena Kljajić
Filozofski fakultet, Univerzitet u I. Sarajevu
jelena-kljajic@ymail.com

Vidan Govedarica
Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u I. Sarajevu
vidangov@yahoo.com

Stručni rad

Apstrakt

Katalanovi brojevi predstavljaju niz prirodnih brojeva koji se javljaju kao rješenje mnogobrojnih kombinatornih problema. U ovom radu ćemo odrediti dobre aproksimacije niza Katalanovih brojeva, i sa donje i sa gornje strane, pogodno odabranim nizovima iz iste klase.

1 Uvod

Belgijski matematičar Katalan (Eugene Catalan) je „otkrio" Katalanove brojeve 1838. godine dok je proučavao korektne nizove zagrada. Iako su nazvani po Katalanu, ipak ih on nije prvi pronašao. 1751. godine ove brojeve uočio je Ojler (Leonhard Euler) dok je proučavao triangulacije konveksnih mnogouglova. Međutim, najvjerovatnije je da ih je prvi otkrio kineski matematičar Ming (Antu Ming) 1730. godine, kroz njegove geometrijske modele.

Katalanove brojeve C_n, $n \in \mathbb{N}$, definišemo formulom

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}. \tag{1}$$

Iz očiglednih jednakosti

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = C_n.$$

slijedi da je svaki Katalanov broj prirodan broj. Na osnovu (1) je količnik dva uzastopna Katalanova broja jednak

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \cdot \frac{n!(n-1)!}{(2n-2)!} = \frac{2(2n-1)}{n+1},$$

odakle dobijamo da Katalanovi brojevi zadovoljavaju rekurentnu formulu

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1},\ n > 1.$$

Uzimajući po definiciji da je $C_0 = 1$, slijedi da se Katalanovi brojevi C_n, $n \in \mathbb{N}_0$, mogu definisati i pomoću rekurentne formule

$$C_0 = 1, \quad C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Ovo tvrđenje je Ojler objavio 1761. godine.

Na osnovu ove rekurentne formule lako dobijamo sljedeću tablicu prvih 13 Katalanovih brojeva.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786	208012

2 Aproksimacija Katalanovih brojeva

Iz rekurentne formule (2) slijedi da Katalanovi brojevi brzo rastu i da rastu malo sporije od eksponencijalnog niza 4^n. Takođe, iz ove formule dobijamo da je

$$C_n = \frac{4^n}{n+1} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \tag{3}$$

što se može provjeriti i matematičkom indukcijom.

Koristeći ovu formulu, dalje ćemo proučavati niz $(2n-1)!!/(2n)!!$, $n \in \mathbb{N}$. Ovaj niz je očito monotono opadajući i konvergira ka nuli. Odredimo graničnu vrijednost

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Kako je

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!!}{4^n (n!)^2},$$

koristeći poznatu nejednakost

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}},$$

dobijamo da je

$$\frac{\sqrt{n}\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{4^n \cdot 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{1}{6n}}} \le \sqrt{n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \le \frac{\sqrt{n}\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{1}{24n}}}{4^n \cdot 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}},$$

odnosno, nakon skraćivanja

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{6n}}} \le \sqrt{n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \le \frac{e^{\frac{1}{24n}}}{\sqrt{\pi}}. \tag{4}$$

Iz (4) slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \tag{5}$$

U vezi sa prethodnim rezultatom uradimo jedan primjer na kome ćemo ilustrovati i dokazivanje nejednakosti pomoću matematičke indukcije.

Primer 2.1. Dokazati nejednakosti

$$\frac{1}{\sqrt{4n+2}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4n}} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}. \tag{7}$$

Dokaz. Nejednakosti (7) se lako dokazuju matematičkom indukcijom.

Za $n = 1$ u (7) važe jednakosti $1/2 = 1/2 = 1/2$. Iz pretpostavke da lijeva nejednakost važi za $n-1$ ($n > 1$), dovoljno je još dokazati da za svako $n > 1$ važi

$$\frac{1}{\sqrt{4(n-1)}}\cdot\frac{2n-1}{2n} \ge \frac{1}{\sqrt{4n}}.$$

Ova nejednakost važi, jer je nakon kvadriranja ekvivalentna sa

$$n(2n-1)^2 \ge 4n^2(n-1), \quad \text{tj.} \quad 4n^2-4n+1 \ge 4n^2-4n.$$

Iz pretpostavke da desna nejednakost važi za $n-1$ ($n > 1$), dovoljno je još dokazati da za svako $n > 1$ važi

$$\frac{1}{\sqrt{3n-2}}\cdot\frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Posljednja nejednakost važi, jer je nakon kvadriranja ekvivalentna sa

$$(2n-1)^2(3n+1) \le 4n^2(3n-2), \quad \text{tj.} \quad 12n^3-8n^2-n+1 \le 12n^3-8n^2.$$

Iz nejednakosti (7) očito slijede nejednakosti (6). □

Primedba 2.1. Zanimljivo je da se nejednakosti (6) ne mogu dokazati matematičkom indukcijom na ovaj način. Zaista, iz pretpostavke da lijeva nejednakost u (6) važi za $n-1$ ($n > 1$), dovoljno bi bilo dokazati još da za svako $n > 1$ važi

$$\frac{1}{\sqrt{4n-2}}\cdot\frac{2n-1}{2n} \ge \frac{1}{\sqrt{4n+2}}.$$

Ali, ova nejednakost ne važi, jer je nakon kvadriranja ekvivalentna sa

$$(2n-1)^2(2n+1) \geq 4n^2(2n-1), \quad \text{tj.} \quad 4n^2-1 \geq 4n^2.$$

Iz pretpostavke da desna nejednakost u (6) važi za $n-1$ ($n>1$), dovoljno bi bilo dokazati da za svako $n>1$ važi

$$\frac{1}{\sqrt{3(n-1)}} \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

Međutim, posljednja nejednakost ne važi, jer je nakon kvadriranja ekvivalentna sa

$$n(2n-1)^2 \leq 4n^2(n-1), \quad \text{tj.} \quad 4n^2-4n+1 \leq 4n^2-4n. \ \square$$

Na osnovu formule (3) i nejednakosti (7) sada dobijamo sljedeću aproksimaciju za Katalanove brojeve

$$\frac{4^n}{(n+1)\sqrt{4n}} \leq C_n \leq \frac{4^n}{(n+1)\sqrt{3n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Poboljšajmo sada nejednakosti (7), odnosno (8). Postupkom kao u dokazu nejednakosti(7) odredimo najmanju konstantu a i najveću konstantu c, i konstante b i d tako da za svaki prirodan broj n važe nejednakosti

$$\frac{1}{\sqrt{an+b}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{cn+d}}, \tag{9}$$

pri čemu za $n=1$ važe jednakosti $1/2 = 1/2 = 1/2$.

Pošto za $n=1$ u (9) važe obje jednakosti, slijedi da je $a+b=4=c+d$. Nejednakost

$$\frac{1}{\sqrt{a(n-1)+b}} \cdot \frac{2n-1}{2n} \geq \frac{1}{\sqrt{an+b}} \quad (n>1)$$

je nakon kvadriranja ekvivalentna sa nejednakostima

$$(2n-1)^2(an+b) \geq 4n^2(an-a+b), \quad \text{tj.} \quad (a-4b)n+b \geq 0.$$

Kako posljednja nejednakost važi za svako $n > 1$, slijedi da je $a - 4b \geq 0$. Odavde i iz uslova $a + b = 4$ dobijamo da je $5a = a - 4b + 4(a + b) \geq 16$, tj. $a \geq 16/5$. Zbog toga je $a = 16/5$ najmanje takvo a i tada je $b = 4/5$.

Analogno je nejednakost

$$\frac{1}{\sqrt{c(n-1)+d}} \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{cn+d}} \quad (n > 1)$$

nakon kvadriranja ekvivalentna sa nejednakosti $(c - 4d)n + d \leq 0$ $(n \geq 2)$. Odavde slijedi da je $c - 4d \leq 0$, pa je dovoljno da ona važi za $n = 2$, tj. da je $(c - 4d) \cdot 2 + d \leq 0$. Dalje, iz $2c - 7d \leq 0$ i $c + d = 4$, dobijamo da je $9c = 2c - 7d + 7(c + d) \leq 28$, tj. $c \leq 28/9$. Zbog toga je $c = 28/9$ najveće takvo c i tada je $d = 8/9$.

Dakle, najbolje nejednakosti koje se mogu dobiti ovim postupkom su

$$\frac{1}{\sqrt{(16n+4)/5}} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{(28n+8)/9}}. \tag{10}$$

Pri tome, kako za $n = 1$ i $n = 2$ u desnoj nejednakosti u (10) važe jednakosti, slijedi da su konstante $c = 28/9$ i $d = 8/9$ u (9) najbolje moguće. Da li su i konstante $a = 16/5$ i $b = 4/5$ u lijevoj nejednakosti u (9) najbolje moguće? Na osnovu formule (3) i nejednakosti (10) ovim smo dokazali sljedeće tvrđenje, koje predstavlja poboljšanje nejednakosti (8).

Teorema 2.1. Za svaki prirodan broj n važe nejednakosti

$$\frac{4^n}{(n+1)\sqrt{(16n+4)/5}} \leq C_n \leq \frac{4^n}{(n+1)\sqrt{(28n+8)/9}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Ako dva izraza pod korjenima u nejednakostima (11), zamijenimo jednim izrazom koji je njihova aritmetička sredina

$$\frac{1}{2}\left(\frac{16}{5}n + \frac{4}{5} + \frac{28}{9}n + \frac{8}{9}\right) = \frac{142}{45}n + \frac{38}{45},$$

dobijamo sljedeću približnu formulu za Katalanove brojeve

$$\overline{C_n} = \frac{4^n}{(n+1)\sqrt{(142n+38)/45}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neposredno provjeravamo da za $n \leq 6$ važe nejednakosti $|C_n - \overline{C_n}| < 1/2$, tj. da je za $n \leq 6$ broju $\overline{C_n}$ najbliži cio broj upravo C_n.

Literatura

[1] Koshy Tomas, *Catalan Numbers with Applications,* Oxford University Press, 2009.

[2] Anderson A. James, *Diskretna matematika sa kombinatorikom,* Računarski fakultet, Beograd, 2005.

[3] Stevanović, D., Baltić, V., Simić, S., Ćirić, M., *Diskretna matematika, Osnove kombinatorike i teorije grafova,* Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2008.

[4] Tošić Ratko, *Kombinatorika,* Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1999.

[5] Stanley P. Richard, *Enumerative Combinatorics, vol. 2*, Cambridge University Pres, 1999.

[6] Bollobas Bela, *The Art of Mathematics*, Cambridge University Pres, 2006.

THE FOURTH MATHEMATICAL CONFERENCE OF REPUBLIC OF SRPSKA
Trebinje, 6. and 7. June 2014.

Polynomial Time Primality Testing

Marko Rajković Ivan Bartulović
assoc. prof. Štefko Miklavič, supervisor
University of Primorska, Faculty of Mathematics, Natural Sciences and Information Technologies
marko.rajkovic@student.upr.si ivan.bartulovic@student.upr.si
stefko.miklavic@upr.si

Student's paper

Abstract

Prime numbers are of great significance in number theory, but also in modern cryptography. Most of modern cryptographic protocols use factoring numbers composed of product of two large prime numbers. Thus, the problem of distinguishing prime numbers from the rest is still interesting and important as well and therefore there is a need to have efficient primality testing algorithms. Although there had been many probabilistic algorithms for primality testing, there was not a deterministic polynomial time algorithm until 2002 when Agrawal, Kayal and Saxena came with an algorithm, popularly known as the AKS algorithm, which could test whether a given number is prime or composite in polynomial time. This project is an attempt at understanding the idea behind this algorithm and the principles of mathematics that are required to study it. Finally, the project provides an implementation of the algorithm using Software for Algebra and Geometry Experimentation (SAGE) and arrives at conclusions on how practical it is.

1 Introduction

First primality tests where known to ancient Greeks and came straightforward from definition of prime number: to determine if a number n is a prime divide it by every positive integer $1 < m \leq \sqrt{n}$ – if any m divides n we conclude n is composite, otherwise we get that n is prime. This test is a specialization of the *Sieve of Eratosthenes* (the algorithm that generates all primes less then n) and it was known around 240 BC. For today's measures this test is inefficient: it takes $O(\sqrt{n})$ steps to determine if n is prime. An efficient test should need only a polynomial (in the size of input $= \lceil \log n \rceil$) number of steps. One of the first tests that is near to be efficient is the test using Fermat's Little Theorem. However, it is not a correct test since for many composites n there are a's such that $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ holds (for all a's in case of Carmichael numbers). Nevertheless, Fermat's Little Theorem became the basis for many efficient primality tests.
Since the beginning of complexity theory in the 1960s, interest in the problem of finding polynomial primality test increased and has been investigated more intensively. It is easy to see that the problem is in the class co-NP – complexity

class in which a is a member if and only if its complement is in the complexity class NP – class of nondeterministic polynomial time algorithms. In 1974, Pratt observed that the problem is in the class NP [1] (putting it in NP $\cap$ co-NP).
In 1975, Miller obtained polynomial time algorithm for primality testing using property based on Fermat's Little Theorem and assuming the Extended Riemann Hypothesis [2]. Soon afterwards, this test was modified by Rabin [3], which yielded to an unconditional, but randomized polynomial time algorithm. Independently, in 1974, Solovay and Strassen obtained a different randomized polynomial time algorithm [4] using the property that for a prime n, $\left(\frac{a}{n}\right) \equiv a^{\frac{n-1}{2}} \pmod{n}$ for every a. Their algorithm can be modified into deterministic assuming Extended Riemann Hypothesis. Since then, a number of randomized polynomial time algorithms have been proposed, using many different properties and tehniques.
In 1983, Adleman, Pomerance, and Rumely [5] achieved greater breakthrough by giving a deterministic algorithm for primality that runs in $\log n^{O(\log\log\log n)}$. All the previous deterministic algorithms required exponential time. Their algorithm was a kind of generalization of Miller's idea and used higher reciprocity laws. In 1986, Goldwasser and Kilian [6] proposed a randomized algorithm based on elliptic curves running in expected polynomial time on almost all inputs (all inputs under a widely believed hypothesis) that produces an easily verifiable short certificate for primality. Until then, all randomized algorithms produced certificates for compositeness only. Based on their ideas, a similar algorithm was developed by Atkin [7]. Adleman and Huang modified the Goldwasser-Kilian algorithm to obtain a randomized algorithm that runs in expected polynomial time on all inputs.
In August 2002, a major breakthrough was achieved by Agrawal, Kayal and Saxena who proposed an algorithm, known as the AKS algorithm [8]. The algorithm, which is based on a slight modification of the Fermat's Little Theorem, was the first unconditional deterministic polynomial time algorithm for primality testing.

2 The AKS Algorithm

2.1 The Basic Idea

This test is based on the following identity for prime numbers which is a generalization of Fermat's Little Theorem.

Lemma 2.1.1. *Let $a \in \mathbb{Z}, n > 2, n \in \mathbb{N}$ and $(a, n) = 1$. Then n is prime if and only if*

$$(X + a)^n \equiv X^n + a \pmod{n} \tag{1}$$

Proof: For $0 < i < n$, the coefficient of X^i in $((X + a)^n - (X^n + a))$ is $\binom{n}{i}a^{n-i}$. Suppose n is prime. Then $\binom{n}{i} \equiv 0 \pmod{n}$ and hence all the coefficients are zero. Suppose n is composite. Consider a prime q that is factor of n and let $q^k \mid\mid n$, i.e. q^k is the largest power of q that divides n . Then q^k does not divide $\binom{n}{q}$ and is coprime to a^{n-q} and hence the coefficient of X^q is not zero modulo n. Thus $((X+a)^n - (X^n + a))$ is not identically zero over $\mathbb{Z}_n$. $\square$

The above identity suggests a simple test for primality: given an input n, choose an a and test whether the congruence (1) is satisfied. However, this takes time $O(n)$ because we need to evaluate n coefficients in the left hand side in the worst case. A simple way to reduce the number of coefficients is to evaluate both sides of (1) modulo a polynomial of the form $X^r - 1$ for an appropriately chosen small r. In other words, test if the following equation is satisfied:

$$(X+a)^n \equiv X^n + a \pmod{X^r - 1, n} \tag{2}$$

From lemma 2.1.1 it is immediate that all primes n satisfy the equation (2) for all values of a and r. The problem now is that some composites n may also satisfy the equation for a few values of a and r. However, we can show that for appropriately chosen r, if the equation (2) is satisfied for several a's then n must be a prime power. The number of a's and the appropriate r are both bounded by a polynomial in $\log n$ and therefore, we get a deterministic polynomial time algorithm for testing primality.

2.2 The Algorithm

The following pseudocode represents the algorithm steps.

Input: integer $n > 1$.

1. If (for $a \in \mathbb{N}$ and $b > 1$) $n = a^b$ output COMPOSITE
2. Find the smallest r such that $o_r(n) > \log^2 n$ [1]
3. If $1 < (a, n) < n$ for some $1 \le a \le r$, output COMPOSITE
4. If $n \le r$ output PRIME [2]
5. For $a = 1$ to $\left\lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log n \right\rfloor$ do:
   If $(X+a)^n \not\equiv X^n + a \pmod{X^r - 1, n}$ output COMPOSITE
6. Output PRIME

2.3 Proof of Correctness

Theorem 2.3.1. *The algorithm above returns PRIME if and only if n is prime.*

The theorem wiil be proved with series of lemmas that follow.

[1] We use log for base 2 logarithm.

[2] Lemma 2.3.3 shows that $r \le \log^5 n$, so step 4 is relevant only when $n \le 5690034$

Lemma 2.3.2. *If n is prime, the algorithm returns PRIME.*

Proof: If n is prime then steps 1 and 3 can never return COMPOSITE. By Lemma 2.1.1, the for loop also cannot return COMPOSITE. Therefore the algorithm will identify n as PRIME either in step 4 or in step 6. $\square$

The converse of the above lemma requires a little more work. If the algorithm returns PRIME in step 4, then n must be prime since otherwise step 3 would have found a non-trivial factor of n. So the only remaining case is when the algorithm returns PRIME in step 6. For the purpose of subsequent analysis we assume this to be the case.
The algorithm has two main steps (2 and 5): step 2 finds an appropriate r and step 5 verifies the equation (2) for a number of a's. We first bound the magnitude of the appropriate r.

Lemma 2.3.3. *There exists $r \in (0, \log^5 n]$ such that $o_r(n) > \log^2 n$, $n > 2$.*

Proof: Let us assume that there is no such r in given interval. That is, assume that for all integers $r \in (0, \log^5 n]$ we have $o_r(n) \le \log^2 n$. Next, consider the product $\prod_{p \le N} p$, i.e. the product of all primes $p \le N$ where $N = \log^5 n$.

Our assumption gives us: $\prod_{p \le N} p \mid \prod_{i=1}^{\lfloor \log^2 n \rfloor} (n^i - 1)$.
Now, using the Prime Number Theorem one can deduce asymptotic bound: $e^N \le \prod_{p \le N} p$.

Above observations together imply: $e^N \le \prod_{i=1}^{\lfloor \log^2 n \rfloor} (n^i - 1)$.
But we have: $\prod_{i=1}^{\lfloor \log^2 n \rfloor} (n^i - 1) < \prod_{i=1}^{\lfloor \log^2 n \rfloor} n^i \le n^{\frac{\log^2 n(\log^2 n + 1)}{2}} < n^{\log^4 n} = 2^{\log^5 n}$.
Eventually, this gives: $e^N < 2^N$ what is an obvious contradiction. Therefore, the assumption from the beginning of the proof is false, as we wanted to show. $\square$

Now, let us give the sense to what we have just proved. We know that $o_r(n) > 1$. Therefore, there must exist prime p which divides n such that $o_r(p) > 1$. We can take that $p > r$ because otherwise step 3 or 4 will find that n is composite. By Euler's Theorem $o_r(n) \mid \varphi(r)$ and therefore $\varphi(r) > \log^2(n)$.
Having made the above observation we go to step 5 of algorithm where $l = \left\lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log n \right\rfloor$ equations need to be verified. Let us assume that it does not output COMPOSITE in this step, so we have:

$$(X + a)^n \equiv X^n + a \pmod{X^r - 1, n} \quad (\forall a \in \mathbb{Z}, 1 \le a \le l).$$

Now, since $p \mid n$ we have:

$$(X + a)^n \equiv X^n + a \pmod{X^r - 1, p} \quad (\forall a \in \mathbb{Z}, 1 \le a \le l).$$

Also, by Lemma 2.1.1 we know that for any prime p we have:

$$(X+a)^p \equiv X^p + a \pmod{X^r - 1, p} \quad (\forall a \in \mathbb{Z}, 1 \leq a \leq l).$$

Hence, from the above equations we have:

$$(X+a)^{\frac{n}{p}} \equiv X^{\frac{n}{p}} + a \pmod{X^r - 1, p} \quad (\forall a \in \mathbb{Z}, 1 \leq a \leq l).$$

Consider numbers p, r and l fixed in the remainder of this section.

Definition 2.3.4. *A number $m \in \mathbb{N}$ is called introspective for $f(X)$ if it holds: $[f(X)]^m \equiv f(X^m) \pmod{X^r - 1, p}$.*

Both n and $\frac{n}{p}$ are introspective for $X + a$ ($\forall a \in \mathbb{Z}, 1 \leq a \leq l$).

Lemma 2.3.5. *Introspective numbers are closed under multiplication.*

Proof: Let m and m' be introspective for $f(X)$. Since m is introspective, we have:

$$[f(X)]^{mm'} \equiv [f(X^m)]^{m'} \pmod{X^r - 1, p}.$$

Also, since m' is introspective for $f(X)$ (after replacing X with $X^{m'}$) we have:

$$\begin{aligned} [f(X^m)]^{m'} &\equiv f(X^{mm'}) \pmod{X^{mr} - 1, p} \\ &\equiv f(X^{mm'}) \pmod{X^r - 1, p}, \text{ since } X^r - 1 \text{ divides } X^{mr} - 1. \end{aligned}$$

Putting this together, we get:

$$[f(X)]^{mm'} \equiv f(X^{mm'}) \pmod{X^r - 1, p}.$$

Hence mm' is introspective for $f(X)$ as we wanted to prove. □

Lemma 2.3.6. *For a number m, the set of polynomials for which m is introspective is closed under multiplication.*

Proof: Let m be introspective for $f(X)$ and $g(X)$. We have:

$$\begin{aligned} [f(X)g(X)]^m &\equiv [f(X)]^m [g(X)]^m \\ &\equiv f(X^m)g(X^m) \pmod{X^r - 1, p}. \end{aligned}$$

Hence, m is introspective for $f(X)g(X)$ as we wanted to prove. □

The above two lemmas together imply that every member of the set $I = \left\{ \left(\frac{n}{p}\right)^i p^j | i, j \geq 0 \right\}$ is introspective for every polynomial in the set $P = \left\{ \prod_{a=0}^{l} (X+a)^{e_a} | e_a \geq 0 \right\}$.

We now define two abelian groups based on these sets.

The first group is the set of all residues of numbers in I modulo r. Since $p, n \in \mathbb{Z}_r^*$, this is a subgroup of $\mathbb{Z}_r^*$. Let G_1 be this group and $|G_1| = t$.

To define the second group, we need some basic facts about cyclotomic polynomials over finite fields. More about that one can find in [11].

Theorem 2.3.7. *Consider the r^{th} cyclotomic polynomial $Q_r(X)$ over the finite field $\mathbb{F}_p$. $Q_r(X)$ divides the polynomial $X^r - 1$ and factors into monic irreducible factors of degree $o_r(p)$.*

Proof: Let μ be a primitive r^{th} root of unity over $\mathbb{F}_p$. Then $\mu \in \mathbb{F}_{p^k}$ if and only if $\mu^{p^k} = \mu$. This is equivalent to $p^k \equiv 1 \pmod r$. The smallest such number k is $d = o_r(p)$. Thus, $\mu \in \mathbb{F}_{p^d}$ and in no proper subfield thereof. Hence, the minimal polynomial of μ over $\mathbb{F}_p$ has degree $o_r(p)$ and since μ is arbitrary root the desired results follows. □

Now, let $h(X)$ be one such factor. Since $o_r(p) > 1$ the degree of $h(X)$ is bigger than 1. To construct the second group G_2 consider the residues of all the polynomials in P modulo p and $h(X)$. Then this group is generated by $X, X+1, \ldots, X+l$ in the field $F = \mathbb{F}_p[X]/h(X)$.

Lemma 2.3.8. $|G_2| \geq \binom{t+l}{t-1}$

Proof: Consider polynomials of degree less than t. First, we will show that $f(X)$ and $g(X)$ map differently in G_2. Suppose $f(X) = g(X)$ in F and let $m \in I$. Since m is introspective to both $f(X)$ and $g(X)$ we have $f(X^m) = g(X^m)$ in F. If we replace $Y = X^m$ in $Q(Y) = f(Y) - g(Y)$ we deduce that it has roots of form $X^m, \forall m \in G_1$. Therefore, we know that number of its roots is $|G_1| = t$. But this cannot be true, since we assumed that f and g have degree less than t. Hence, this contradiction implies $f(X) \neq g(X)$ in F.
Now, $l = \left\lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log n \right\rfloor < \sqrt{r} \log n < r$ and since $r < p$ elements $X+1, X+2, ..., X+l$ are all different in $\mathbb{F}_p$. Also, for any $a, 1 \leq a \leq l$, since the degree of $h(X)$ is greater than one it holds $X + a \neq 0$. This shows that there are at least $l+1$ polynomials of degree one in G_2. So, the number of polynomials with degree less than t equals to number of polynomials of form $X^{e_0} \cdot (X+1)^{e_1} \cdots (X+l)^{e_l}$ which is exactly number of solutions of the equation $e_0 + e_1 + \cdots + e_l < t$ in the set of non-negative integers, hence $\binom{t+l}{t-1}$. □

Lemma 2.3.9. *If n is not power of p, then $|G_2| \leq n^{\sqrt{t}}$.*

Proof: Let I^* be subset of the set of introspective numbers I with $I^* = \left\{ \left(\frac{n}{p}\right)^i p^j \,|\, 0 \leq i, j \leq \sqrt{t} \right\}$. Since n is not power of p, number of different elements in I^* equals $\left(\lfloor \sqrt{t} \rfloor + 1\right)^2 > t$. This implies that when the elements of I^* are taken modulo r, at least two of them will be equivalent since $|G_1| = t$.
Now, let these two numbers in I^* which are equivalent modulo r be m_1, m_2 and $m_1 > m_2$. Then $X^{m_1} = X^{m_2} \pmod{X^r - 1, p}$. If $f(X) \in P$, then since $m_1, m_2 \in I$, we have:

$$f(X)^{m_1} = f(X^{m_1}) = f(X^{m_2}) = f(X)^{m_2} \pmod{X^r - 1, p}.$$

So $f(X)^{m_1} = f(X)^{m_2}$ in $F = \mathbb{F}_p[X]/h(X)$. Furthemore, this implies that all $f(X) \in G_2$ are roots of polynomial $Q(Y) = Y^{m_1} - Y^{m_2}$. Since the number of roots of this polynomial is at most m_1 and $m_1 \le n^{\sqrt{t}}$, combining this with the previous fact we easily conclude $|G_2| \le n^{\sqrt{t}}$. □

Lemma 2.3.10. *If the algorthim returns PRIME then n is prime.*

Proof: Given that the algorithm returns PRIME, we conclude it can be done so only in steps 4 and 6 of it. Having already seen the step 4 case, we now have to see that if the algorithm returns PRIME in step 6 then n is indeed a prime number.
By Lagrange's theorem we know that order of any finite group is divisible by order of its subgroup. Since G_1 is a subgroup of $\mathbb{Z}_r^*$, $t|\varphi(r)$ holds. Hence, $l > \lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor$. Using this inequality and inequalities $t > \log^2 n$, i.e. $t > \sqrt{t} \log n$ and $\binom{2n+1}{n} > 2^{n+1}$ which holds for $n > 1$ we have:

$$|G_2| \ge \binom{t+l}{t-1} \ge \binom{2\lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor + 1}{\lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor} \ge 2^{\lfloor \sqrt{t} \log n \rfloor + 1} > n^{\sqrt{t}}.$$

Suppose n is not a prime power. Then, as we have already showed, $|G_2| \le n^{\sqrt{t}}$. This is contradiction with above inequality. Hence, we conclude that $n = p^k$ where p is a prime and $k \ge 1$. The algorithm did not stop on step 1 from where we get $k \le 1$. Therefore, we conclude $k = 1$ and n is a prime what confirms correctness of the algorithm. □

3 Time Complexity Analysis

In this section we will analize time complexity of the algorithm. We will first introduce some notations that will be used for that purpose.

Definition 3.1 (Big O notation)**.** *Let $f(x)$ and $g(x)$ be two functions defined on some subset of the real numbers and x_0 an arbitrary real number. One writes $f(x) = O(g(x))$ as $x \to \infty$ if and only if:*

$$(\forall x > x_0)(\exists M > 0) \text{ such that } |f(x)| \le M|g(x)|.$$

In other words, Big O notation describes the limiting behavior of a function when the argument tends towards a particular value or infinity, usually in terms of simpler functions.

Definition 3.2 (Soft O notation)**.** *A function $f(n)$ is of $\tilde{O}(a(n))$ complexity if $f(n)$ is of $O(a(n) \log^k a(n))$ complexity.*

In other words it is an variant of big O that ignores logarithmic factors.

For next calculations we use the fact that addition, multiplication and division operations between two m bits numbers can be performed in time $\tilde{O}(m)$. Similarly, these operations on two degree d polynomials with coefficients at most m bits in size can be done in time $\tilde{O}(d \cdot m)$ steps [12].

Theorem 3.3. *The asymptotic time complexity of the algorithm is* $\tilde{O}(\log^{\frac{21}{2}} n)$.

Proof: The first step of the algorithm takes asymptotic time $\tilde{O}(\log^3 n)$ [12].
In step 2, we find an r with $o_r(n) > \log^2 n$. This can be done by trying out successive values of r and testing if $n^k \not\equiv 1 \pmod r$ for every $k \leq \log^2 n$. For a particular r, this will involve at most $\tilde{O}(\log^2 n)$ multiplications modulo r and so will take time $\tilde{O}(\log^2 n \log r)$. By Lemma 2.3.3 we know that only $\tilde{O}(\log^5 n)$ different r's need to be tried. Thus the total time complexity of step 2 is $\tilde{O}(\log^7 n)$.
The third step involves computing greatest common divisor of r numbers. Each gcd computation takes time $\tilde{O}(\log n)$ [12], and therefore, the time complexity of this step is $\tilde{O}(r \log n) = O(\log^6 n)$.
The time complexity of step 4 is just $\tilde{O}(\log n)$.
In step 5, we need to verify $\left\lfloor \sqrt{\varphi(r)} \log n \right\rfloor$ equations. Each equation requires $\tilde{O}(\log n)$ multiplications of degree r polynomials with coefficients of size $\tilde{O}(\log n)$. So each equation can be verified in time $\tilde{O}(r \log^2 n)$ steps. Thus the time complexity of step 5 is $\tilde{O}(r\sqrt{\varphi(r)} \log^3 n) = \tilde{O}(r^{\frac{3}{2}} \log^3 n) = \tilde{O}(\log^{\frac{21}{2}} n)$. This time dominates all the other and is therefore the time complexity of the algorithm. □
The time complexity of the algorithm can be improved by improving the estimate for r. The best possible scenario would be when $r = O(\log^2 n)$ and in that case the time complexity of the algorithm would be $\tilde{O}(\log^6 n)$. There are two conjectures that support the possibility of such an r:
Artin's Conjecture: Given any number $n \in \mathbb{N}$ that is not a perfect square, the number of primes $q \leq m$ for which $o_q(n) = q - 1$ is asymptotically $A(n)\frac{m}{\ln m}$ where A(n) is Artin's constant with $A(n) > 0.35$.
Sophie–Germain Prime Density Conjecture: The number of primes $q \leq m$ such that $2q+1$ is also a prime is asymptotically $\frac{2C_2 m}{\ln^2 m}$ where C_2 is the twin prime constant (estimated to be approximately 0.66). Primes q with this property are called Sophie–Germain primes.
If Artin's conjecture becomes effective for $m = O(\log^2 n)$ it immediately shows that there is an $r = O(\log^2 n)$ with required properties. It is known that conjecture holds under Generalized Riemann's Hypothesis.
By density of Sophie-Germain primes, there must exist at least $\log^2 n$ such primes between $8\log^2 n$ and $c \log^2 n(\log \log n)^2$ for suitable constant c. For any such prime q, either $o_q n \leq 2$ or $o_q n \geq \frac{q-1}{2}$. Any q for which $o_q n \leq 2$ must divide $n^2 - 1$ and so the number of such q is bounded by $O(\log n)$. This implies that there must exist a prime $r = O(\log^2 n)$ such that $o_r n > \log^2 n$. Such an r will yield an algorithm with time complexity $O(\log^6 n)$.

4 Implementation

Having proved the correctness of the AKS algorithm in Section 2 we now move on to the implementation of the algorithm which is implemented in SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation). The implementation was done by

defining a function $AKS(n)$ which takes a number n as the input and outputs whether for the given number holds that is prime or not.
The first part of the algorithm is used to check if the given number n is a perfect power, i.e here we check if the number n can be written in the form a^b, were $b \geq 2$. Now, if $n = a^b$ then we know that the maximum value of b is $\log n$ where log here refers to the base 2 (as has been the case throughout). Therefore the problem here reduces to probing whether an a exists such that $a^b = n$ for $b \in [2, \log n]$.
Having checked whether the given number n is a perfect power, in case of getting negative answer, we move on to the step 2 of the algorithm: finding an appropriate r. The objective here is to find an appropriate r such that $o_r(n) > \log^2 n$. Now, in the correctness proof of the algorithm we found that such an r can be found in the range $(0, \log^5 n]$. To do so, we test all $r \in [2, \log^5 n]$ to see if there is a $k \in [1, \log^2 n]$ such that $n^k \equiv 1 \pmod r$. If there is no such k then that particular r is the appropriate r that we want.
Here we move on to the step 5 of the algorithm which basically checks l equations. The routines used here are Integers(), PolynomialRing() and quotient(). *Integers()* is used to form the ring of integers modulo any n where n will be given as a parameter to it. The *PolynomialRing()* forms a polynomial ring over the ring say s, which will be given as a parameter to it and the *quotient()* is used for quotienting over polynomial rings.

4.1 The Code

Now putting together all the pieces we present the SAGE code for the AKS algorithm:

```
def AKS(n):
    c=1
    k=0
    for b in range(2,ceil(log(n,2))+1):
        y=(log(n,2)/b).n()
        c=(pow(2,y)).n(30)
        if (pow(floor(c),b)==n) :
            return false
            return
    m=((log(n,2)))^5
    r=2
    while(r<=floor(m)):
           c=0
           i=floor(log(n,2))^2
           for k in range(1,i+1):
               if ((n^k - 1) % r==0):  %nije komentar, vec oznaka za mod r
                  c=c+1
           if(c==0):
               break
           r=r+1
for a in range(1,r):
```

```
    if(1<gcd(a,n)<n):
        return false
        return
if(r>=n):
return prime
l=floor(sqrt(euler_phi(r))*log(n,2))
for a in range(1,l):
        s=Integers(n)
        R.<x>=PolynomialRing(s)
        F = R.quotient((x^r)-1)
        q=F((x+a))
        V=F(q^n)
        e=Mod(n,r)
        d=(x^e)+a
        if (V!=d):
        return false
return true
```

5 Results

In this section we will represent obtained results: answers on question of primality and time in which answer is obtained.

Number	Result	Time (ms)
7	true	11.0
35	false	2.0
341	false	14.0
7917	false	69.0
1877	true	133.0
12354893	true	927.0
5463458053	true	474663.0
11575698667957	false	2558.0
464533441216779	false	19611.0
4398690364646573	false	42838.0
24766754626236234	false	78317.0
234097878978902340	false	202066.0
5117043749469174407	false	1255901.0
45095080578985454453	true	7.338×10^6
490627542707888253709	false	1.621×10^7
5466877844857234985723 45	false	4.804×10^8

6 Conclusions

The formulation of AKS algorithm has certainly been a huge result considering that it was first deterministic unconditional polynomial time primality testing algorithm. It has certainly thrown us some light on one of the oldest problems confronting mathematics, which is to test whether a given number is prime or composite.
Although the AKS algorithm is a remarkable theoretical result it is still nowhere near to be practical since we have better performing probabilistic algorithms (with very less margin for error). The very fact that the check for whether the number 45095080578985454453 is prime took as much as around 2 hours shows how inefficient it is. And although, there has been considerable work undertaken to improve the algorithm, most of these have been based on results which haven't been proven yet.
Considering the situations where these primality testing algorithms are used, like in cryptography where they have to confront very large numbers, it is an absolute need to improve its speed to make it more practical and therefore we certainly believe that there is still a lot of work to be done in this area.
The idea of this project was to present AKS algorithm, its mathematical background, time complexity and in addition we tested the efficiency of the algorithm – this was an opportunity to learn programming in SAGE, which appeared to be a very powerful implementation tool for these types of algorithms.

7 References

[1] V. Pratt, 1975, 'Every prime has a succinct certificate' *SIAM Journal on Computing*, vol 4, pp. 214–220.

[2] L. Miller, 1976, 'Riemann's hypothesis and tests for primality' *J. Comput. Sys. Sci.*, vol 13, pp. 300–317.

[3] M. O. Rabin, 1980, 'Probabilistic algorithm for testing primality', *J. Number Theory*, vol. 12, pp. 128–138.

[4] R. Solovay, V. Strassen, 1977, 'A fast Monte-Carlo test for primality' *SIAM Journal on Computing*, vol. 6, pp. 84–86.

[5] L.M Adleman, C. Pomerance, R.S. Rumely, 1983, 'On distinguishing prime numbers from composite numbers', *Annals of Mathematics* vol. 117, no. 1, pp. 173–206.

[6] S. Goldwasser, J. Kilian, 1986, 'Almost all primes can be quickly certified', *In Proceedings of Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pp. 316–329.

[7] A. O. L. Atkin, 1986, Lecture notes of a conference, Boulder, Colorado. Manuscript.

[8] M. Agrawal, N. Kayal and N. Saxena, 2002, 'PRIMES is in P'.

[9] George E. Andrews, 1994, 'Number Theory', Dover Publications Inc. New York.

[10] David S. Dummit, Richard M. Foote, 2004, 'Abstract Algebra', Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.

[11] H. Niederreiter, R. Lidl, 1997, 'Finite Fields', *Encyclopedia of mathematics and its applications*, vol. 20.

[12] Joachim von zur Gathen and Jürgen Gerhard. 'Modern Computer Algebra'. Cambridge University Press, 1999.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Rješenje inverznog zadatka za operator sa homogenim kašnjenjem asimptotskim metodom

Dragana D. Nedić
Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Saobraćajni fakultet Doboj
dnedic@gmail.com

Milenko T. Pikula
Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Filozofski fakultet Pale
pikulam1947@gmail.com

Pregledni rad

Apstrakt

Ovaj rad je posvećen rješenju inverznih zadataka za operator

$$D^2 = D^2(h, H, \alpha, q); h, H \in \bar{R}, \alpha \in (0,1), q \in L_2[0,\pi]$$

Posmatara se spektralni zadatak $D^2 y = \lambda y$. Ako je $h = H = \infty$ operator ćemo označati sa D_1^2, a ukoliko je $h = H = 0$ operator ćemo označati sa D_2^2.

Za operator D_1^2 inverzni zadatak je riješen u [2], pri pretpostavci da je α poznati koeficijent kašnjenja i ukoliko je potencijal q simetričan u odnosu na tačku $\frac{\pi}{1+\alpha}$.

U ovom radu rješavamo kompletan inverzni zadatak, to jest nalazimo broj $\alpha(0,1)$ i funkciju $q \in L_2[0,\pi]$ bez ograničenja.

In this work we deal with solving the inverse tasks for the operator

$$D^2 = D^2(h, H, \alpha, q); h, H \in \bar{R}, \alpha \in (0,1), q \in L_2[0,\pi]$$

The spectral task $D^2 y = \lambda y$ is observed. If $h = H = \infty$ the operator will be marked D_1^2, and if $h = H = 0$ the operator will be marked D_2^2.

For the operator D_1^2, the inverse task is solved in [2], assuming that α is

a known coheefficient of delay and if the potential q is symmetric with respect to the point $\frac{\pi}{1+\alpha}$.

In this work we solve the complete inverse task, i.e. we find the number $\alpha(0,1)$ and the function $q \in L_2[0,\pi]$ without a limit.

1 Uvod

Posmatramo granične zadatke

$$-y''(x) + q(x)y(\alpha x) = \lambda y(x), \quad \alpha \in (0,1) \tag{1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{2}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{2'}$$

Ako je $h = H = \infty$ operator smo označili sa D_1^2,a spektralni zadatak sa $D_1^2 y = \lambda y$.

Pri $h = H = 0$ operator označavamo sa D_2^2, a granični zadatak sa $D_2^2 y = \lambda y$.

Razlikujemo sledeća dva inverzna zadataka:

1° Ukoliko predpostavimo da na nekom intervalu $(\pi - \varepsilon, \pi); \varepsilon > o$ važi $q(x) \neq 0$ gotovo svuda tada se koeficijent kašnjenja α i potencijal q konstruišu pomoću jednog niza sopstvenih vrijednosti.

2° Bez dodatnih pretpostavki na potencijal q o njegovom ponašanju lokalno sa lijeve strane tačke π koeficijent kašnjenja α i potencijal q konstruišemo pomoću dva niza sopstvenih vrijednosti koji redom odgovaraju operatorima D_1^2 i D_2^2.

U ovom radu rješavamo inverzni zadatak 2°.

2 Analiza direktnog zadatka

Jednačina (1) sa graničnim uslovom $y(0) = 0$ ekvivalentna je integralnoj jednačini

$$y(x,z) = \sin zx + \frac{1}{z}\int_0^x q(t_1)\sin z(x-t_1)y(\alpha t_1,z)dt_1 \tag{3}$$

Takođe jednačina (1) sa uslovom $y'(0) = 0$ ekvivalentna je integralnoj jednačini

$$y(x,z) = \cos zx + \frac{1}{z}\int_0^x q(t)\sin z(x-t_1)y(\alpha t_1,z)dt_1 \tag{3$'$}$$

Jednačine (3) i (3$'$) rješavaju se metodom uzastopnih aproksimacija.

Predhodno uvedimo sledeće funkcije

$b_{s^2}(x,z) = \int_0^x q(t_1)\sin z(x-t_1)\sin z\alpha t_1 dt_1$
$b_{c^2}(x,z) = \int_0^x q(t_1)\cos z(x-t_1)\cos z\alpha t_1 dt_1$
$b_{sc}(x,z) = \int_0^x q(t_1)\sin z(x-t_1)\cos z\alpha t_1 dt_1$
$b_{cs}(x,z) = \int_0^x q(t_1)\cos z(x-t_1)\sin z\alpha t_1 dt_1$
$b_{s^k}(x,z) = \int_0^x q(t_1)\sin z(x-t_1)\cdot b_{s^{k-1}}(\alpha t_1,z)dt_1, \quad k = 3,4,...$
$b_{s^{k-1}c}(x,z) = \int_0^x q(t_1)\sin z(x-t_1)\cdot b_{s^{k-2}c}(\alpha t_1,z)dt_1, \quad k = 2,3,...$
$b_{cs^{k-2}c}(x,z) = \int_0^x q(t_1)\cos z(x-t_1)\cdot b_{s^{k-2}c}(\alpha t_1,z)dt_1$

Rješenja jednačina (3) i (3$'$) data su sa

$$y(x,z) = \sin zx + \frac{1}{z}b_{s^2}(x,z) + \frac{1}{z^2}b_{s^3}(x,z) + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{z^k}b_{s^{k+1}}(x,z) \tag{4}$$

$$y(x,z) = \cos zx + \frac{1}{z}b_{sc}(x,z) + \frac{1}{z^2}b_{s^2c}(x,z) + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{z^k}b_{s^kc}(x,z) \tag{4$'$}$$

Diferencirajući u (4$'$) po promjenjljivoj x dobijamo

$$\frac{dy}{dx}(x,z) = -z\sin zx + b_{c^2}(x,z) + \frac{1}{z}b_{csc}(x,z) + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{z^{k-1}}b_{cs^{k-1}c}(x,z) \tag{4$''$}$$

Karakteristične funkcije F_j operatora D_j^2 date su sa

$$F_1(z) = \sin \pi z + \frac{1}{z} b_{s^2}(z) + \frac{1}{z^2} b_{s^3}(z) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}(z) \tag{5}$$

$$F_2(z) = -z \sin \pi z + b_{c^2}(z) + \frac{1}{z} b_{csc}(z) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{z^{k-1}} b_{cs^{k-1}c}(z) \tag{5'}$$

Koristili smo oznake

$b_{s^2}(z) = b_{s^2}(\pi, z),\ \ b_{c^2}(z) = b_{c^2}(\pi, z)$
$b_{s^k}(z) = b_{s^k}(\pi, z),\ \ b_{cs^{k-1}c}(z) = b_{cs^{k-1}c}(\pi, z)$

Definišimo takozvane prelazne funkcije

$$\tilde{q}_j(\theta) = \begin{cases} 0, \theta \in \left(\frac{1+\alpha}{2}\pi, \pi\right) \\ \frac{1}{1+\alpha} q\left(\frac{2\theta}{1+\alpha}\right), \theta \in \left(\frac{1-\alpha}{2}\pi, \frac{1+\alpha}{2}\pi\right) \\ \frac{1}{1+\alpha} q\left(\frac{2\theta}{1+\alpha}\right) + (-1)^j \frac{1}{1-\alpha} q\left(\frac{2\theta}{1-\alpha}\right), \theta \in \left[0, \frac{1-\alpha}{2}\pi\right], j = 1, 2 \end{cases} \tag{6}$$

Ovakve funkcije imaju fundamentalnu ulogu u proceduri rješavanja inverznih zadataka.
Naime,prelazne funkcije su nosioci potencijala q i koeficijenta kašnjenja α.
Uvođenjem prelaznih funkcije dobijamo relacije

$$b_{s^2}(z) = \int_0^{\pi} \tilde{q}_1(\theta) \cos z(\pi - 2\theta) d\theta = b_c^{(1)}(z) \tag{7}$$

i

$$b_{c^2}(z) = \int_0^{\pi} \tilde{q}_2(\theta) \cos z(\pi - 2\theta) d\theta = b_c^{(2)}(z) \tag{7'}$$

Izmjenom redoslijeda integracije i smjenama promjenjljivih funkciju

$b_{s^3}(z) = \int_0^{\pi} q(t_1) \sin z(\pi - t_1) \int_0^{\alpha t_1} q(t_2) \sin z(\alpha t_1 - t_2) \cdot \sin z\alpha t_2 dt_2 dt_1$

predstavićemo u obliku

$$b_{s^3}(z)=\int_0^\pi K_{11}(\theta,q(\theta))\sin z(\pi-2\theta)d\theta=b_s^{(1,1)}(z) \tag{8}$$

gdje je

$$K_{11}(\theta,q(\theta))=\frac{1}{2}(K_1^{(1)}(\theta,q(\theta))+K_1^{(2)}(\theta,q(\theta))-K_1^{(3)}(\theta,q(\theta))-K_1^{(4)}(\theta,q(\theta))) \tag{8'}$$

Funkcije
$K_1^{(1)}(\theta,q(\theta)),K_1^{(2)}(\theta,q(\theta)),K_1^{(3)}(\theta,q(\theta)),K_1^{(4)}(\theta,q(\theta)$, date su sa

$$K_1^{(1)}(\theta,q(\theta))=\begin{cases}0,\theta\in\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\pi,\pi\right]\\ \int_{\frac{2\theta}{1+\alpha^2}}^{\pi}q(t_1)q\left(\frac{2\theta}{1+\alpha}-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}t_1\right)\frac{dt_1}{1+\alpha},\theta\in\left[\frac{1-\alpha}{2}\pi,\frac{1+\alpha^2}{2}\pi\right]\\ \int_{\frac{2\theta}{1+\alpha^2}}^{\frac{2\theta}{1-\alpha}}q(t_1)q\left(\frac{2\theta}{1+\alpha}-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}t_1\right)\frac{dt_1}{1+\alpha},\theta\in\left[0,\frac{1-\alpha}{2}\pi\right]\end{cases} \tag{9}$$

$$K_1^{(2)}(\theta,q(\theta))=\begin{cases}0,\theta\in\left(\frac{1+\alpha}{2}\pi,\pi\right]\\ \int_{\frac{2\theta}{1+\alpha}}^{\pi}q(t_1)q\left(t_1-\frac{2\theta}{1+\alpha}\right)\frac{dt_1}{1+\alpha},\theta\in\left[\frac{1-\alpha^2}{2}\pi,\frac{1+\alpha}{2}\pi\right]\\ \int_{\frac{2\theta}{1+\alpha}}^{\frac{2\theta}{1-\alpha^2}}q(t_1)q\left(t_1-\frac{2\theta}{1+\alpha}\right)\frac{dt_1}{1+\alpha},\theta\in\left[0,\frac{1-\alpha^2}{2}\pi\right]\end{cases} \tag{10}$$

$$K_1^{(3)}(\theta,q(\theta))=\begin{cases}0,\theta\in\left(\frac{1-\alpha^2}{2}\pi,\pi\right]\\ \int_{\frac{2\theta}{1-\alpha^2}}^{\pi}q(t_1)q\left(\frac{2\theta}{1-\alpha}-t_1\right)\frac{dt_1}{1-\alpha},\theta\in\left[\frac{1-\alpha}{2}\pi,\frac{1-\alpha^2}{2}\pi\right]\\ \int_{\frac{2\theta}{1-\alpha^2}}^{\frac{2\theta}{1-\alpha}}q(t_1)q\left(\frac{2\theta}{1-\alpha}-t_1\right)\frac{dt_1}{1-\alpha},\theta\in\left[0,\frac{1-\alpha}{2}\pi\right]\end{cases} \tag{11}$$

$$K_1^{(4)}(\theta,q(\theta))=\begin{cases}0,\theta\in\left(\frac{1+\alpha}{2}\pi,\pi\right]\\ \int_{\frac{2\theta}{1+\alpha}}^{\pi}q(t_1)q\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}t_1-\frac{2\theta}{1-\alpha}\right)\frac{dt_1}{1-\alpha},\theta\in\left[\frac{1+\alpha^2}{2}\pi,\frac{1+\alpha}{2}\pi\right]\\ \int_{\frac{2\theta}{1+\alpha}}^{\frac{2\theta}{1+\alpha^2}}q(t_1)q\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}t_1-\frac{2\theta}{1-\alpha}\right)\frac{dt_1}{1-\alpha},\theta\in\left[0,\frac{1+\alpha^2}{2}\pi\right]\end{cases} \tag{12}$$

Sasvim analogno funkciju
$b_{csc}(z)=\int_0^\pi q(t_1)\cos z(\pi-t_1)\int_0^{\alpha t_1}q(t_2)\sin z(\alpha t_1-t_2)\cdot\cos z\alpha t_2dt_2dt_1$

predstavljamo u obliku

$$b_{csc}(z) = \int_0^\pi K_{12}(\theta, q(\theta)) sinz(\pi - 2\theta) d\theta = b_s^{(1,2)}(z) \tag{13}$$

gdje je

$$K_{12}(\theta, q(\theta)) = \frac{1}{2}\Big(K_1^{(1)}(\theta, q(\theta)) - K_1^{(2)}(\theta, q(\theta)) + K_1^{(3)}(\theta, q(\theta)) - K_1^{(4)}(\theta, q(\theta))\Big) \tag{13'}$$

$K_{1j} \in L_2[0, \pi], \quad j = 1, 2$

Tada funkcije $F_1(z)$ i $F_2(z)$ imaju oblik

$$F_1(z) = \sin \pi z + \frac{1}{z} b_c^{(1)}(z) + \frac{1}{z^2} b_s^{(1,1)}(z) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{z^k} b_{s^{k+1}}(z) \tag{14}$$

i

$$F_2(z) = -z \sin \pi z + b_c^{(2)}(z) + \frac{1}{z} b_s^{(1,2)}(z) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{z^{k-1}} b_{cs^{k-1}c}(z) \tag{14'}$$

Asimptotiku nula funkcija $F_j(z), j = 1, 2,$ tražimo u formi

$$z_{nj} = n + \frac{C_{1j}(n)}{n} + \frac{C_{2j}(n)}{n^2} + \frac{C_{3j}(n)}{n^3} + o\Big(\frac{C_{3j}(n)}{n^3}\Big) \tag{15}$$

Radi kraćih zapisivanja koristićemo sledeće brojne nizove

$a_{2n}^{(j)} = \int_0^\pi \tilde{q}_j(\theta) \cos 2n\theta d\theta, \quad b_{2n}^{(j)} = \int_0^\pi \tilde{q}_j(\theta) \sin 2n\theta d\theta,$
$\hat{b}_{2n}^{(j)} = \int_0^\pi \theta \tilde{q}_j(\theta) \sin 2n\theta d\theta, \quad b_{2n}^{(1,j)} = \int_0^\pi K_{1j}(\theta, q(\theta)) \sin 2n\theta d\theta$

$a_{2n}^{(1,j)} = \int_0^\pi \ K_{1j}(\theta, q(\theta)) \cos 2n\theta d\theta$

Uvrštavajući (15) u jednačine $F_j(z_{nj}) = 0$ dobijamo

$$C_{1j}(n) = \frac{(-1)^j}{\pi} a_{2n}^{(j)} \tag{16}$$

$$C_{2j}(n) = \frac{(-1)^{j-1}}{\pi} b_{2n}^{(1,j)} + \frac{1}{\pi} a_{2n}^{(j)} b_{2n}^{(j)} - \frac{2}{\pi} a_{2n}^{(j)} \hat{b}_{2n}^{(j)} \tag{17}$$

$$C_{3j}(n) = O(b_{2n}^{(1,j)}) \tag{18}$$

Koristeći $(16), (17)$ i (18) možemo (15) pisati u obliku

$$z_{nj} = n + \frac{(-1)^j}{n\pi} a_{2n}^{(j)} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{(-1)^{j-1}}{\pi} b_{2n}^{(1,j)} + \frac{1}{\pi} a_{2n}^{(j)} b_{2n}^{(j)} - \frac{2}{\pi} a_{2n}^{(j)} \hat{b}_{2n}^{(j)}\right) + O\left(\frac{b_{2n}^{(1,j)}}{n^3}\right) \tag{19}$$

Kvadriranjem relacija (19) dobijamo asimptotiku sopstvenih vrijednosti operatora D_j^2 u obliku

$$\lambda_{nj} = n^2 + (-1)^j \frac{2}{\pi} a_{2n}^{(j)} + \frac{1}{n}\left((-1)^{j-1} \frac{2}{\pi} b_{2n}^{(1,j)} + \frac{2}{\pi} a_{2n}^{(j)} b_{2n}^{(j)} - \frac{4}{\pi^2} a_{2n}^{(j)} \hat{b}_{2n}^{(j)}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{b_{2n}^{(1,j)}}{n^2}\right), \quad j = 1, 2 \tag{20}$$

Time smo dokazali sledeći rezultat:

Teorema 1.

Ako su cijele funkcije eksponencijalnog tipa date sa (5) i $(5')$, tada nule z_{nj} imaju asimptotsko razlaganje (19), a sopstvene vrijednosti imaju asimtotiku (20).

3 Predstavljanje funkcija F_j pomoću beskonačnih proizvoda

Dobro je poznato iz teorije cijelih funkcija da važe predstavljanja

$$F_1(z) = A_1 z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_{n1}}\right) \tag{21}$$

i

$$F_2(z) = A_2 \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_{02}}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_{n2}}\right) \tag{22}$$

gdje su A_j koeficijenti koji će biti određeni kasnije.

$$F_1(z) = A_1 z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_{n1}}\right) = \frac{A_1 \sin \pi z \cdot z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{\lambda_{n1}})}{\pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2})} =$$

$$= \sin \pi z \cdot \frac{A_1}{\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda_{n1}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n1} - z^2}{n^2 - z^2} =$$

$$= \sin \pi z \cdot \frac{A_1}{\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda_{n1}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2}\right)$$

$$\frac{A_1}{\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda_{n1}} = 1 \Rightarrow A_1 = \pi \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n1}}{n^2}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2}\right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2}\right)^2\right] + \psi(z)$$

Dakle,

$$F_1(z) = \sin \pi z + \sin \pi z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2} +$$

$$+ \frac{\sin \pi z}{2} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2} \right)^2 \right] + \sin \pi z \cdot \psi(z) \qquad (23)$$

Funkcija ψ je određena ali njen analitički izraz ne navodimo, jer nije asimtotski značajan u poređenju sa sabircima prije njega u (23).

Uvodimo sledeće oznake

$a_0^{(1)} = \int_0^\pi \tilde{q}_1(\theta) d\theta \quad a_0^{(1,1)} = \int_0^\pi K_{11}(\theta, q(\theta)) d\theta \quad \hat{a}_0^{(1,1)} = \int_0^\pi \theta K_{11}(\theta, q(\theta)) d\theta$

$b_{c0}^{(1)}(z) = \int_0^\pi \tilde{q}_1(\theta) \cos 2z\theta d\theta \quad \hat{b}_{c0}^{(1)}(z) = \int_0^\pi \theta \tilde{q}_1(\theta) \cos 2z\theta d\theta$

$b_{s0}^{(1)}(z) = \int_0^\pi \tilde{q}_1(\theta) \sin 2z\theta d\theta \quad \hat{b}_{s0}^{(1)}(z) = \int_0^\pi \theta \tilde{q}_1(\theta) \sin 2z\theta d\theta$

$b_s^{(1)}(z) = \int_0^\pi \tilde{q}_1(\theta) \sin z(\pi - 2\theta) d\theta \quad \hat{b}_s^{(1)}(z) = \int_0^\pi \theta \tilde{q}_1(\theta) \sin z(\pi - 2\theta) d\theta$

Pošto je

$\lambda_{n1} - n^2 = -\frac{2}{\pi} a_{2n}^{(1)} + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{\pi} b_{2n}^{(1,1)} + \frac{2}{\pi} a_{2n}^{(1)} b_{2n}^{(1)} - \frac{4}{\pi^2} a_{2n}^{(1)} \hat{b}_{2n}^{(1)} \right) + O\left(\frac{b_{2n}^{(1,1)}}{n^2} \right)$

koristeći poznate sume dobijamo

$$-\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}^{(1)}}{n^2 - z^2} = \frac{b_c^{(1)}(z)}{z \sin \pi z} - \frac{\frac{1}{\pi} a_0^{(1)}}{z^2}$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}^{(1,1)}}{n(n^2 - z^2)} = \frac{b_s^{(1,1)}(z)}{z^2 \sin \pi z} + \frac{\frac{2}{\pi} \hat{a}_0^{(1,1)} - a_0^{(1,1)}}{z^2}$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}^{(1)} b_{2n}^{(1)}}{n(n^2 - z^2)} = \frac{1}{z^2 \sin \pi z} \left(b_{c0}^{(1)}(z) - a_0^{(1)} \right) b_s^{(1)}(z) \qquad (24)$$

$$-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n}^{(1)}\hat{b}_{2n}^{(1)}}{n(n^2-z^2)}=-\frac{2}{\pi z^2\sin\pi z}\Big(b_{c0}^{(1)}(z)-a_0^{(1)}\Big)\hat{b}_s^{(1)}(z)$$

Definicija 1.

Broj S_1^* definisan sa
$S_1^*=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lambda_n-n^2+\frac{2}{\pi}a_{2n}^{(1)}-\frac{1}{n}\left[\frac{2}{\pi}b_{2n}^{(1,1)}+\frac{2}{\pi}a_{2n}^{(1)}b_{2n}^{(1)}-\frac{4}{\pi^2}a_{2n}^{(1)}\hat{b}_{2n}^{(1)}\right]\right\}$ nazivamo prvi usiljeni regularizovani trag operatora D_1^2.

Na osnovu poslednjih relacija dobijamo asimptotiku karakteristične funkcije $F_1(z)$ u obliku

$$F_1(z)=\sin\pi z+\frac{1}{z}b_c^{(1)}(z)+\frac{1}{z^2}b_s^{(1,1)}(z)+$$

$$+\frac{\sin\pi z}{z^2}\Big(-S_1^*-\frac{1}{\pi}a_0^{(1)}+\frac{2}{\pi}\hat{a}_0^{(1,1)}-a_0^{(1,1)}\Big)+$$

$$+\frac{1}{z^2}\Big(b_{c0}^{(1)}(z)-a_0^{(1)}\Big)\Big(b_s^{(1)}(z)-\frac{2}{\pi}\hat{b}_s^{(1)}(z)\Big)+$$

$$+\frac{1}{2z^2\sin\pi z}\Big((b_c^{(1)}(z))^2-(b_{c0}^{(1)}(z))^2\Big)+ \tag{25}$$

$$+\frac{1}{\pi z^2}\Big(\hat{b}_s^{(1)}(z)b_{c0}^{(1)}(z)-b_c^{(1)}(z)\hat{b}_{s0}^{(1)}(z)\Big)+O\Big(\frac{b_{c0}^{(1)}(z)}{z^3}\Big)$$

odnosno

$$F_1(z)=\sin\pi z+\frac{1}{z}b_c^{(1)}(z)+O\Big(\frac{b_s^{(1,1)}(z)}{z^2}\Big) \tag{26}$$

Koristeći rezultat teoreme 1. i rezultat predhodno provedene analize dokazali smo sledeći stav:

Teorema 2.

Da bi cijela funkcija, definisana sa (5), odnosno (14), imala asimtotiku (26) potrebno je i dovoljno da njene nule imaju asimtotiku (19).

Sasvim analogan rezultat dobijamo i za funkciju $F_2(z)$.

4 Postavka i rješenje inverznog zadatka

Predpostavimo da su nam data dva niza λ_{nj} sopstvenih vrijednosti graničnih zadataka

$D_j^2 y = \lambda y, \quad j = 1, 2, \quad \lambda_{01} = 0, \quad \lambda_{02} \neq 0$

Pod rješenjem inverznog zadatka podrazumijevamo nalaženje koeficijenata kašnjenja $\alpha \in (0, 1)$ i potencijala $q \in L_2[0, \pi]$.
Prema potrebnim uslovima za brojeve koji su sopstvene vrijednosti operatora D_j^2 slijedi da važi asimtotsko razlaganje

$$\lambda_{nj} = n^2 + (-1)^j \frac{2}{\pi} a_{2n}^{(j)} + \frac{1}{n}\left((-1)^{j-1} \frac{2}{\pi} b_{2n}^{(1,j)} + \frac{2}{\pi} a_{2n}^{(j)} b_{2n}^{(j)} - \frac{4}{\pi^2} a_{2n}^{(j)} \hat{b}_{2n}^{(j)} \right) +$$

$$+ O\left(\frac{b_{2n}^{(1,j)}}{n^2} \right) \tag{26}$$

pri čemu su $a_{2n}^{(j)}, b_{2n}^{(j)}$ furijeovi koeficijenti nekih funkcijja $\tilde{q}_j \in L_2[0, \pi]$,
$\hat{b}_{2n}^{(j)}$su sinusni furijeovi koeficijenti funkcije $\theta \tilde{q}_j(\theta)$, a $b_{2n}^{(1,j)}$ su sinusni furijeovi koeficijenti nekih funkcija $K_{1j}(\theta) \in L_2[0, \pi]$.

Podsjetimo se da su prelazne funkcije $\tilde{q}_j$ definisane sa

$$\tilde{q}_j(\theta) = \begin{cases} 0, \theta \in \left(\frac{1+\alpha}{2}\pi, \pi\right) \\ \frac{1}{1+\alpha} q\left(\frac{2\theta}{1+\alpha}\right), \theta \in \left(\frac{1-\alpha}{2}\pi, \frac{1+\alpha}{2}\pi\right) \\ \frac{1}{1+\alpha} q\left(\frac{2\theta}{1+\alpha}\right) + (-1)^j \frac{1}{1-\alpha} q\left(\frac{2\theta}{1-\alpha}\right), \theta \in \left[0, \frac{1-\alpha}{2}\pi\right] \end{cases} \tag{27}$$

Ovdje je $\alpha \in (0,1)$ broj koji predstavlja koeficijent homogenog kašnjenja, a q je potencijal operatora.

Postavlja se pitanje jednoznačnog određivanja koeficijenta $\alpha \in (0,1)$ i potencijala $q \in L_2[0,\pi]$ gdje se jednoznačnost potencijala podrazumijeva u smislu L_2.
Prvi korak u rješenju inverznog zadatka je nalaženje prelaznih funkcija $\tilde{q}_j$.

Zbog toga polazimo od sledećih funkcija:

$$B_j(z) = z \sin \pi z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj} - n^2}{n^2 - z^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \tag{28}$$

Koristeći $(24), (26)$ i (28) imamo fundamentalne relacije

$$B_j(z) = b_c^{(j)}(z) + O\left(\frac{\sin \pi z}{z}\right), \quad j = 1, 2 \tag{29}$$

Proučavaćemo funkcije $B_j(z)$ duž pravih $z = m + ik$ gdje je m proizvoljan i fiksiran cio broj a $k \to +\infty$.

Radi jednostavnijeg zapisivanja uvodimo sledeće brojne nizove

$$\begin{aligned} \sigma_{n,m,k}^{(j)} &= (n^2 - m^2 + k^2)^2 + 4m^2k^2 \\ \zeta_{n,m,k}^{(j)} &= -k(\lambda_{nj} - n^2)(n^2 + m^2 + k^2) \\ \eta_{n,m,k}^{(j)} &= m(\lambda_{nj} - n^2)(n^2 - m^2 - k^2) \\ \alpha_{m,k}^{(j)} &= 2k \int_0^{\pi} a_{2m}^{(j)}(\theta) shk(\pi - 2\theta) d\theta \\ \beta_{m,k}^{(j)} &= 2k \int_0^{\pi} b_{2m}^{(j)}(\theta) chk(\pi - 2\theta) d\theta \end{aligned} \tag{30}$$

Na osnovu (28) i (30) dobijamo

$$B_j(m+ik) = (-1)^m skh\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_{n,m,k}^{(j)}}{\sigma_{n,m,k}^{(j)}} + i(-1)^m shk\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_{n,m,k}^{(j)}}{\sigma_{n,m,k}^{(j)}} \tag{31}$$

S druge strane imamo

$$b_c^{(j)} = (-1)^m \left\{ a_{2m}^{(j)} chk\pi + \alpha_{m,k}^{(j)} + i(-b_{2m}^{(j)} shk\pi + \beta_{m,k}^{(j)}) \right\} \tag{32}$$

Sada relacije (29) na osnovu (31) i (32) prevodimo u sistem njima ekvivalentnih relacija

$$a_{2m}^{(j)} = thk\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_{n,m,k}^{(j)}}{\sigma_{n,m,k}^{(j)}} - \frac{1}{chk\pi} \alpha_{m,k}^{(j)} + O\left(\frac{kshk\pi}{m^2+k^2} \right) \tag{33}$$

$$b_{2m}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_{n,m,k}^{(j)}}{\sigma_{n,m,k}^{(j)}} + \frac{1}{shk\pi} \beta_{m,k}^{(j)} + O\left(\frac{mshk\pi}{m^2+k^2} \right) \tag{33'}$$

Iz (33) i (33′) dobijamo

$$a_{2m}^{(j)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_{n,m,k}^{(j)}}{\sigma_{n,m,k}^{(j)}} \tag{34}$$

$$b_{2m}^{(j)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_{n,m,k}^{(j)}}{\sigma_{n,m,k}^{(j)}} \tag{34'}$$

Na osnovu poslednjih relacija imamo furijeove koeficijente funkcija $\tilde{q}_j(\theta)$

$$\tilde{q}_j(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\tilde{a}_{2m}^{(j)} \cos 2m\theta + \tilde{b}_{2m}^{(j)} \sin 2m\theta), \quad j = 1, 2 \tag{35}$$

gdje je

$\tilde{a}_{2m}^{(j)} = \frac{2}{\pi} a_{2m}^{(j)}, \quad \tilde{b}_{2m}^{(j)} = \frac{2}{\pi} b_{2m}^{(j)}$

Formirajmo nove funkcije

$$\tilde{q}^{+}(\theta) = \frac{1}{2}(\tilde{q}_2(\theta) + \tilde{q}_1(\theta)) = \begin{cases} 0, \theta \in \left(\frac{1+\alpha}{2}\pi, \pi\right) \\ \frac{1}{1+\alpha} q\left(\frac{2\theta}{1+\alpha}\right), \theta \in \left[0, \frac{1+\alpha}{2}\pi\right] \end{cases} \tag{36}$$

$$\tilde{q}^{-}(\theta) = \frac{1}{2}(\tilde{q}_2(\theta) - \tilde{q}_1(\theta)) = \begin{cases} 0, \theta \in \left(\frac{1-\alpha}{2}\pi, \pi\right) \\ \frac{1}{1-\alpha} q\left(\frac{2\theta}{1-\alpha}\right), \theta \in \left[0, \frac{1-\alpha}{2}\pi\right] \end{cases} \tag{36'}$$

Postavlja se pitanje da li se vrijednost broja α može odrediti.

Stavimo
$\nu^* = \sup\left\{\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi) : \tilde{q}^{+}(\theta) \neq 0 \ \ g.s.\right\}$
i
$\mu^* = \sup\left\{\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) : \tilde{q}^{-}(\theta) \neq 0 \ \ g.s.\right\}$

Prema potrebnim uslovima za prelazne funkcije $\tilde{q}_j$, jasno je da brojevi ν^* i μ^* postoje.

Ukoliko je i $\mu^* + \nu^* = \pi$ tada stavljajući

$\frac{1+\alpha}{2}\pi = \nu^* \Rightarrow \alpha = \frac{2\nu^*}{\pi} - 1$

što znači da je koeficijent kašnjenja α jednoznačno određen.

Ukoliko je $\mu^* + \nu^* < \pi$ tj. $\exists \varepsilon > 0$, tako da je $\mu^* + \nu^* = \pi - \varepsilon$ tada postavljamo jednačinu

$\frac{1+\alpha}{2}(\pi - \varepsilon) = \nu^* \Rightarrow \alpha = \frac{2\nu^*}{\pi - \varepsilon} - 1$

Sa određenim α i prelaznim funkcijama konstruišimo potencijal.

Naime iz (36) i (36′)

$$q(t)=(1+\alpha)\tilde{q}^{+}\left(\frac{1+\alpha}{2}t\right),\ \ t\in[0,\pi] \tag{37}$$

ili

$$q(t)=(1-\alpha)\tilde{q}^{-}\left(\frac{1-\alpha}{2}t\right),\ \ t\in[0,\pi] \tag{37'}$$

Primjedba 1.
Ukoliko za nađene prelazne funkcije $\tilde{q}_j$ važi $\mu^*+\nu^*<\pi$, to znači da na $\langle\pi-\varepsilon,\pi\rangle$ važi $q(t)=0\ \ g.s.$, gdje je $\varepsilon=\pi-(\mu^*+\nu^*)$

U protivnom tj. ako je $\mu^*+\nu^*=\pi$ potencijal q na $\langle\pi-\varepsilon,\pi\rangle$
je različit od nule g.s.

Konstruišimo operatore $D_1(\alpha,q)$ i $D_2(\alpha,q)$,a potom odredimo sopstvene vrijednosti λ^*_{nj} tih operatora.

Lako se provjerava da je $\lambda^*_{nj}=\lambda_{nj}$, gdje su λ_{nj} unaprijed dati brojevi.

Formulišimo sada centralni rezultat ovoga rada.

Teorema 3.

Da bi dva niza brojeva $\lambda_{nj},\ \ n=0,1,2...,\ \ j=1,2,\ \ \lambda_{01}=0,\ \ \lambda_{02}\neq 0$ bile sopstvene vrijednosti operatora $D_j(\alpha,q)$ potrebno je i dovoljno da važe asimptotike

$$\lambda_{nj}=n^2+(-1)^j\frac{2}{\pi}a^{(j)}_{2n}+\frac{1}{n}\left((-1)^{j-1}\frac{2}{\pi}b^{(1,j)}_{2n}+\frac{2}{\pi}a^{(j)}_{2n}b^{(j)}_{2n}-\frac{4}{\pi^2}a^{(j)}_{2n}\hat{b}^{(j)}_{2n}\right)+$$

$$+O\left(\frac{b^{(1,j)}_{2n}}{n^2}\right)$$

gdje su $a^{(j)}_{2n},b^{(j)}_{2n}$ furijeovi koeficijenti nekih funkcija $\tilde{q}_j\in L_2[0,\pi]$, $\hat{b}^{(j)}_{2n}$ sinusni furijeovi koeficijenti funkcija $\theta\tilde{q}_j(\theta)$, $b^{(1,j)}_{2n}$ sinusni furijeovi koeficijenti funkcija $K_{1j}(\theta)\in L_2[0,\pi]$.

Literatura

[1] Гельфанд И.М.,Левитан Б.М., Об определении дифференциального уравнения по его спектралной функции, Изв. АН СССР, Сер.мат(1951)Т.15, 309-360.

[2] Pikula M., Vladičić V., Nedić D., Inverse Sturm-Liouville problems with homogeneous delay, Siberian Mathematical Journal,Vol 55,No.2,(2014),pp.301-308.UDC 517.95

[3] Freiling G. and Yurko V, Inverse problems for Sturm-Liouville diferential operators with a constant delay, Applied Mathematical Letters,(2012).

[4] Ambarzumjan V., Uber eine Frage der Eigenwerttheorie, Zeitshr.fr Physik, (1929)-Bd.53., -S.690-695.

[5] Borg S., Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe, Acta Math. (1946)- Bd.78.$N^{\underline{o}}$1. -S. 1-96.

[6] Pikula M.,Vladičić V., Marković O., A solution to the inverse problem for the Sturm-Liouville-type equation a delay, Filomat,27:7 Univerzitet u Nišu, Srbija,(2013),str.1237-1245.

[7] Pikula M.,Marković O., Nedić D., Computations of first forced regularized trace Sturm-Liouville operator with homogeneous delay,Papaer proceedings, Bisiness-tehnical college,Užice(2012),185-187.

[8] Pikula M., Vladičić V.,Nedić D., Određivanje potencijala q diferencijalnog operatora tipa Sturm-Liuvila sa homogenim kašnjenjem, Zbornik radova sa Druge matematičke konferencije Republike Srpske, Trebinje(2013),29-40.

[9] Pikula M., Kalčo I., Svojstvene vrijednosti operatora tipa Sturm-Liuvila sa promjenjivim kašnjenjem tipa $x - \tau(x)$,Zbornik radova sa Druge matematičke konferencije Republike Srpske, Trebinje(2013),73-85.

[10] Пикула М., Определениие дифференциального оператора штурма-Лиувилляс запаздывающим аргументом по двум спектрам,Математички весник 43,(1991),159-171.

[11] Пикула М., Об определение дифференциального уравнениияс переменным запаздыванием, Матхематица Монтиснигри, Вол VI,(1996),71-91.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6. i 7. juni 2014. godine

Šta to beše ugao?

Savo Ćebić
Visoka tehnička škola strukovnih studija u Zrenjaninu
cebics@gmail.com

Stručni rad

Apstrakt

Među geometrijskim figurama istaknuto mesto ima ugao. Postoje razni pristupi formiranju ovoga pojma kao i njegovom definisanju. U radu je ukazano kakve sve probleme mogu izazvati različiti pristupi ovome pojmu u školskoj nastavi matematike. Dat je i jedan savremeni pristup formiranja pojma ugla. Posebno je istaknuta nedoslednost u udžbeničkoj literaturi za osnovnu školu kad je u pitanju formiranje ovoga pojma. Pojam ugla kod svršenih učenika osnovne škole nije u potpunosti formiran!

1 Neke istorijske napomene

Pojam ugla je već u davna vremena uveden u grčku matematiku, nesumnjivo preuzet od Vavilonaca, veštih u korišćenju uglova zahvaljujući svome dobrom astronomskom iskustvu. No definicija ugla (kod Euklida, na primer), kao što ćemo kasnije videti, bila je tautologija (Euklid, antički grčki matematičar iz trećeg veka pre nove ere). Kod grčkih i svih evropskih geometričara do XVII veka razmatrani su samo uglovi manji od dva prava ugla. Tek je Ojler (Leonhard Euler, 1707-1783, švajcarski matematičar) uveo savremeno poimanje uglova (mereni u radijanima), koji su dobijali proizvoljnu vrednost - pozitivnu i negativnu. Prav ugao označava se slovom d od francuskog droit. Znak $<$ za označavanje ugla uveo je Erigon (Pierre Hérigone, 1580-1643, francuski matematičar i astronom, latinski: Petrus Herigonius) 1634. godine u knjizi "Cursus mathematicus, nova, brevi, et clara methodo demonstratus, per notas reales et universaels, citra usum cujuscunque idiomatis intellectu faciles". U "Trigonometry" Otreda (William Oughtred, 1575-1660, engleski matematičar), a posle i kod mnogih drugih autora znak se transformisao u savremeni $\angle$. Erigon je normalnost pravih označavao simbolom $\perp$. Oznaku a,b za ugao obrazovan pravim a i b primenjivali su prvo Bine (Jacques Philippe Marie Binet, 1786-1856, francuski matematičar i astronom) (1813), Mebijus (August Ferdinand Möbius, 1790-1868, nemački matematičar i astronom) (1827) i Favaro (Antonio Favaro, 1847-1922, italijanski matematičar) (1879).

2 Ugao u početnoj nastavi matematike

Dve prave u ravni koje se seku, razbijaju ravan na četiri oblasti čije granice su poluprave sa početkom u tački preseka. Uzimajući svaku od ovih oblasti zajedno sa svojom granicom, dobijamo figuru u ravni koju nazivamo ugao. Dakle, ugao je figura u ravni koju čine dve poluprave sa zajedničkim početkom, skupa sa oblašću koju ograničavaju. U početnoj nastavi, od dve moguće oblasti koje ograničava par polupravih sa zajedničkim početkom, bira se ona koja je konveksna, a što ističemo senčenjem dela te oblasti. Ove dve poluprave nazivamo krakovima, a njihov zajednički početak temenom ugla.

U realnoj nastavi poređenje uglova osmišljavamo njihovim merenjem uglomerom, ili još bolje, merenjem pomoću polukružnog kartončića bez ikakvih jedinica mere (podele na stepene).

Posebno se izdvaja onaj slučaj kad se dve prave seku tako da su sva četiri ugla koji tada nastaju jednaki. Te uglove tada nazivamo pravim a prave u tom položaju normalnim.

U ranom periodu, ne govorimo o uglu između dve paralelne prave, niti o uglu čiji se kraci poklapaju, iako i taj "nulti" ugao ima smisla. Vremenom, učenik shvata da kao što se pomoću duži meri rastojanje tačaka, da se slično pomoću poređenja uglova porede odstupanja pravaca koje dve prave linije određuju. U tom smislu pravci paralelnih pravih imali bi "nulto" odstupanje, tj. podudarali bi se, dok bi najveće odstupanje imali pravci koje određuju dve normalne prave.

Napomenimo da se u daljoj nastavi uvode i uglovi koji su "izdubljeni", da se na ugao gleda sa pozicije jedne od dve moguće orijentacije, tj. da se uvode pozitivni i negativni uglovi, te da se sa idejom o uglu kao veličini rotacije, njegov smisao dalje proširuje. Sva ta proširenja nisu u protivrečnosti sa početnom idejom o uglu o kojoj ovde govorimo, već se sa njom mogu u potpunosti uskladiti.

3 O problemu definicije pojma ugla

Po mišljenju merodavnih u nastavi geometrije pojam ugla izaziva najviše poteškoća. Teškoće nastaju delimično i zbog terminolpških netačnosti, a delimično zbog toga što se tu pojavljuje mešavina od nekoliko matematičkih pojmova, koji su nazvani istim imenom ugao. Ti su pojmovi međusobno različiti. Delimično poteškoće nastaju i zbog toga što je zapravo taj pojam i, realno gledajući, vrlo komplikovan. Do nedoumice dolazi pre svega što nam ista reč ugao služi za označavanje pojmova koji su više ili manje povezani, ali nisu sasvim identični, kao što su: sektor ravni, par polupravih, neka mera, itd. Razni matematičari su definisali ugao vrlo različito, pa ni sad još ne postoji saglasnost, ne samo u načinu definisanja, nego ni o samom pojmu ugla. Euklidovi elementi, prva knjiga, prvo poglavlje: Definicije (4. vek pre nove ere):

Ugao u ravni je uzajamni nagib dveju linija u ravni, koje se stiču i koje ne leže u istoj pravoj.

Ako su linije koje obrazuju ugao prave, ugao se zove pravolinijski.

Ako prava, koja stoji na drugoj pravoj, obrazuje sa ovom dva susedna jednaka ugla, svaki od njih je prav, a podignuta prava zove se normala na onoj na kojoj stoji.

Tup ugao je onaj, koji je veći od pravog.

Oštar je onaj, koji je manji od pravog.

Kako se reč "nagib" ovde javlja u "Elementima" prvi put, ovom definicijom nije pojam ugla sveden na već usvojene ili objašnjene pojmove. Sem toga, u toj definiciji je reč o linijama koje bi mogle biti i krive, a u matematici je dovoljno posmatrati pravolinijske uglove, jer umesto ugla obrazovanog dvema krivim može se uvek posmatrati ugao obrazovan tangentama tih krivih u njihovoj zajedničkoj tački.

U svom komentaru Euklidovih elemenata, akademik Anton Bilimović (1949, Prva knjiga), ističe:

"Euklidova definicija ugla predstavlja sa logičkog gledišta tautologiju. Pojam nagiba ne daje ni konkretnu predstavu o uglu, uzimajući naročito u obzir da je u ovoj rečenici ugao sastavljen od linija koje nisu obavezno prave. Istorijatu pojma ugla posvećena je dosta velika literatura. Pojam ugla, prostijeg, pravolinijskog, treba da bude raščlanjen na pojam geometrijske slike ugla - to su dve poluprave sa zajedničkim krajem - i na metodu, koja omogućuje da se slika dovede u vezu sa brojem, tj. na metriku ugla. Primetimo da Euklid uzima u obzir samo uglove koji nisu veći od dva prava ugla".

Lagranž (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813) definiše ugao kao razliku dvaju pravaca (Elementi geometrije, 1794). Bezu (E. Bézout, 1730-1783) u svom "Tečaju matematike" (1812) definiše ugao kao "veličinu okretanja, koja dovodi jedan krak u položaj drugoga". Ove dve definicije su očigledno manjkave, jer prva se zasniva na nejasnom pojmu razlike dvaju pravaca (ili, tačnije smerova), a druga na nedefinisanoj "veličini okretanja". Sem toga, Bezuova definicija, kao i neke druge, slične, ne odgovara nastojanju da geometriju izgradimo kao nauku o prostoru, u kojoj apstrahujemo od vremena, dakle i od kretanja.

Hankl (H. Hankel, 1839-1873) u svojoj "Teoriji kompleksnih brojeva" (1867) definiše ugao kao "lik koji obrazuju dve poluprave koje polaze iz jedne tačke".

Hilbert (D. Hilbert, 1862-1943) u svome delu Osnove geometrije (1899), usvaja u suštini istu definiciju i definiše ugao kao "sistem dveju polupravih" koje "polaze iz jedne tačke a pripadaju raznim pravim".

Bertran (J. Bertrand, 1822-1900) definiše u svom delu "Novo razviće elementarnog dela matematike" (1774) ugao kao deo ravni "koji je zajednički poluravnima koje su ograničene njegovim kracima".

Veroneze (G. Veronese, 1854-1917) predlaže u svojim "Osnovama geometrije" (1891) da se ugao definiše kao ukupnost polupravih u ravni, koje su "između" dveju polupravih sa zajedničkim početkom.

Miloš Radojčić u svojoj knjizi "Elementarna geometrija-osnove i elementi euklidske geometrije" (1961) komentarišući navedene definicije piše:

Prema dvema poslednjim definicijama ugao je površ ili oblast, ograničena dvema polupravim, a prema dvema definicijama koje stoje ispred njih ugao se sastoji iz dveju polupravih i njihovog zajedničkog početka i u stvari je izvesna izlomljena linija, koja ima samo jedno teme. Ako ugao shvatimo kao izlomljenu liniju nemamo mogućnosti da razlikujemo udubljen i ispupčen ugao. Ovo možemo samo ako ugao definišemo kao površ. I iz drugih razloga potrebno je govoriti o uglu kao o površi. U stvari potrebna su oba pojma. Treba samo izabrati za njih dva razna naziva. Tako možemo pomenutu izlomljenu liniju nazvati ugaonom linijom, a pod uglom podrazumevati deo ravni, ograničen ugaonom linijom; ili možemo tu liniju nazvati uglom, a odgovarajući deo ravni ugaonom površi (ili ugaonom oblašću ravni). - Usvajamo ono prvo. To činimo već i stoga što odgovara više običnoj upotrebi reči "ugao". Na primer, kad upoređujemo uglove po veličini i jedan ugao nazovemo većim od drugoga, ne upređujemo ugaone linije, nego delove ravni, koji su njima ograničeni. I kad sabiramo uglove, sabiramo "ugaone površi", a ne same linije. Isto je kad uglove merimo.

Zbog navedenog M. Radojčić u svojoj knjizi prvo definiše ugaonu liniju:

Lik koji se sastoji iz jedne tačke O i dveju polupravih p i q kojima je O zajednički početak, a koje pripadaju dvema raznim pravim, nazivaćemo ugaonom linijom. Tačku O nazivaćemo temenom, a poluprave p i q kracima te ugaone linije.

Nakon dokaza 11 teorema i navođenja 3 definicije (uvodi relaciju biti s iste strane ugaone linije) daje sledeću definiciju ugla:

Neka su p i q u izvesnoj ravni α dve poluprave sa zajedničkim početkom O i koje sačinjavaju, zajedno s tačkom O, ugaonu liniju ili pravu pq. Ukupnost tačaka te ugaone linije ili te prave pq i svih tačaka ravni a, koje su s jedne strane te ugaone linije ili te prave, nazivaćemo ugao. Zajednički početak polupravih p i q nazivaćemo temenom tog ugla, poluprave p i q njegovim kracima, a ugaonu liniju ili pravu pq njegovim rubom.

U udžbeniku Matematika za prvi razred zajedničkog srednjeg vaspitanja i obrazovanja (S. Prešić, B. Alimpić, 1978. Pokrajinski zavod za izdavanje udžbenika, Novi Sad) autori daju nešto modifikovanu definiciju ugla. Slično kao M. Radojčić prvo uvode pojam ugaone linije (mada u uvodnoj rečenici poglavlja Ugao, mnogougao, diedar, rogalj doslovno pišu: Među geometrijskim figurama koje od ranije dobro poznajete nalazi se i ugao. Razmatramo sada još neke činjenice u vezi sa uglom. I sada sledi priprema za definisanje i samo definisanje pojma ugla. Zašto, ako je taj pojam dobro poznat od ranije?):

Neka su Op i Oq dve poluprave neke ravni α, sa zajedničkom početnom tačkom O. Unija polupravih Op i Oq zove se ugaona linija pOq. Poluprave Op i Oq su kraci, a tačka O teme ugaone linije.

Uočimo sada pravu a kojoj pripada krak Op ugaone linije pOq, i neka su $a\sigma$ i aσвЂ^{TM} poluravni ravni α određene pravom a. Pri tom pretpostavimo da krak Oq pripada poluravni aσ. Slično, uočimo pravu b kojoj pripada poluprava Oq i neka su bП„ i bП„вЂ^{TM} poluravni ravni α određene pravom b, uz pretpostavku da krak Op pripada poluravni bП„. Ugao linija pOq deli skup tačaka ravni α koje joj ne pripadaju na dva disjunktna dela: σ П„ i σвЂ^{TM} П„вЂ^{TM}. Ove skupove zovemo ugaonim oblastima određenim ugaonom linijom pOq.

Definicija ugla. Ugao pOq je unija ugaone linije pOq i jedne od ugaonih oblasti određenih ovom ugaonom linijom.

Prema ovoj definiciji svaka ugaona linija određuje dva ugla.

Najmanje je razrađena ova definicija:

Uglom s temenom u tački O ili ravanskim sektorom nazivamo presek onih dveju poluravni kojih su rubovi, (tj. one prave koje određuju te poluravni), različiti i prolaze tačkom O.

Matematika, Opšta enciklopedija Larousse: Uglom nazivamo deo ravni ograničen dvema polupravim OA i OB sa zajedničkim početkom. Poluprave OA i OB zovu se kraci ugla; njihov zajednički početak O je teme ugla. Uglom između duži AB i AC nazivamo ugao s temenom A čiji su kraci poluprave AB i AC. Kraci ugla su poluprave, što znači da se na jednoj strani neograničeno produžuju, te ugao ne zavisi od toga koliki su mu stvarno nacrtani kraci.

Ova definicija je dobra za crtanje ugla, izrezivanje, merenje, ukratko za "intuitivnu" geometriju dece od 12 do 13 godina. No, ona će izazvati velike teškoće čim počnemo sabirati veći broj dovoljno velikih uglova. Pri tome se često daju pogrešna objašnjenja i definicije u kojima se primenjuje merenje po spirali (za uglove veće od 360Вє), što samo zamagljuje problem i uzrok je toga da se prema pojmu ugla mnogi počinju odnositi kao prema nekoj zamci.

Neke se teškoće mogu izbeći ako se rastereti pojam ugla: ugao postaje ne deo ravni, nego je ugao uređeni par zraka (polupravih) sa zajedničkim početkom (Gustave Choquet, Nastava geometrije,1964).

Dve uređene poluprave sa zajedničkim početkom obrazuju orijentisani ugao. Prva poluprava zove se prvi ili početni krak orijentisanog ugla. Druga poluprava zove se drugi ili krajnji krak orijentisanog ugla. (Mileva Prvanović, Matematika za prvi razred stručnih škola).

Rečnik matematičkih termina sa tumačenjima, u redakciji V. A. Ditkina:

Ugao - dva zraka (poluprave) koji ishode iz jedne tačke. Zraci koji obrazuju ugao, nazivaju se kracima ugla, a tačka iz koje oni ishode - temenom ugla. Pod tačkama ugla podrazumevaju se njegovo teme i sve tačke njegovih krakova.

Geometrija za prvi razred gimnazije, Vojislav Mihailović:

Skup od dve poluprave sa zajedničkom početnom tačkom zove se ugao. Poluprave su kraci, a zajednička tačka je teme ugla. Kraci ugla dele ravan u kojoj leže na dve oblasti, od kojih se jedna zove oblast ugla.)

No, deo teškoća ostaje; one su povezane sa sabiranjem uglova. Da se i te teškoće izbegnu, mora se u početku uvesti izvesna relacija ekvivalencije na skupu parova zraka (polupravih) i zatim definisati sabiranje u količničkom skupu po toj relaciji. Ta je procedura matematički sasvim korektna, ali je veoma glomazna i teško shvatljiva.

Da se izbegne ta glomaznost, neki autori zahtevaju egzistenciju "mere" na skupu uređenih parova zraka, kao i aditivnost te mere "za male uglove". Uz svu prividnu strogost takva je aksiomatika na kraju krajeva pogubna, zato što se u tom slučaju brišu bitne razlike između grupe uglova i aditivne grupe R; na primer, činjenica da u prvoj od tih grupa iz jednakosti $\theta + 0 = 0$ ne sledi

$\theta = 0$; s druge strane ta definicija loše funkcioniše već na samom početku učenja elementarne geometrije, jer ne dopušta iteraciju vrlo jednostavne operacije kao što je to udvostručavanje $\theta \longrightarrow 2\theta$.

Algebristima će se zasigurno učiniti da je sledeća definicija idealna:

Primetimo najpre da je skup translacija T ravni π normalni delitelj grupe kretanja $K^=$ (jer je translaciji konjugovana transformacija, s obzirom na neku izometriju, opet translacija). Količničku grupu $K^=/T$ zovemo grupom uglova. Ako je f kretanje, tada klasu kojoj ono pripada u količničkoj grupi zovemo uglom kretawa f. Za bilo koji par (A, B) zraka ravni π označimo sa f kretanje koje prevodi A u B i definišemo ugao (A, B) =ugao od f.

Ova definicija pretpostavlja dobro poznavanje algebarske teorije grupa. Sledeća definicija je opipljivija, identifikuje uglove s rotacijom oko neke tačke O:

Za svaku tačku O iz π uglom s vrhom u O zovemo svaku rotaciju oko O.

Za bilo koji par (A,B) zraka sa zajedničkim početkom O, uglom tog para zovemo rotaciju koja prevodi A u B. Taj ugao označavamo sa AB.

Skup uglova s vrhom u tački O nije dakle ništa drugo nego skup svih rotacija s centrom O. Prema tome, to je komutativna grupa. Tradicionalano usvojena aditivna simbolika za grupovnu operaciju u toj grupi opravdana je time što pojam mere ugla otkriva tesnu vezu između sabiranja realnih brojeva i sabiranja uglova. Pojam ugla bio bi gotovo nekoristan ako ne bismo znali upoređivati uglove s raznim vrhovima. Takvu komparaciju nam omogućuju translacije.

U matematici se katkada primenjuju i definicije kojima se izlaže proces nastanka predmeta, genetičke definicije:

Poluprava a okreće se u ravni oko tačke A dok ne padne na polupravu b. Deo ravni koju poluprava na taj način prelazi zove se ugao. Poluprave a i b zovu se kraci, a tačka A teme ugla. (Zlatko Šporer, O definicijama u matematici, Matematika, br. 1, 1987.)

Isti autor navodi i sledeće definicije ugla:

Ugao je figura koja se sastoji od dve poluprave koje imaju zajedničko teme.

Ugao je deo ravni između dve poluprave koje imaju zajedničko teme.

Sistem od dva zraka g_A i h_A koji izlaze iz iste tačke A zovemo uglom: $<(g_A, h_A)$. A zoveme teme ugla, a zrake g_A i h_A njegovim kracima.

Dve poluprave x i y s istom početnom tačkom O dele ravan na dva dela. Svaki se deo zove ugao. Ugao je trojka (x, y, π_0) koju čine dve poluprave sa zajedničkom početnom tačkom i jedan od dva dela ravni koju određuju te poluprave.

Rotacijom oko svoje početne tačke zrak opisuje lik koji zovemo uglom, a bilo koja njegova tačka, osim početne pri tome opisuje lik koji zovemo luk.

Ugao $\angle(h, k)$ ili $\angle(k, h)$ jeste par koji grade dve različite poluprave h i k koje imaju zajednički početak O i ne pripadaju istoj pravoj. Tačka O zove se teme (vrh), a poluprave h i k kraci posmatranog ugla.

Neka su A,B,C bilo koje tri date nekolinearne tačke prostora. Presek (zajednički deo) poluravni π_1 i π_2 zovemo uglom i označavamo ga sa $\angle BAC$ ili $\angle CAB$. (Poluravan ima granicu pravu AC i sadrži polupravu AB, poluravan ima za granicu pravu AB i sadrži polupravu AC).

Uređen par polupravih (x_1, x_2) s početnom tačkom O označavamo sa $\angle(x_1ox_2)$ i nazivamo uglom u tački O.

Klasu svih ekvivalentnih uređenih parova polupravih nazivamo uglom sa vrhom u tački O.

A. V. Pogorelov (istaknuti ruski matematičar) u svojoj knjizi Predavanja iz osnova geometrije (Harkov, 1959.), pre definicije pojma ugla dokazuje tri teoreme koje se odnose na uzajamni položaj zrakova (polupravih) u pramenu:

Teorema 1: Neka iz tačke O polaze dve poluprave a i b koje ne pripadaju jednoj pravoj. Ako poluprava h koja polazi iz tačke O seče odsečak AB s krajevima na polupravim a i b, tada ona seče i ma koji drugi odsečak s krajevima na tim polupravim.

Teorema 2: Neka su h, k, l tri zraka (poluprave) u ravni koji polaze iz tačke O. Ako zraci k i l leže u jednoj poluravni određenoj zrakom h i njegovim produžetkom , tada se jedan od tri zraka nalazi između dva ostala.

Teorema 3: Neka imamo četiri zraka koji polaze iz tačke O: h, k, l, m. Ako se l nalazi između h i m, a k između h i l, tada se k nalazi između h i m. Ako se k i l nalaze između h i m, tada se k nalazi ili između l i m ili između h i l.

Definicija: Neka su h i l zraci koji polaze iz jedne tačke O i ne pripadaju jednoj pravoj. Uglom (h, l) zvaćemo skup svih zrakova koji polaze iz tačke O i leže između zrakova h i l. Zraci h i l zovu se kraci ugla, a tačka O teme ugla.

U udžbeniku Matematika za prvi razred srednjeg obrazovanja i vaspitanja (V. Stojanović, D. Lipovac, V. Sotirović - Naučna knjiga, Beograd,1987.) u poglavlju Neke značajne figure pojam ugla se uvodi dvema definicijama:

Neka su pα i q poluravni jedne ravni i neka se ivice p i q seku u tački O. Presek ovih poluravni naziva se konveksan (ispupčen) ugao sa temenom O.

Unija dve poluravni jedne ravni sa neparalelnim ivicama, naziva se nekonveksan (konkavan) ugao. Time, naravno, nisu iscrpljene sve definicije ugla, a navedenim smo želeli pokazati raznovrsnost definicija (naravno, među njima ima i ekvivalentnih) jednog te istog pojma, koja se javlja u stručnoj literaturi. Svakako, veći broj definicija istog pojma nije pravilo nego izuzetak.

Neosporno je, međutim, bez obzira na to kako shvatamo ugao (kao deo ravni, uređen par polupravih, kao presek dveju poluravni ...), da je ugao geometrijska figura. Svaki put kad možemo odabrati od više definicija, nameće se pitanje koju definiciju upotrebiti, koja je najpogodnija. Odgovor na to pitanje nije baš jednostavan, jer zavisi od više elemenata. Svakako je potrebno uzeti u obzir stručnost definicije, jer gotovo svaka ima svoje dobre i loše osobine. Pri izboru definicije vrlo je važna i njena pedagoško-didaktička posebnost, jer definicija mora biti primerena dobu i nivou učenika da bi je on mogao shvatiti, a zatim i naučiti jer je njemu i namenjena. Izbor je uz to, ne zaboravimo, donekle i subjektivan čin autora teksta odnosno predavača. Ovisi o njegovim ličnim gledanjima na određeno područje matematike, o njegovim sklonostima, njegovom ukupnom znanju i iskustvu.

Posebno bismo upozorili na pedagošku stranu problema jer se ona u praksi ponekad zanemaruje. Naime, autor odnosno predavač koji nema dovoljno pedagoškog iskustva i znanja pri izboru definicije (i ne samo definicije, već i u opštem pristupu gradivu) odabraće najegzaktniju definiciju, sa strogo stručne strane besprekornu. Na taj se način autor "osigurao" od eventualnih prigovora kolega da se nije precizno izrazio. Pri tom je, naravno, zanemario samo jednu "sitnicu": takva je definicija učenicima preteška, oni je ne razumeju. U našim je primerima definicija ugla verovatno stručno najpreciznija ona s klasom ekvivalencije, no ako bismo je primenili, na primer, u osnovnoj školi očito bismo načinili promašaj u pedagoškom smislu jer je učenici (bar većina njih) ne bi mogla razumeti. Stoga smatramo pedagoški opravdanim da se neki (razumljivo, ne svaki) pojam na jedan način definiše, na primer, u nižim razredima osnovne škole, malo preciznije u višim razredima, još tačnije u srednjoj školi, a možda bismo tek na fakultetu primenili posve strogu definiciju. Pri tome je jasno da definicija ni na jednom nivou, ma koliko pojednostavljena, ne sme biti pogrešna, ne sme dati netačnu predstavu o pojmu koji definišemo. Može biti samo nepotpuna, nedovoljno precizna.

Važno je takođe da se odgovarajuća definicija u tekstu, knjizi, na predavanju izloži na pravom mestu i u pravo vreme, ni prerano (dok učenici nisu ovladali potrebnim pojmovima) ni prekasno (kada su pojam koji se definiše tako dobro upoznali da je definicija gotovo suvišna). Listajući razne udžbenike, lako ćemo naći niz primera u kojima definicija nije na pravom mestu tako da sa njom nismo postigli ono što smo trebali i što smo želeli i mogli postići.

Kada je reč o definicijama, valja napomenuti da se umešnost autora odnosno predavača ogleda i u tome da neke pojmove i ne definiše, da izbegne definiciju, a učenike upozna s pojmom i njegovim svojstvima putem praktične primene samog pojma. To se odnosi na pojmove koji su učenicima intuitivno i kroz primenu jasni, a nije ih baš jednostavno ispravno definisati.

4 Grupa uglova

Ovde će biti reči o jednoj od najvažnijih grupa, čije izučavanje počinje još u osnovnoj školi. Podeljena su mišljenja među metodičarima matematike o tome kako treba najracionalnije obrađivati ovu grupu u srednjim školama. Ovaj naš pogled na ovu problematiku mogao bi da bude povod za jednu opširniju stručnu raspravu o grupi uglova. Ovde ćemo ukratko izložiti osnovne ideje kojim smo se koristili u radu na formiranju pojma ugla kod učenika završnih razreda osnovne škole.

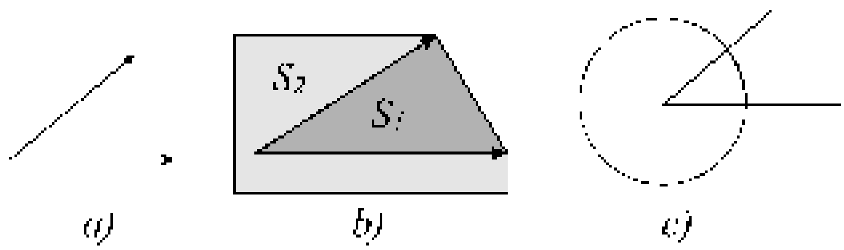
Kada proučavamo grupu uglova, moramo znati odgovoriti na sledeća tri pitanja:

1. Šta je ugao?

2. Kako uglove sabiramo?

3. Kako uglove merimo?

Analizirajmo najpre odgovore na ta tri pitanja koje nam nude udžbenici matematike za osnovnu i srednje škole. Kao odgovor na prvo pitanje najčešće,



kao što se vidi iz prethodnog poglavlja, se nudi jedna od sledeće tri definicije:

1. Ugao je figura koja se sastoji od dve poluprave koje imaju zajednički početak,

2. Ugao je deo ravni između dve poluprave koje imaju zajednički početak,

3. Ugao je luk koji određuju dve poluprave na krugu čiji je radijus jednak jedan, a centar je u zajedničkom početku datih pravih.

Ove tri definicije ilustrovane su sledećim skicama:

Pokušajmo pažljivo analizirati navedene tri definicije. Verujemo da nije lako pokazati njihovu ekvivalentnost i da nisu podjednako pogodne ako se želi dati, koliko toliko, precizan odgovor na ostala dva postavljena pitanja, tj. na sabiranje, odnosno merenje uglova. Još je veći izbor različitih odgovora na drugo pitanje. Tako je, na primer (slika b).) "očigledno" šta je zbir uglova S_1 i S_2 . To će biti $S_1 \cup S_2 = \Pi$, gde je Π ravan koju određuju date poluprave. Možemo, dakle, pisati $S_1 \cup S_2 = S_1 + S_2 = \Pi$. Dalje, takođe je "očigledno" šta je na primer $(S_1 + S_2) + S_1$. Analognim "zaključivanjem" je očigledno da je zbir $2n+1$ pravih uglova jednak ravni Π, $n \geq 2$. Slične nedorečenosti nalazimo u udžbenicima koji polaze od definicije 1, odnosno 3. Slična je situacija ako želimo dobiti odgovor na treće pitanje. U našim udžbenicima navode se sledeće rečenice:

"Ima više osnovnih jedinica za merenje uglova."

"Jedinica za merenje uglova je ugao koji je 360-ti deo punog ugla; ta jedinica se zove stepen."

"Ugao čiji je luk jednak radijusu kojim je taj luk opisan oko temena ugla naziva se radijan. Radijan je lučna mera ugla."

Pažljivi učenik se ne može zadovoljiti sa ponuđenim odgovorima. U njima je mnogo toga nedorečeno i neprecizno. Ako se i uvaže neki metodičko-pedagoški razlozi, onda još uvek ostaje da u većini slučajeva nije dat nikakav odgovor na postavljeno pitanje. Imamo osećaj da se potcenjuje nivo sposobnosti shvatanja naših učenika.

4.1 Grupa izometrija

U izgradnji grupe uglova polazimo od grupe izometrija. Navedimo neke činjenice o izometrijama ravni. Preslikavanje f ravni Π na Π nazivamo izometrijom, ili izometrijskim preslikavanjem ako se pri tom preslikavanju čuva rastojanje, tj. ako je $d(A,B) = d(f(A), f(B))$ za sve $A, B \in |Pi$. Dakle, ako je f izometrija, onda je rastojanje tačaka A i B jednako rastojanju tačaka f(A) i f(B).

Kao što je dobro poznato, svaka izometrija ravni:

1. Duž preslikava u duž. Središte duži $\overline{AB}$ u središte duži $\overline{f(A)f(B)}$.

2. Ako je $T \in \overline{AB}$, onda je $f(T) \in \overline{f(A)f(B)}$.

3. Pravu preslikava u pravu.

4. Dve paralelne prave preslikava u paralelnne prave.

5. Poluravan preslikava u poluravan.

Označimo sa I skup svih izometrija ravni Π , a sa $\circ$ operaciju kompozicije izometrija. Uređen par $(I, \circ)$ je grupa koju nazivamo grupom izometrija ravni Π. Kraće kažemo: I je grupa izometrija. Izometriju ravni korisno je ponekad zvati kretanjem.

Fiksnom tačkom izometrije f ravni Π nazivamo svaku tačku A za koju je $f(A) = A$. U pojedinim udžbenicima dokazane su sledeće dve teoreme o fiksnim tačkama.

1. - -Neka je $f$izometrija ravni Π za koju su A, B i C fiksne tačke. Ako tačke A, B i C ne leže na jednoj pravoj, onda je $f = i_\Pi$, tj. svaka tačka ravni Π je fiksna tačka.

2. - -Neka je $f$izometrija ravni Πza koju su tačke A i B fiksne tačke, $A \neq B$, $f \neq i_\Pi$. Tada je $f$simetrija ravni s obzirom na pravu koja prolazi tačkama A i B.

Rotacijom ravni Π oko tačke O, $O \in \Pi$, nazivamo svaku izometriju ravni kojoj je tačka O jedina fiksna tačka. Dalje, identičko preslikavanje ravni i_Π smatramo rotacijom.

Označimo sa $R(O)$ skup svih rotacija ravni Π oko tačke O. Vredi sledeća teorema:

1. - -Svaka rotacija ravni je kompozicija dveju osnih simetrija; dakle $R(O) = f_O \circ g_O$ (f_O i g_O su osne simetrije čije ose prolaze tačkom O).

Za skup rotacija $R(O)$ vredi:

1. Ako su f i g elementi skupa $R(O)$, onda je i $f \circ g \in R(O)$.

2. Ako su f, g , $h \in R(O)$, onda je $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

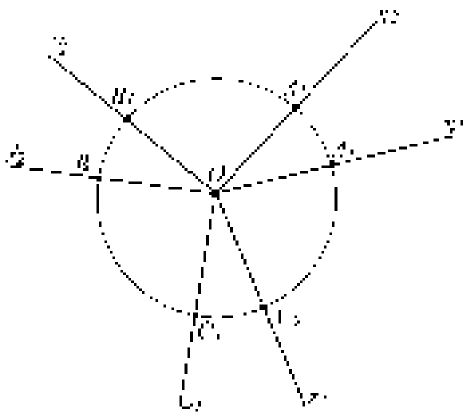
3. $i_\Pi \in R(O)$ i $i_\Pi \circ f = f \circ i_\Pi = f$ za svaku rotaciju f.

4. Ako je $f \in R(O)$, onda postoji f^{-1} i $f^{-1} \in R(O)$.

5. Ako je $f, g \in R(O)$, onda je $f \circ g = g \circ f$.

Znači, $(R(O), \circ)$ je komutativana grupa.

4.2 Ugao



Označimo sa S skup svih polupravih ravni Π sa početkom u tački O. Svaka takva poluprava seče krug $K\,(O, r)$u samo jednoj tački.

Skup $S \times S$ je skup svih ureðenih parova polupravih. Setimo se da za dva ureðena para, na primer, $(x_1,\, x_2)$ i (x_1', x_2') kažemo da su jednaka onda i samo onda ako je $x_1 = x_1' \wedge x_2 = x_2'$. U skupu $S \times S$ svih ureðenih parova polupravih definiEY̌imo relaciju $\approx$ na sledeći način: Ureðen par polupravih $(x_1,\, x_2)$ je u relaciji $\approx$ sa ureðenim parom (y_1, y_2) tj. $(x_1,\, x_2) \approx (y_1, y_2)$ ako postoji rotacija f, $f \in R(O)$, koja preslikava polupravu x_1 na x_2 i y_1 na y_2. Upravo definisana relacija je relacija ekvivalencije, tj. vredi:

1. $(x_1,\; x_2) \approx (x_1,\, x_2)\,,$

2. $((x_1,\, x_2) \approx (y_1,\, y_2)) \Rightarrow ((y_1,\, y_2) \approx (x_1,\, x_2))\,,$

3. $[(x_1,\, x_2) \approx (y_1,\, y_2) \wedge (y_1,\, y_2) \approx (z_1,\, z_2)] \Rightarrow ((x_1,\, x_2) \approx (z_1,\, z_2))\,.$

Dakle, relacija $\approx$ je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Koji je intuitivni smisao uvoðenja relacije ekvivalencije $\approx$? Mi bismo hteli reći da, na primer, ureðeni parovi $(x_1,\, x_2)$ i (y_1, y_2) na prethodnoj slici odreðuju isti ugao i, prema tome da možemo pisati $\angle\,(x_1 O\, x_2) = \angle\,(y_1 O\, y_2)$.Meðutim, uređeni parovi $(x_1,\, x_2)$ i (y_1, y_2) međusobno su različiti, i prema tome, ne vredi $(x_1,\, x_2) {=} (y_1, y_2)$. Kad god se nalazimo pred sličnim problemom, onda izlaz tražimo tako da umesto jednakosti definiEY̌emo ekvivalentnost elemenata datog skupa. Upravo u takvim situacijama uvođenje relacije ekvivalencije dobija puno opravdanje. Relacija $\approx$ je relacija ekvivalencije u skupu $S \times S$ svih uređenih parova polupravih ravni Π sa početkom (temenom, vrhom) u tački O, $O \in \Pi$. Ta relacija ekvivalencije prirodno proizvodi razbijanje skupa $S \times S$ na klase ekvivalencije (particije). U istoj klasi ekvivalencije skupa $S \times S$ nalaze se svi međusobno ekvivalentni uređeni parovi polupravih. Svaki član particije, tj. ***klasu svih ekvivalentnih parova polupravih nazivamo uglom sa temenom u tački O.*** Prema tome, količnički skup $S \times S/\approx$,tj. skup klasa ekvivalencije je skup uglova sa temenom u tački O. Označimo taj skup sa $\Upsilon(O)$. ДЊesto ćemo izabrati nekog *predstavnika ugla*, tj. uređen par polupravih, i reći za njega da je ugao. Naravno, *moramo biti svesni nepreciznosti takvog načina govora.*

Za neke uglove uvodimo posebne nazive, na primer:

1. $\angle(x_1 O x_1)$ je **ugao nula (nula ugao).**

2. $\angle(x_1 O x_2)$ je **pravi ugao** ako je $x_1 \perp x_2$, tj. prava koja sadrži x_1 okomita je na pravu koja sadrži x_2. (Prava y je okomita na pravu x ako se simetrijom s obzirom na pravu x preslikava na samu sebe.)

3. $\angle(x_1 O x_2)$ je **ispružen ugao** ako je $x_1 \bigcup x_2$ prava.

4.3 Sabiranje uglova

Definisaćemo sabiranje $+$ u skupu $\Upsilon(O)$ tako da će $(\Upsilon(O), +)$ biti komutativna grupa. Istaknimo odmah bitno svojstvo te grupe. Grupa $\Upsilon(O)$ izomorfana je sa grupom rotacija $R(O)$. Upravo postojanje tog izomorfizma jedan je od bitnih razloga da neki matematičari definišu uglove kao rotacije. Sa stanovišta teorije grupa takvoj definiciji nema prigovora.

Neka su data dva ugla, na primer $\angle(x_1 O x_2)$ i $\angle(z_1 O z_2)$. To znači da je uređen par polupravih (x_1, x_2) predstavnik ugla $\angle(x_1 O x_2)$. Umesto predstavnika drugog ugla možemo odabrati novog predstavnika. Naime, ako se z_1 rotacijom f preslika na z_2, onda će se tom istom rotacijom x_2 preslikati na polupravu koju označimo sa y_2. Dakle,

$$\angle(z_1 O z_2) = \angle(y_1 O y_2), \;\; y_1 = x_2.$$

Definišimo sabiranje uglova:
$\angle(x_1 O x_2) + \angle(x_2 O y_2) = \angle(x_1 O y_2)$.

To će biti ujedno i zbir uglova $\angle(x_1 O x_2)$ i $\angle(z_1 O z_2)$. Dakle, zbir dva ugla definišemo tako da najpre izaberemo predstavnike tih uglova i njihov zbir će biti predstavnik ugla koji je zbir datih uglova. Ako definišemo sabiranje uglova na opisani način, onda vredi:

1. Neka su $\angle(x_1 O x_2)$ i $\angle(y_1 O y_2)$ uglovi, onda je i $\angle(x_1 O x_2) + \angle(y_1 O y_2)$ ugao koji pripada skupu $Y(O)$.

2. $[\angle(x_1 O x_2) + \angle(y_1 O y_2)] + \angle(z_1 O z_2) = \angle(x_1 O x_2) + [\angle(y_1 O y_2) + \angle(z_1 O z_2)]$.

3. $\angle(x_1 O x_2) + \angle(y_1 O y_1) = \angle(x_1 O x_2)$.

4. $\angle(x_1 O x_2) + \angle(x_2 O x_1) = \angle(x_1 O x_1)$.

$$5. \angle(x_1 O x_2) + \angle(y_1 O y_2) = \angle(y_1 O y_2) + \angle(x_1 O x_2).$$

Dakle, zbir uglova je ugao. Sabiranje uglova je asocijativno. Postoji nula ugao za koji vredi 3. Za dati ugao $\angle\,(x_1 O\, x_2)$ postoji $\angle\,(x_2 O\, x_1)$ i njihov zbir je nula ugao. Sabiranje uglova je komutativno. Navedena svojstva sabiranja uglova su neposredna posledica definicije sabiranja i svojstava rotacije. Istaknimo da zbir ne zavisi o izboru predstavnika. $(\Upsilon\,(O)\ ,+)$ je komutativna grupa, gde je $\Upsilon\ (O)$ skup uglova sa temenom u tački O, a $+$ operacija sabiranja uglova.

Oduzimanje uglova i množenje uglova sa celim brojevima sprovodi se prema shemi kako se to radi u bilo kojoj komutativnoj grupi.

Uz svaku tačku O ravni Π vezana je grupa uglova $\Upsilon\,(O)$. Sad se, prirodno, nameće sledeće pitanje: Kakva je veza između grupa koje su vezane za različite tačke ravni? Odgovor na to pitanje vrlo je jednostavan. Naime, grupe $\Upsilon\,(O)$ i $\Upsilon\,(O\,')$ su izomorfne, $O,\, O\,' \in \Pi$.

Objasnimo malo detaljnije kako dolazimo do izomorfizma tih grupa. Naime, tačkama O i $O\,'$ jednoznačno je određen vektor čiji je predstavnik orijentisana duž $\overrightarrow{OO\,'}$. Označimo taj vektor sa $\overrightarrow{a}$. Vektorom $\overrightarrow{a}$ određena je translacija ravni Π, i tu translaciju označimo sa T, $\mathrm{T}\,(O) = O\,'$.Neka je α ugao sa temenom u tački O, $\alpha \in \Upsilon\,(O)$, tj. $\alpha = \angle\,(x_1 O\, x_2)$, gde je uređen par polupravih $(x_1,\, x_2)$ predstavnik ugla α. Translacija Tje izometrija, i neka se poluprava x_1, odnosno x_2 tom izometrijom preslika na polupravu y_1, odnosno y_2. Uređen par polupravih $(y_1,\, y_2)$ neka bude predstavnik ugla β, $\beta \in \Upsilon\,(O\,')$.Pridružimo uglu α ugao β. Uočimo da je $x_1 || y_1$ i $x_2 || y_2$. Za upravo opisano pridruživanje $\alpha \mapsto \beta$ uobičajeno je reći: B»Uglovi sa paralelnim kracima su jednakiB«. Interesantno je dati pravu interpretaciju toj teoremi u smislu definicije ugla koju smo ovde usvojili.

Dakle, svakom uređenom paru polupravih sa početkom u tački O translacijom T prudružen je uređen par polupravih sa početkom u tački $O\,'$. Prema tome, tim preslikavanjem indukovano je preslikavanje koje svakom uglu sa temenom u tački O pridružuje ugao sa temenom u tački $O\,'$. Označimo to preslikavanje sa h, $h:\ \Upsilon\,(O) \to \Upsilon\,(O\,')$. Preslikavawe h je upravo traženi izomorfizam grupa.

Naime, nije teško proveriti da je h monomorfizam i epimorfizam, tj. h je bijekcija sa $Y\,(O)$ na $\Upsilon\,(O\,')$. Da je preslikavawe h dobro definisano što se grupovnih operacija tiče, lako se može pokazati ako se imaju na umu svojstva grupe rotacija i grupe translacija. Trebalo bi pokazati da vredi:

$$h\left[\angle\,(x_1 O\, x_2) + \angle\,\left(x_1' O\, x_2'\right)\right] = h\,(\angle\,(x_1 O\, x_2)) + h\left(\angle\,\left(x_1' O\, x_2'\right)\right),$$

gde su $\angle\,(x_1 O\, x_2)$ i $\angle\,(x_1' O\, x_2')$ bilo koja dva ugla iz $\Upsilon\,(O)$.

Kod B»grafičkog sabiranja uglovaB« postupa se na sledeći način: odabere se bilo koja tačka ravni; zatim, ako treba sabrati dva ugla (predstavnike uglova) nađemo pomoću translacije njihove pripadne slike u odabranoj tački i izvršimo sabiranje.

U sličnoj situaciji nalazimo se kada proučavamo vektorski prostor usmerenih duži koje imaju zajednički početak (radijus-vektor), $V^2\,(O)$, i vektorski prostor V^2 svih usmerenih duži ravni Π. Ako želimo sabrati dva vektora ravni Π, onda odaberemo njihove predstavnike, tj. usmerene duži, i to takve predstavnike da te orijentisane duži imaju isti početak, a to znači da pripadaju istom vektorskom prostoru radijus-vektora. Zbir tih predstavnika je predstavnik vektora koji je zbir zadatih vektora. Sve radijus-vektore koji nastaju iz zadatog radijus-vektora pomoću translacija proglašavamo ekvivalentnim, i to će biti vektor ravni Π(B»slobodni vektorB«). Malopre opisani izomorfizam h omogućava nam da se nađemo u sličnoj situaciji. Pomoću translacija proglašavamo uglove ekvivalentnim, i na taj način se oslobodimo da moramo ugao vezati za zadatu tačku (teme). Dobro je misliti na izgradnju vektorskog prostora svih usmerenih duži ravni Π, pa se sličnim postupkom rukovoditi u izgradnji grupe uglova Υu ravni Π.

Istaknimo još jednom povezanost rotacija i uglova. Naime, svaka poluprava sa početkom u tački O seče krug $K\,(O,r)$ u jednoj tački. Poluprave uređenog para $(x_1,\,x_2)$ seku krug u dve tačke, recimo A_1 i A_2.

Postoji jedna i samo jedna rotacija $f, f \in R\,(O)$, koja preslikava tačku A_1 na tačku A_2, tj. koja preslikava polupravu x_1 na x_2. Prema tome, tu rotaciju $f$mogli bismo zadati pomoću tačaka A_1 i A_2, odnosno pomoću polupravih x_1 i x_2. Međutim, tu istu rotaciju $f$određuju i neki drugi uređeni parovi polupravih. Svi uređeni parovi polupravih koji određuju rotaciju $f$međusobno su ekvivalentni, tj. pripadaju istom uglu. Zato se, npr., za rotaciju $f$kaže: B»Rotacija za ugao ...B«. Prema shvatanjima nekih savremenih matematičara, **ugao** koji određuje uređen par polupravih $(x_1,\,x_2)$ **je rotacija** koja preslikava x_1 na x_2.

4.4 Merenje uglova

Skup svih realnih brojeva $\Re$ je komutativna grupa s obzirom na uobičajeno sabiranje realnih brojeva. Sa uobičajenom topologijom prave to je i topološka grupa, tj. sabiranje je neprekidna funkcija, odnosno preslikavanje $x\alpha \to x,\, x \in \Re$ je neprekidno. Ta topološka grupa je i povezana. Jedine njene topološke podgrupe (zatvoreni podskupovi) su oblika $r{\cdot}Z,\; r \in \Re$; Zje skup celih brojeva. Takve su, na primer, podgrupe $Z,\; 2Z = \{2z \mid z \in Z\},\; 2\pi Z = \{2\pi z \mid z \in Z\}$, itd. Količnička ili faktor-grupa $\Re/rZ = \{x \cdot Z \mid x \in \Re\}\;\; r \neq 0$ takođe je topološka grupa, prostor te grupe je homomorfan sa krugom.

Prirodni homomorfizam

$$f:\; \Re \to \Re/rZ,\;\; f\,(x+y) = f\,(x) + f\,(y)$$

je neprekidno i otvreno preslikavanje. Grupe $\Re/r_1Z$ i $\Re/r_2Z$ su izomorfne, $r_1 \cdot r_2 \neq 0$. Označimo sa $\boldsymbol{C}$ multiplikativnu topološku grupu svih kompleksnih brojeva z za koje je $|\,z\,| = 1$. Grupa $\boldsymbol{C}$ izomorfna je sa grupom $\boldsymbol{R}$ svih rotacija ravni Π oko date tačke, npr. tačke O. Dalje je grupa $\boldsymbol{C}$ izomorfna sa grupom $\Upsilon\,(O)$; $\Upsilon\,(O)$ je grupa uglova sa temenom u tački O. Dakle vredi:

$\Re \xrightarrow{f} \Re/rZ \approx \boldsymbol{C} \approx R \approx \Upsilon\,(O),\; r \neq 0.$

Prirodni homomorfizam $f:\; \Re \to \Re/rZ$ i nenaznačeni izomorfizmi daju **homomorfizam topoloških grupa** h,

$$h\ :\ \Re \to \Upsilon(O)\ , \qquad h(x+y) = h(x) + h(y)\ .$$

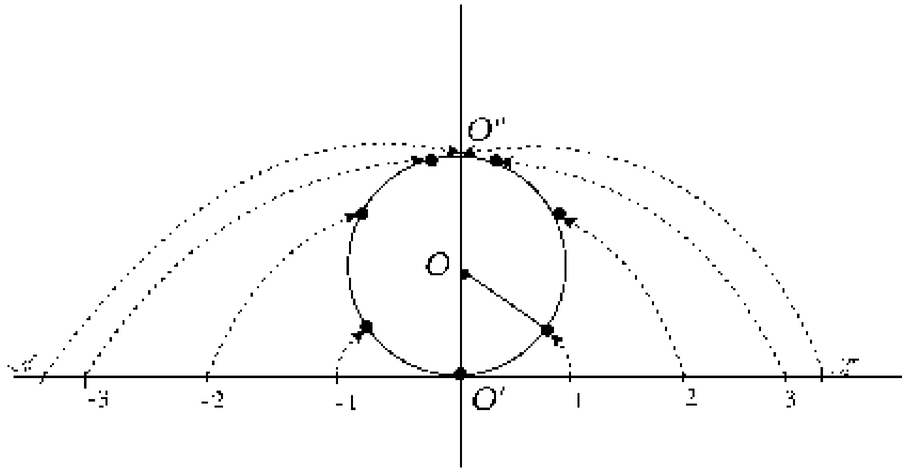
Homomorfizam h nije jednoznačno određen sa grupama $\Re$ i $\Upsilon(O)$. To se lako vidi na taj način kad se bilo koji topološki automorfizam grupe $\Re$ ukomponuje sa datim homomorfizmom h.

Bilo koji topološki automorfizam f :

$f\ (x+y) = f(x) + f(y) \quad x, y \in \Re$ oblika je $f(x) = ax\ , \quad a \in \Re$.

Dakle, ako je $h\ :\ \Re \to \Upsilon(O)$, onda je $h \circ f$ takođe homomorfizam topološke grupe $\Re$ na topološku grupu $\Upsilon(O)$. O skupu svih takvih homomorfizama može se više saznati ako se upozna sa *Pontrjaginovom teorijom dualiteta.* **Svaki homomorfizam topološke grupe $\Re$ na topološku grupu $\Upsilon(O)$ nazivamo merom uglova.** Jasno je da se tu zapravo radi o reprezenatciji grupe $\Re$ u grupu $\Upsilon(O)$, i da to nije mera u najstandardnijem značenju reči mera.

Sad možemo postaviti pitanje. E ta se od svega toga treba i mora reći učenicima? Ponekad nam se čini da autori nepotrebno i svesno B»štedeB« učenike u traženju prikladnog odgovora na pitanje šta je mera ugla. Evo jednog od mogućih odgovora. Za predstavnike uglova možemo odabrati uređene parove polupravih sa temenom u tački ***O*** tako da je uvek prvi član para poluprava koja prolazi tačkom ***O'*,** kao na slici. Prema tome, ugao će biti u potpunosti određen još jednom tačkom kruga ***K(O,1)*,** čiji je centar u tački ***O***, a radijus jednak ***1***. Nastavnik mora biti siguran da je svakom učeniku jasna veza između uglova i tačaka toga kruga. Zatim se prelazi na složeniji deo posla. Svaki učenik mora shvatiti da je svakom realnom broju pridružen ugao. Ako je brojevima $\boldsymbol{x}$, odnosno $\boldsymbol{y}$, pridružen ugao α, odnosno ugao β, onda će broju x+y biti pridružen ugao $\alpha + \beta$. Dalje, ugao α će biti pridružen ne samo jednom broju.



Priloženom slikom učenicima se naznačava postojanje homomorfizma h : $\Re \to Y(O)$, tj. pridruživanja koje svakom realnom broju pridružuje ugao sa temenom u tački ***O***. Ako je realnom broju $\boldsymbol{t}$ pridružen ugao α, onda će i svakom broju x, $x \in \{t + 2k\pi \mid k \in Z\}$ biti pridružen ugao α. Svaki od tih brojeva nazivamo mernim brojem ugla α. Različite mere dobijamo tako da promenimo

B»meriloB« na pravoj koju B»namotavamoB« na jedinični krug. Ako je broju π pridružen ispružen ugao, onda takvu meru nazivamo merom u radijanima. Ostale standardne mere dobijamo na uobičajeni način, zavisno o tome koji je merni broj ispruženog ugla.

Uvođenje mere ugla (ne ulazeći podrobnije u ovaj inače dosta suptilan postupak) mogli bismo skicirati na sledeći način:

Meru ugla uvodimo najčešće "namotavanjem" brojevne prave na krug jediničnog poluprečnika (tačnije reč je o eksponencijalnom preslikavanju brojevne prave na krug). Pri tome centar kruga obično stavljamo u početak koordinatnog sistema (X, O, Y), a brojevnu pravu okomito na X-osu kao tangentu kruga u tački s koordinatama $A(1, 0)$ i postavimo je tako da u tački A bude i nulta tačka brojevne prave. Pozitivni deo prave namotava se na krug u suprotnom smislu od kretanja kazaljke na časovniku, a negativni deo prave namotava se u smislu kretanja kazaljke na časovniku. Budući da smo brojevnu pravu dobili, kao što je poznato, uvođenjem koordinatnog sistema na pravoj (a time je svakoj tački prave pridružen jedan i samo jedan realni broj), s njim smo uveli i *meru* na pravoj koja se namotavanjem prave na krug prenosi na krug. Realni brojevi pri tome su preslikani na krug k tako da je svakom realnom broju t pridružena tačka $E(t)$ kruga k. Krug na koji su na opisani način preslikani (smešteni) realni brojevi naziva se brojevni ili trigonometrijski krug, a svi ovi brojevi su i mere odgovarajućih uglova (u radijanima).

Kako je obim (dužina) kruga (za $r = 1$) $O = 2\pi$ to je brojevima $t + 2\pi, t - 2\pi$, $t + 4\pi$...uopše $t + 2n\pi$, $n \in Z$pridržena ista tačka kruga.

Ako sa x_1 označimo pozitivni deo X- ose i sa a_1 ma koju polupravu s početnom tačkom u centru (O) kruga, realni broj koji je pridružen uglu $\angle x_1Oa_1$ zove se *mera* tog ugla. Tim je pridružuvanjem opruženom uglu pridružen broj π na brojevnom krugu (jer je $O = 2\pi$) i kažemo da je mera opruženog ugla π radijana.

Ako je mera ugla broj (t) veći ili jednak od 0, manji od 2π označimo ga sa $t'(0 \le t' < 2\pi)$ i zovemo ga glavnom merom ugla. Ako je t'mera nekog ugla, onda je i svaki broj $t' + 2n\pi$, $n \in Z$ mera istog ugla.

Mera ugla je dakle funkcija koja preslikava skup realnih brojeva R na skup uglova $K(O)$ što zapisujemo sa $m : R \to K(O)$.

Naravno da određivanje mere ugla opisanim postupkom (da teme ugla bude u centru brojevnog kruga) ne predstavlja nikakvo ograničenje, jer ako se teme ugla čiju meru želimo odrediti ne nalazi u centru kruga, njegovu meru odredićemo tako da odredimo meru njemu kongruentnog ugla s temenom u centru kruga. Kako svi kongruentni uglovi imaju istu meru, na taj način odredili smo i meru ugla s temenom u ma kojoj tački ravni.

Do mere ugla dolazimo dakle preslikavanjem brojevne prave na krug jediničnog poluprečnika. Ponovimo još najbitnije za naše razmatranje: *ugao je geometrijska figura, mera ugla jeste broj.* Ovo znači da *radijan nije ugao, nego mera (merni broj) ugla.*

Napomenimo ovde da ni sami matematičari nisu oduvek strogo vodili računa o preciznosti izražavanja (a značajne zasluge za tačno izražavanje u matematici imaju matematičari-logičari). Tako ćemo u starijim knjigama često naći da se pod uglom podrazumeva i geometrijska figura, a takođe i mera ugla. Dakle, ti se pojmovi strogo ne razdvajaju iako je iz konteksta jasno na šta se misli. Takođe i danas, radi jednostavnosti, često kažemo, na primer, umesto: B»ugao s merom $\frac{\pi}{3}$ radijanaB« kraće: "ugao od $\frac{\pi}{3}$ radijana" ili samo: "ugao $\frac{\pi}{3}$".

Na kraju ovoga poglavlja dajemo jednu bitnu napomenu. Ako se neka jedinica za merenje može definisati čisto geometrijski, kažemo da je to ***apsolutna jedinica za merenje***. U euklidskoj geometriji postoji apsolutna jedinica merenja samo za ugao. Kao jedinicu za merenje uglova uzimamo u prvom redu ***radijan***. To je takav centralni ugao kruga (ispravnije: mera centralnog ugla kruga) koji odgovara luku čija je dužina jednaka poluprečniku kruga. Ili, preciznije: Radijan je mera ugla između dva poluprečnika koji na krugu isecaju luk dužine jednake poluprečniku (1 rad = 1). S druge strane kao jedinica za merenje uglova uzima se i jedan ***stepen***. To je devedeseti deo pravog ugla. U oba slučaja do jedinice za merenje uglova dolazi se čisto geometrijskim putem. Potpuno drugi položaj imaju jedinice za merenje dužina u euklidskoj geometriji. Jedna od najčešćih jedinica je metar i njegovi delovi. U raznim udžbenicima data je i najsavremenija definicija metra. No, prototip metra (etalon) izrađen od platine i iridijuma čuva se u Parizu. Dakle, za metar možemo reći da je rastojanje dvaju zareza na šipci od legure platine i iridijuma. Dužinu koju merimo upoređujemo (neposredno ili posredno) s jednim *fizičkim telom*, s prototipom. To nije slučajno nego je karakteristično za euklidsku geometriju. U njoj ne postoje geometrijska sredstva na osnovu kojih bismo uspeli doći do neke dužine koju bismo mogli u svakom momentu reprodukovati na sličan način, kao što je to moguće s jedinicom za merenje uglova. Dakle, u euklidskoj geometriji ne postoji mogućnost da se čistim matematičkim putem otkrije neka dužina kojoj bi se mogla dati prednost kao jedinici za merenje ostalih dužina. Ova činjenica ukazuje na duboku razliku između ravni Lobačevskog i euklidske ravni. Naime, ako se odabere za jedinicu merenja dužina u geometriji Lobačevskog poluprečnik zakrivljenosti njegovog prostora, tj. ako uzmemo da je $r = 1$, onda sve formule hiperboličke trigonometrije dobijaju vrlo jednostavan oblik. To znači da u ravni Lobačevskog postoji određena dužina koju je praktično odabrati za jedinicu merenja.

4.5 Ugao u nastavi matematike u našoj osnovnoj školi

U nastavi matematike u našoj osnovnoj školi pojam ugla se prvi put javlja u drugom razredu. Ugao se učenicima predstavlja putem crteža sa osenčenom unutrašnjosti. Uočavaju se samo konveksni uglovi. Pomoću crteža se uvodi i pojam pravog ugla koji se crta na kvadratnoj mreži i pomoću trougaonog lenjira (trougaonika). Ugao se ne definiše. Grafički se uvodi pojam mnogougla.

Prvi put u nastavi matematike ugao se definiše u trećem razredu osnovne škole (V. Sotirović, D. Lipovac, M. Latković: Matematika za 3. razred osnovne škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2003.). Autori ovde praktično daju dve definicije ugla! Pre posebno naglašene definicije pišu:

Neka se poluprava OA obrće oko svoje početne tačke O. U svakom novom položaju OA_1,OA_2, ... ona će sa svojim početnim položajem obrazovati geometrijsku figuru u ravni koja se zove UGAO.

Zajednička početna tačka je TEME ugla, a poluprave su KRACI ugla.

Dve poluprave sa zajedničkom tačkom dele ravan na dve oblasti: jedna je UNUTRAŠNjA OBLAST ugla U_u, a druga je SPOLjAŠNjA OBLAST ugla U_s.

Posle ovog uvoda sledi posebno naglašena definicija ugla:

Dve poluprave sa zajedničkom početnom tačkom i sa delom ravni između njih čine figuru koja se naziva UGAO.

Dosta zbunjujuće! Iz prvog dela teksta da se zaključiti da je ugao LINIJA, a iz istaknute definicije da je POVRŠ. Posebno je nejasan izraz *deo ravni između njih*, pogotovu što je pre definicije uveden pojam *unutrašnja oblast ugla*. Ove dve definicije nikako nisu ekvivalentne!

Potpuno je jasno da se na ovom uzrastu učenika ne može dati stroga definicija ugla. Ali, jasno je i to da se ne mogu dati dve definicije ugla (jedna je genetička), koje su potpuno različite!

Na ovom uzrastu uglovi se dele na OŠTRE, TUPE i PRAVE. Ne uvodi se pojam ispruženog i nekonveksnog ugla. Nema operacija. Pojam ugla još nije formiran.

U četvrtom razredu osnovne škole u nastavi matematike pojam ugla (i sama reč ugao) ne pojavljuje se ni na jednom mestu. Kontinuitet formiranja pojma ugla prekinut je za celu jednu školsku godinu!

Pojam ugla smo upoznali ranije. Ovim rečima počinje obrada teme, u petom razredu osnovne škole, koja nosi naslov *UGAO* (V. Mićić, V. Jocković: Matematika 5, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2002.). A onda sve ispočetka! Pre definicije pojma ugla uvodi se pojam UGAONE LINIJE. Kaže se da poluprave AB i AC čine UGAONU LINIJU.

I dalje:

Svaka od ugaonih linija deli ravan kojoj pripada na dva podskupa tačaka. Tačke koje pripadaju jednom od podskupova mogu se među sobom povezati linijom koja ne seče ugaonu liniju. Za te tačke kažemo da se nalaze sa iste strane ugaone linije. Isto tako, tačke koje ne pripadaju istom podskupu ne mogu se povezati linijom koja ne seče ugaonu liniju. Za njih kažemo da su sa različitih strana ugaone linije. Sve tačke koje su sa iste strane ugaone linije čine jednu oblast. Znači, ugaona linija određuje dve oblasti u ravni kojoj pripada.

I sada sledi definicija:

UNIJA UGAONE LINIJE I JEDNE OD OBLASTI KOJU TA LINIJA ODREĐUJE U RAVNI NAZIVA SE UGAO.

Poluprave koje čine ugaonu liniju su KRACI UGLA, njihova zajednička tačka je TEME UGLA, a uočena oblast (misli se uvek na jednu od onih koje su određene ugaonom linijom) je oblast ugla.

Dakle, nema pojmova: unutrašnja i spoljašnja oblast ugla, dela ravni između polupravih sa zajedničkom tačkom, kao ni obrtanja poluprave oko početne tačke, koji su uvedeni u trećem razredu.

U petom razredu učenici se upoznavaju sa: ispupčenim i udubljenim uglovima, punim uglom, centralnim uglom, kružnim lukom, tetivom. Vrši se *prenošenje ugla.* Uglovi se upoređuju. Uvode se pojmovi: susedni, uporedni i unakrsni uglovi. Uglovi se sabiraju i oduzimaju. Definišu se komplementni i sumplementni uglovi. Uvodi se STEPEN za jedinicu mere ugla (sa svojim delovima: MINUT (ugaoni minut) - 60-ti deo stepena, SEKUND (ugaoni sekund) - 60-ti deo minuta). Posmatraju se paralelne prave i transverzale i uglovi koje one određuju. Na kraju ove nastavne teme izučavaju se uglovi sa paralelnim i uglovi sa normalnim kracima.

I to je sve što se tiče ugla u našoj osnovnoj školi. Nema: ugla većeg od punog, nema orijentisanog ugla (nema rotacije), ne uvodi se radijanska mera ugla ... Dakle, možemo slobodno zaključiti: *u osnovnoj školi pojam ugla nije u potpunosti formiran.*

Na kraju ove analize navodimo šta se kaže u poglavlju *Objašnjenje programa* u okviru *Uputstva za realizaciju programa matematike* (Nastavni program matematike za osnovnu školu u Republici Srbiji i Korigovani nastavni program matematike za osnovnu školu u Republici Srbiji) za obradu teme UGAO:

Ugao treba shvatiti kao deo ravni koji čine dve poluprave sa zajedničkom početnom tačkom zajedno s jednom od tako nastalih oblasti. Učenicima treba ukazati i na to da ugao nastaje rotacijom poluprave u ravni oko njene početne tačke a, takođe, i kao presek dve poluravni (to je konkretan primer preseka skupova u geometriji). Bez merenja treba pokazati kako se upoređuju dati uglovi i kako se vrši klasifikacija uglova. Odnos između centralnog ugla i odgovarajućeg luka, odnosno tetive, treba utvrditi eksperimentalno (B»prenošenjemB«) i to koristiti za uvođenje pojma jedinica za merenje uglova, zatim za konstrukciju ugla jednakog datom uglu i za B»grafičkeB« operacije sa uglovima. Objasniti nastanak susednih, uporednih i unakrsnih uglova i uočiti ih u neposrednoj okolini. Kao važnu činjenicu treba istaći: ako su dva ugla jednaka, onda su oba prava, kao i to da kraci pravog ugla određuju normalne prave.

Literatura

[1] Marjanović M., Metodika matematike 1 i 2, Učiteljski fakultet, Beograd, 1996.

[2] Hilbert D., Foundations of Geometry (2nd edition), Chikago, 1971.

[3] Hoking, S., Kosmos u orahovoj ljusci, Z. Z.,Informatika, Beograd, 2002.

[4] Pogorelov, A. V., Ylementarna geometri, Nauka, Moskva, 1977.

[5] Wu, Hung-His, The role of open ended problems in mathematics education, Journal of Mathematical Behavior 13, 115-128, 1994.

[6] Dejić, M., Egerić, M., Metodika nastave matematike, Učiteljski fakultet u Beogradu, 2008.

[7] Zech, F., Geometrie 1, Reihe Stútzpfeiler Matthematik, Berlin, 1992.

[8] Zech, F., Geometrie 2, Reihe Stútzpfeiler Matthematik, Berlin, 1993.

[9] Zech, F., Mathematik erklären und verstehen. Eine Methodik des Mathematikunterrichts mit besonderer BerΓjcksichtigung von lernschwachen Schülern und AlltagsnΓ¤he, Berlin, 1995.

[10] Zech, F. Wellenreuther, M., Stützpfeiler Mathematik. Wichtige Bausteine für Rechnen und Geometrie im Alltag aus den Schuljahren 5-8. Hefte zur Geometrie, Bruchrechnung, Prozentrechnung, Zinsrechnung und Schlubrechnung, Berlin, 1992-1996.

[11] Zech, F., Grundkurs Mathematikdidaktik – Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik, (9. Auflage), Beltz Verlag, Weinheim und Basel, 1998.

[12] Coxeter, H.S. MacDonald, The real projective plane, New York: Springer-Verlag, 1992.

ЧЕТВРТА МАТЕМАТИЧКА КОНФЕРЕНЦИЈА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ
Требиње, 6 і 7 јуни 2014

Релације међу Фуријеовим коефицијентима прелазних функција оператора Штурм-Лиувила са линеарним кашњењем и сопственим вриједностима тих оператора

Исмет Калчо
Политехнички факултет универзитета у Зеници
hanasim@windowslive.com

Миленко Т. Пикула
Универзитет у Источном Сарајеву, Филозофски факултет Пале
pikulam1947@gmail.com

Весна Милетић
Универзитет у Источном Сарајеву, Филозофски факултет Пале

Фатима Манџука
2. основна школа Коњиц

Оригинални научни рад

Апстракт

Дати рад је посвећен успостављању релације између Фуријеових коефицијената $\{a_{2m}, b_{2m}\}_{m\in N_0}$ такозваних прелазних функција $\tilde{q}_j \in L_2[0,\pi]; j = 1,2$ и сопствених вриједности $\{\lambda_{nj}\}_{n=0}^{\infty}$ оператора $D_j^{(2)}$ генерисаних диференцијалним изразом

$$l(y) := y''(x)+q(x)y((1-\alpha)x-\beta),\ \ 0<\alpha<1,\ \ 0<\beta<(1-\alpha)\pi \qquad (O_1)$$

почетним условом

$$y((1-\alpha)x-\beta) \equiv 0, x \in [0,\xi_1), \xi_1 = \frac{\beta}{1-\alpha}, \gamma(x) = (1-\alpha)x-\beta, \tau(x) = \alpha x+\beta \quad (O_2)$$

и граничним условима

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad j = 1. \qquad (O_3)$$
$$y'(0) = y(\pi) = 0, \quad j = 2. \qquad (O_3')$$

1 Увод

Спектрални задатак $l(y) = \lambda y = z^2 y$ са (O_2) и (O_3) означавамо са

$$D_1^2(y) = z^2(y) \qquad (1)$$
$$D_2^2(y) = z^2(y) \qquad (2)$$

Задатак $ly = z^2 y$ са (0_2) и условом $y(0) = 0$ еквивалентан је интегралној једначини

$$y(x,z) = \sin xz + \frac{1}{z}\int_{\xi_1}^{x} q(t_1)\sin z(x-t_1)y(\gamma(t_1),z)\mathrm{d}t_1 \tag{3}$$

а при услову $y'(0) = 0$, еквивалентан је једначини

$$y(x,z) = \cos xz + \frac{1}{z}\int_{\xi_1}^{x} q(t_1)\sin z(x-t_1)y(\gamma(t_1),z)\mathrm{d}t_1 \tag{3'}$$

У [9] је доказано да постоји $k_0 \in N$ тако да важи $\xi_{k_0} < \pi \leq \xi_{k_0+1}$,
$\xi_k = \gamma(\xi_{k+1})$, $k = 1, 2, ...$
Дефинишимо следеће функције

$$b_{s^2}(x,z) = \int_{\xi_1}^{x} q(t_1)\sin z(x-t_1)\sin z\gamma(t_1)\mathrm{d}t_1$$

$$b_{sc}(x,z) = \int_{\xi_1}^{x} q(t_1)\sin z(x-t_1)\cos z\gamma(t_1)\mathrm{d}t_1$$

$$b_{s^{k+1}}(x,z) = \int_{\xi_k}^{x} q(t_1)\sin z(x-t_1)b_{s^k}(\gamma(t_1),z)\mathrm{d}t_1, k \geqslant 2 \tag{4}$$

$$b_{s^k c}(x,z) = \int_{\xi_k}^{x} q(t_1)\sin z(x-t_1)b_{s^{k-1}c}(\gamma(t_1),z)\mathrm{d}t_1, k \geqslant 2$$

Примјењујући методу корака из (3) и (3′) добијамо рјешења тих једначина на размаку $(\xi_{k_0}, \pi]$

$$y_1(x,z) = \sin xz + \sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{z^k}b_{s^{k+1}}(x,z) \tag{5}$$

$$y_2(x,z) = \cos xz + \sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{z^k}b_{s^k c}(x,z) \tag{5'}$$

Из (5) и (5′) при услову $y(\pi) = 0$ добијамо карактеристичне функције F_j оператора $D_j^{(2)}$, редом

$$F_1(z) = \sin \pi z + \frac{1}{z}b_{s^2}(z) + \frac{1}{z^2}b_{s^3}(z) + \sum_{k=3}^{k_0}\frac{1}{z^k}b_{s^{k+1}}(z) \tag{6}$$

$$F_2(z) = \cos \pi z + \frac{1}{z} b_{sc}(z) + \frac{1}{z^2} b_{s^2c}(z) + \sum_{k=3}^{k_0} \frac{1}{z^k} b_{s^kc}(z) \qquad (6')$$

функције F_j су цијеле функције експоненцијалног типа и јединичног степена раста.
Ставимо

$$\tilde{q}_j(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2-\alpha} q(\frac{2\theta+\beta}{2-\alpha}) + (-1)^j \frac{1}{\alpha} q(\frac{2\theta-\beta}{\alpha}), & \theta \in [\frac{1}{2}\xi_1, \frac{\tau(\pi)}{2}] \\ \frac{1}{2-\alpha} q(\frac{2\theta+\beta}{2-\alpha}), & \theta \in [\frac{\tau(\pi)}{2}, \pi - \frac{\tau(\pi)}{2}] \\ 0, & \theta \in [0, \frac{1}{2}\xi_1) \cup (\pi - \frac{\tau(\pi)}{2}, \pi], \quad j = 1, 2. \end{cases} \qquad (7)$$

Дефиниција 1. *Функције $\tilde{q}_j$ дефинисане са (7) називамо прелазне функције оператора $D_j^{(2)}$.*

Теорема 1. *Важе идентитети*

$$b_{s^2}(z) = \int_0^\pi \tilde{q}_1(\theta) \cos z(\pi - 2\theta) \mathrm{d}\theta = \tilde{a}_c(z) \qquad (8)$$

$$b_{sc}(z) = \int_0^\pi \tilde{q}_2(\theta) \sin z(\pi - 2\theta) \mathrm{d}\theta = \tilde{b}_s(z) \qquad (8')$$

Доказ. Полазимо од елементарних релација

$$\sin z(\pi - t_1) \sin z\gamma(t_1) = \frac{1}{2}[\cos z(\pi - (2-\alpha)t_1 + \beta) - \cos z(\pi - \alpha t_1 - \beta)]$$
$$\sin z(\pi - t_1) \cos z\gamma(t_1) = \frac{1}{2}[\sin z(\pi - (2-\alpha)t_1 + \beta) + \sin z(\pi - \alpha t_1 - \beta)]$$

Смјеном промјенљивих

$$2\theta_1 = (2-\alpha)t_1 - \beta, \quad 2\theta_2 = \alpha t_1 + \beta,$$

тј.

$$\theta_1 : [\xi_1, \pi] \longrightarrow [\frac{1}{2}\xi_1, \pi - \frac{1}{2}\tau(\pi)]$$
$$\theta_2 : [\xi_1, \pi] \longrightarrow [\frac{1}{2}\xi_1, \frac{1}{2}\tau(\pi)]$$

долазимо до релација

$$b_{s^2}(z) = \int_{\frac{1}{2}\xi_1}^{\pi - \frac{1}{2}\tau(\pi)} \frac{1}{2-\alpha} q(\frac{2\theta_1 + \beta}{2-\alpha}) \cos z(\pi - 2\theta_1) \mathrm{d}t_1 - \int_{\frac{1}{2}\xi_1}^{\frac{1}{2}\tau(\pi)} \frac{1}{\alpha} q(\frac{2\theta_2 - \beta}{\alpha}) \cos z(\pi - 2\theta_2) \mathrm{d}t_2$$

$$b_{sc}(z) = \int\limits_{\frac{1}{2}\xi_1}^{\pi-\frac{1}{2}\tau(\pi)} \frac{1}{2-\alpha} q(\frac{2\theta_1+\beta}{2-\alpha}) \sin z(\pi - 2\theta_1)\mathrm{d}\theta_1 + \int\limits_{\frac{1}{2}\xi_1}^{\frac{1}{2}\tau(\pi)} \frac{1}{\alpha} q(\frac{2\theta_2-\beta}{\alpha}) \sin z(\pi - 2\theta_2)\mathrm{d}\theta_2$$

Из ових једнакости и из (7) директно слиједе (8) и $(8')$.Тиме је теорема доказана.
Користећи превођење производа

$$\sin z(\pi - t_1)\sin z(\gamma(t_1) - t_2)\sin z\gamma(t_2) \text{ и}$$
$$\sin z(\pi - t_1)\sin z(\gamma(t_1) - t_2)\cos z\gamma(t_2)$$

у збирове а потом уводећи смјене промјенљивих у двојним интегралима, можемо функције $b_{s^3}(z)$ и $b_{s^2c}(z)$ такође трансформисати у облике

$$b_{s^3}(z) = \int\limits_0^{\pi} K_1^{(1)}(\theta, q(\theta))\sin z(\pi - 2\theta)\mathrm{d}\theta = b_s^{(1,1)}(z) \tag{9}$$

$$b_{s^2c}(z) = \int\limits_0^{\pi} K_2^{(1)}(\theta, q(\theta))\cos z(\pi - 2\theta)\mathrm{d}\theta = a_c^{(1,2)}(z) \tag{9'}$$

гдје важи $K_j^{(1)} \in L_2[0,\pi], \quad j = 1, 2.$

Примједба. Значај трансформација $(8), (8'), (9)$ и $(9')$ је у томе што оне омогућују прецизирање асимптотика сопствених вриједности λ_{nj} оператора $D_j^{(2)}$, односно нула функција F_j. Наиме, умјесто (6) и $(6')$ можемо писати

$$F_1(z) = \sin\pi z + \frac{1}{z}\tilde{a}_c(z) + \frac{1}{z^2}b_s^{(1,1)}(z) + \sum_{k=3}^{k_0}\frac{1}{z^k}b_{s^{k+1}}(z) \tag{10}$$

$$F_2(z) = \cos\pi z + \frac{1}{z}\tilde{b}_s(z) + \frac{1}{z^2}a_c^{(1,2)}(z) + \sum_{k=3}^{k_0}\frac{1}{z^k}b_{s^kc}(z) \tag{10'}$$

У даљем користићемо следеће бројне низове

$$\tilde{a}_{2n}^{(1)} = \int_0^{\pi}\tilde{q}_1(\theta)\cos 2n\theta\mathrm{d}\theta, \qquad \tilde{b}_{2n}^{(1)} = \int_0^{\pi}\tilde{q}_1(\theta)\sin 2n\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\hat{\tilde{b}}_{2n} = \int_0^{\pi}\theta\tilde{q}_1(\theta)\sin 2n\theta\mathrm{d}\theta, \qquad b_{2n}^{(1,1)} = \int_0^{\pi}K_1(\theta, q(\theta))\sin 2n\theta\mathrm{d}\theta$$

$$a_{2n}^{(1,1)} = \int_0^{\pi}K_1(\theta, q(\theta))\cos 2n\theta\mathrm{d}\theta, \qquad a_{2n+1}^{(2)} = \int_0^{\pi}\tilde{q}_2(\theta)\cos(2n+1)\theta\mathrm{d}\theta$$

$$b_{2n+1}^{(2)} = \int_0^{\pi}\tilde{q}_2(\theta)\sin(2n+1)\theta\mathrm{d}\theta, \qquad \hat{\tilde{b}}_{2n+1}^{(2)} = \int_0^{\pi}\theta\tilde{q}_2(\theta)\sin(2n+1)\theta\mathrm{d}\theta$$

$$b_{2n+1}^{(1,2)} = \int_0^{\pi}K_2(\theta, q(\theta))\sin(2n+1)\theta\mathrm{d}\theta \qquad \tilde{b}_{2n+1}^{(2)} = \int_0^{\pi}\tilde{q}_2(\theta)\sin(2n+1)\theta\mathrm{d}\theta$$

Теорема 2. *Ако је $q \in L_2[0,\pi]$ тада нуле z_{nj} функција $F_j(z)$ имају следеће асимптотско разлагање*

$$z_{n1} = n - \frac{1}{\pi}\frac{\tilde{a}_{2n}^{(1)}}{n} + \frac{1}{n^2}[\frac{1}{\pi}b_{2n}^{(1,1)} + (\frac{1}{\pi}\tilde{b}_{2n}^{(1)} - \frac{2}{\pi^2}\hat{\tilde{b}}_{2n}^{(1)})\tilde{a}_{2n}^{(1)}] + O(\frac{C_{31}(n)}{n^3}) \qquad (11)$$

$$z_{n2} = n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\frac{\tilde{a}_{2n+1}^{(2)}}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}[\frac{1}{\pi}\tilde{b}_{2n+1}^{(1,2)} + (\frac{1}{\pi}\tilde{b}_{2n+1}^{(2)} - \frac{2}{\pi^2}\hat{\tilde{b}}_{2n+1}^{(2)})\tilde{a}_{2n+1}^{(2)}] + O(\frac{C_{32}(n)}{(n+\frac{1}{2})^3}) \qquad (11')$$

гдје су $C_{3j}(n)$ изражени помоћу Фуријеових коефицијената одређених функција из $L_2[0,\pi]$. (Види *Коментар 1.*)

Доказ. Полазећи од претпоставки

$$z_{n1} = n + \frac{C_{11}(n)}{n} + \frac{C_{21}(n)}{n^2} + O(\frac{C_{31}(n)}{n^3}) \qquad (11_1)$$

$$z_{n2} = n + \frac{1}{2} + \frac{C_{12}(n)}{n+\frac{1}{2}} + \frac{C_{22}(n)}{(n+\frac{1}{2})^2} + O(\frac{C_{32}(n)}{(n+\frac{1}{2})^3}) \qquad (11_1')$$

слиједи

$$\sin \pi z_{n1} = (-1)^n[\frac{\pi C_{11}(n)}{n} + \frac{\pi C_{21}(n)}{n^2} + O(\frac{C_{31}(n)}{n^3})] \qquad (11_2)$$

$$\cos \pi z_{n1} = (-1)^{n+1}[\frac{\pi C_{12}(n)}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\pi C_{22}(n)}{(n+\frac{1}{2})^2} + O(\frac{C_{32}(n)}{(n+\frac{1}{2})^3})] \qquad (11_2')$$

Даље, важи

$$\tilde{a}_c^{(1)}(z_{n1}) = (-1)^n\tilde{a}_{2n}^{(1)} + \frac{1}{n}[(-1)^n C_{11}(n)\pi\tilde{b}_{2n}^{(1)} + (-1)^{n+1}2C_{11}(n)\pi\hat{\tilde{b}}_{2n}^{(1)}] + O(\frac{C_{11}(n)\tilde{b}_{1n}^{(1)}}{n^2}) \qquad (11_3)$$

$$b_s^{(1,1)}(z_{n1}) = (-1)^{n+1}b_{2n}^{(1,1)} + O(\frac{C_{11}(n)a_{2n}^{(1,1)}}{n}) \qquad (11_4)$$

У једначину $F_1(z_{n1}) = 0$ уврстимо $(11_1), (11_2), (11_3)$ и (11_4) и добијамо

$$C_{11}(n) = -\frac{1}{\pi}\tilde{a}_{2n}^{(1)}$$

$$C_{21}(n) = \frac{1}{\pi}b_{2n}^{(1,1)} + (\frac{1}{\pi}\tilde{b}_{2n}^{(1)} - \frac{2}{\pi^2}\hat{\tilde{b}}_{2n}^{(1)})\tilde{a}_{2n}^{(1)}$$

Тиме је (11) доказана. Сасвим аналогно добијамо и $(11')$.

Коментар 1. У изразима $O(\frac{C_{3j}(n)}{n^2}),\quad j=1,2$ главне сабирке представљају Фуријеови коефицијенти функција $K_j^{(2)} \in L_2[0,\pi]$ дефинисани са

$$b_{s^4}(z) = \int_0^\pi K_1^{(2)}(\theta, q(\theta)) \cos z(\pi - 2\theta) d\theta = a_c^{(1,2)}(z)$$
$$b_{s^3c}(z) = \int_0^\pi K_2^{(2)}(\theta, q(\theta)) \sin z(\pi - 2\theta) d\theta = b_s^{(2,2)}(z)$$

док су остали сабирци производи Фуријеових коефицијената функција $\tilde{q}_j$ и $K_j^{(1)}$, $j=1,2$.

Посљедица. Квадрирањем у (11) и (11′) добијамо асимптотику сопствених вриједности оператора $D_j^{(2)}$:

$$\lambda_{n1} = n^2 - \frac{2}{\pi}\tilde{a}_{2n}^{(1)} + \frac{1}{n}[\frac{2}{\pi}b_{2n}^{(1,1)} + (\frac{2}{\pi}\tilde{b}_{2n}^{(1)} - \frac{4}{\pi^2}\hat{\tilde{b}}_{2n}^{(1)})\tilde{a}_{2n}^{(1)}] + O(\frac{C_{31}(n)}{n^2}) \tag{12}$$

$$\lambda_{n2} = (n+\frac{1}{2})^2 - \frac{2}{\pi}\tilde{a}_{2n+1}^{(2)} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}[\frac{2}{\pi}b_{2n+1}^{(1,2)} + (\frac{2}{\pi}\tilde{b}_{2n+1}^{(2)} - \frac{4}{\pi^2}\hat{\tilde{b}}_{2n+1}^{(2)})\tilde{a}_{2n+1}^{(2)}] + $$
$$+ O(\frac{C_{32}(n)}{(n+\frac{1}{2})^2}) \tag{12'}$$

2 Представљање функција F_j помоћу бесконачних производа

Функција F_1 је непарна а F_2 је парна функција и важи $F_1(0)=0, F_2(0)\neq 0$ али је $F_2(\pm z_{02})=0$. Осим тога $F_j(\pm z_{nj})=0\ \ n\in N$. На основу ових особина у представљању функција F_j помоћу бесконачних производа, експоненцијални множитељи се подијеле и важе представљања

$$F_1(z) = A_1 z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{\lambda_{n1}}) \tag{13}$$

$$F_2(z) = A_2(1 - \frac{z^2}{\lambda_{02}}) \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{\lambda_{n2}}) \tag{13'}$$

гдје се A_j накнадно једнозначно одређују.

Теорема 3. *Ако важе* (12) *и* (12′) *тада добијамо представљања*

$$F_1(z) = \sin \pi z + \frac{1}{z}\tilde{a_c}(z) + O(\frac{b_s^{(1,1)}(z)}{z^2}) \tag{14}$$

$$F_2(z) = \cos \pi z + \frac{1}{z}\tilde{b_s}(z) + O(\frac{a_s^{(1,2)}(z)}{z^2}), z \to \infty \tag{14'}$$

Доказ. Користимо познате идентитете

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2}), \quad \cos \pi z = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{(n+\frac{1}{2})^2})$$

За $z \in C \setminus Z$ можемо писати

$$F_1(z) = \frac{A_1}{\pi}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_{n1}}\sin \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2})$$

и

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2} + \frac{1}{2}[(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2})^2 - \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2})^2] + \\ + \Delta \prod_1(z)$$

Даље, уведимо ознаке

$$\tilde{a}_0^{(1)} = \int_0^{\pi}\tilde{q_1}(\theta)\mathrm{d}\theta, \quad \hat{\tilde{a}}_0^{(1)} = \int_0^{\pi}\theta\tilde{q_1}(\theta)\mathrm{d}\theta, \quad a_0^{(1,1)} = \int_0^{\pi}K_1(\theta, q(\theta))\mathrm{d}\theta$$

$$\hat{a}_0^{(1,1)} = \int_0^{\pi}\theta K_1(\theta, q(\theta))\mathrm{d}\theta$$

Користимо сада познату формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{n^2 - z^2} = \frac{1}{2z^2} - \frac{\cos z(\pi - 2\theta)}{2z \sin \pi z}$$

Отуда важи

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{a}_{2n}^{(1)}}{n^2 - z^2} = -\frac{\tilde{a}_0^{(1)}}{z^2} + \frac{1}{z \sin \pi z}\tilde{a_c}(z)$$

Ради краћег записивања ставимо

$$\beta_{2n}^{(1)} = \frac{2}{\pi}b_{2n}^{(1,1)} + (\frac{2}{\pi}\tilde{b}_{2n}^{(1)} - \frac{4}{\pi^2}\hat{\tilde{b}}_{2n}^{(1)})\tilde{a}_{2n}^{(1)}$$

$$\Delta\lambda_{n1} = \lambda_{n1}^2 - n^2 + \frac{2}{\pi}\tilde{a}_{2n}^{(1)} - \frac{1}{n}[\frac{2}{\pi}b_{2n}^{(1,1)} + (\frac{2}{\pi}\tilde{b}_{2n}^{(1)} - \frac{4}{\pi^2}\hat{\tilde{b}}_{2n}^{(1)})\tilde{a}_{2n}^{(1)}]$$

Тада важи

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n1}-n^2}{n^2-z^2}=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{a}_{2n}^{(1)}}{n^2-z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_{2n}^{(1)}}{n(n^2-z^2)}-\frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_{n1}+\frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\Delta\lambda_{n1}}{n^2-z^2}$$

Пошто је $n^2\Delta\lambda_{n1}=O(C_{31(n)})=o(1)\quad n\to\infty$, довољно нам је сазнање да важи

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\Delta\lambda_{n1}}{n^2-z^2}=o(1),\quad z\to\infty.$$

Очигледно је да ред $S_1^*=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\lambda_{n1}$ конвергира и његова сума S_1^* се назива први усиљени регуларизовани траг оператора $D_1^{(2)}$.
Даље, важи

$$\sigma_0^{(1)}(z)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}^{(1,1)}}{n(n^2-z^2)}=\frac{1}{z^2}[\frac{2}{\pi}\hat{a}_0^{(1,1)}-a_0^{(1,1)}]+\frac{1}{z^2\sin\pi z}b_s^{(1,1)}(z)$$

и тим прије

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_{2n}^{(1)}}{n(n^2-z^2)}=O(\sigma_0^{(1)}(z)),\quad z\to\infty$$

Лако је провјерити такође да важи

$$\sigma_2^{(1)}(z)=\frac{1}{2}[(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n1}-n^2}{n^2-z^2})^2-\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\lambda_{n1}-n^2}{n^2-z^2})^2]=O(\sigma_0^{(1)}(z))$$

и

$$\Delta\prod_1(z)=o(\sigma_0^{(1)}(z))\quad z\to\infty.$$

Пошто (10) и (13) представљају исту функцију, важи услов

$$\tfrac{A_1}{\pi}\prod_{n=1}^{\infty}\tfrac{n^2}{\lambda_{n1}}=1,\text{ тј } A_1=\pi\prod_{n=1}^{\infty}\tfrac{\lambda_{n1}}{n^2}.$$

На основу горњих релација слиједи (14). Сасвим слично доказујемо и (14′).

3 Веза између Фуријеових коефицијената функције $\tilde{q}_1$ и сопствених вриједности оператора D_1^2

Из дефиниције функција $\tilde{q}_j$ видимо да оне у себи носе не само функцију q него и коефицијенте α и β кашњења $\tau(x)=\alpha x+\beta$.
Пошто су оператори генерисани диференцијалним изразима са отклоњеним

аргументом (са кашњењем или са претицањем) несомокоњуговани, сопствене вриједности не морају бити реалне иако је потенцијал реална функција. Ми ћемо претпоставити да су λ_{n1} реални бројеви. Наиме, у општем случају важи

$$\lambda_{n1} - n^2 = \rho_{n1} + i\chi_{n1} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Претпоставка $\chi_{n1} = 0$ нема суштинског значаја за наше циљеве.
Дефинишимо следеће низове

$$\begin{aligned}
&\sigma_{n,m,k} = (n^2 - m^2 + k^2)^2 + 4m^2k^2 \\
&\xi^{(1)}_{n,m,k} = k(\lambda_{n1} - n^2)(n^2 + m^2 + k^2) \\
&\eta^{(1)}_{n,m,k} = -m(\lambda_{n1} - n^2)(n^2 - m^2 - k^2) \\
&\tilde{a}^{(1)}_{2m}(\theta) = \int_0^\theta \tilde{q}_1(\theta_1)\cos 2m\theta_1 d\theta_1,\ \tilde{\alpha}^{(1)}_{2m} = 2k\int_0^\pi \tilde{a}^{(1)}_{2m}(\theta)\mathrm{sh}k(\pi - 2\theta)d\theta \\
&\tilde{b}^{(1)}_{2m}(\theta) = \int_0^\theta \tilde{q}_1(\theta_1)\sin 2m\theta_1 d\theta_1,\ \tilde{\beta}^{(1)}_{2m} = 2k\int_0^\pi \tilde{b}^{(1)}_{2m}(\theta)\mathrm{ch}k(\pi - 2\theta)d\theta
\end{aligned} \tag{15}$$

Важи следећи резултат
Teorema 4. *Фуријеови коефицијенти $a^{(1)}_{2m}$ и $b^{(1)}_{2m}$ прелазне функције $\tilde{q}_1$ оператора $D^{(2)}_1$ одређени су следећим једнакостима*

$$a^{(1)}_{2m} = -\frac{2}{\pi}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{(1)}_{n,m,k}}{\sigma_{n,m,k}},\ m \in \mathbb{N}_0 \tag{16}$$

$$b^{(1)}_{2m} = -\frac{2}{\pi}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta^{(1)}_{n,m,k}}{\sigma_{n,m,k}},\ m \in \mathbb{N} \tag{17}$$

гдје су низови $\sigma_{n,m,k}$, $\xi^{(1)}_{n,m,k}$ и $\eta^{(1)}_{n,m,k}$ дефинисани са (15) а λ_{n1} су реалне сопствене вриједности.
Доказ. Ако је $\phi_1(z) = A_1 z\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{\lambda_{n1}})$ карактеристична функција оператора $D^{(2)}_1$ добијена преко бесконачног производа, а $F_1(z)$ та иста функција дата са (10), тј. директно из оператора тада важи идентитет

$$F_1(z) = \phi_1(z)\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{18}$$

Пошто је

$$F_1(z) = \sin\pi z + \frac{1}{z}\tilde{a}_c(z) + \frac{1}{z^2}b^{(1,1)}_s(z) + \sum_{k=3}^{k_0}\frac{1}{z^k}b_{s^{k+1}}(z)$$

и

$$\phi_1(z) = \sin z\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n1} - n^2}{n^2 - z^2}\right] + \Delta\phi_1(z)\sin\pi z,\ \ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \tag{19}$$

долазимо до идентитета

$$\tilde{a}_c^{(1)}(z) = z\sin\pi z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n1}-n^2}{n^2-z^2}+\psi_1(z),\ \ z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \tag{20}$$

гдје је

$$\psi_1(z) = \Delta\phi_1(z)\sin\pi z-\frac{1}{z}b_s^{(1,1)}(z)+\sum_{k=3}^{k_0}\frac{1}{z^{k-1}}b_{s^{k+1}}(z)$$

Идентитет (20) еквивалентан је бесконачном систему једнакости

$$\tilde{a}_c(m+ik) = (m+ik)\sin\pi(m+ik)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n1}-n^2}{n^2-(m+ik)^2}+\psi(m+ik), \tag{21}$$

гдје је m фиксиран, a произвољан цио број и $k\in\mathbb{N}$.

Најприје имамо

$$\tilde{a}_c^{(1)}(m+ik) = (-1)^m\{\tilde{a}_{2m}^{(1)}\mathrm{ch}k\pi+\tilde{\alpha}_{2m,k}^{(1)}+i[-\tilde{b}_{2m}^{(1)}\mathrm{sh}k\pi+\tilde{\beta}_{2m,k}^{(1)}]\} \tag{22}$$

У [12] је доказано да важе релације

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\tilde{\alpha}_{2m,k}^{(1)}}{\mathrm{ch}k\pi}=0\ \ \text{и}\ \ \lim_{k\to+\infty}\frac{\tilde{\beta}_{2m}^{(1)}}{\mathrm{sh}k\pi}=0\ \ \forall m\in\mathbb{Z}. \tag{23}$$

Даље, имамо

$$(m+ik)\sin(m+ik)\pi = (-1)^m[-k+im]\mathrm{sh}k\pi \tag{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n1}-n^2}{n^2-(m+ik)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_{n1}-n^2)[n^2-m^2+k^2+2imk]}{\sigma_{n,m,k}} \tag{25}$$

Из (24) и (25) добијамо

$$\begin{aligned}&(m+ik)\sin\pi(m+ik)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n1}-n^2}{n^2-(m+ik)^2}=\\&=(-1)^m\mathrm{sh}k\pi\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_{n1}-n^2)[-k(n^2-m^2+k^2)-2m^2k]}{\sigma_{n,m,k}}+\\&+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_{n1}-n^2)[m(n^2-m^2+k^2)-2mk^2]}{\sigma_{n,m,k}}\}=\\&=(-1)^m\mathrm{sh}k\pi\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_{n,m,k}}{\sigma_{n,m,k}}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_{n,m,k}}{\sigma_{n,m,k}}\}\end{aligned} \tag{26}$$

Из (22) и (26) уз коришћење (23) и чењенице да је $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\psi(m+ik)}{\mathrm{ch}\pi k} = 0$ дибијамо формуле (16) и (17). Тиме је теорема 4 доказана.
Значи,

$$\tilde{q}_1(\theta) = \frac{a_0^{(1)}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}^{(1)} \cos 2m\theta + b_{2m}^{(1)} \sin 2m\theta, \quad \text{г. с. на } [0,\pi].$$

Сасвим аналогно доказује се да важе формуле аналогне формулама (16) и (17), тј. успостављају се релације између коефицијената Фуријеове функције $\tilde{q}_2$ и сопствених вриједности λ_{n2} оператора $D_2^{(2)}$. Дакле,

$$\tilde{q}_2(\theta) = \frac{a_0^{(2)}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m+1}^{(2)} \cos(2m+1)\theta + b_{2m+1}^{(2)} \sin(2m+1)\theta \quad \text{г.с. на } [0,\pi].$$

4 Литература

[1] Ambarzumjan V., Uber eine Frage der Eigenwerttheorie, Zeitshr.für Physik, (1929)-Bd. 53.- S.690-695.

[2] Borg G., Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe, Acta Math. (1946)- Bd.78., .-S. 1-96.

[3] Гельфанд И.М., Левитан Б.М., Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв.АН СССР, Сер.мат-(1951)-Т.15.-С.309-360.

[4] Левитан Б.М., Саргсян И.С., Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, Москва, Наука (1988).

[5] Пикула М., О регуляризованных следах дифференциалъных операторов высших порядков с запаздывающим аргументом , Дифф. уравнения, 1985. Т. 21, №6, 986-991.

[6] Пикула М., О регуляризованных следах дифференциалъного оператора типа Штурма-Лувилля с запаздывающим аргументом , Дифф. уравнения, 1990. Т. 25, №1, 103-109.

[7] Пикула М., Определение дифференциалъного оператора типа Штурма-Лувилля с запаздывающим аргументом по двум спектрам , Математични весник, т.43 (1991) 159-171.

[8] М. Пикула, И. Калчо, Својствене вриједности оператора типа Штурм-Лиувила са промјењивим кашњењем типа $x-\tau(x)$, Зборник радова друге математичке конференције Републике Српске, (2012), 73-85.

[9] М. Пикула, И. Калчо, Конструкција рјешења граничног задатка са линеарним кашњењем, Зборник радова треће математичке конференције Републике Српске, (2013),133-138.

[10] Пикула М., Владичић В., Марковић О. A solution to the inverse problem for the Sturm-Liouville-type equation with a delay, Филомат, 27:7 УниверзитетуНишу, Србија, 2013. стр 1237-1245.

[11] Пикула М.,Владичић В., Недић Д., Inverse problems for Sturm-Liouville differential operators with a homogeneous delay Siberian Mathematical Journal, Novosibirsk, Russia, 2014, стр 370-378.

[12] Владичић В., Примјена Фуријеових редова у инверзном проблему једначина са кашњењем, докторска дисертација, Универзитет у Источном Сарајеву, Филозофски факултет, 2013.

ČETVRTA MATEMATIČKA KONFERENCIJA REPUBLIKE SRPSKE
Trebinje, 6 and 7 June 2014

Uticaj perioda aktivacije uređaja na upravljanje opterećenjem elektrodistributivne mreže primjenom različitih kriterijuma minimizacije

Tamara Bojičić
University of Montenegro, Faculty of Electrical Engineering
monteniger-nk@t-com.me

Vesna Popović - Bugarin
University of Montenegro, Faculty of Electrical Engineering
pvesna@ac.me

Originalni naučni rad

Apstrakt

Apstrakt — Algoritmom za upravljanje opterećenjem elektrodistributivne mreže se želi smanjiti iznos koji potrošači plaćaju za utrošenu električnu energiju, ali i povećati stabilnost elektrodistributivne mreže, u smislu smanjenja odnosa maksimalnog i srednjeg nivoa opterećenja mreže u toku 24h. Sa ovakvim algoritmima, koji posjeduju navedene performanse, potrošači bi trebali biti upoznati, ali i podstaknuti na njihovo korišćenje. Kako bi to bilo ostvarljivo, u radu je analizirana mogućnost primjene optimizacionih algoritama uz korišćenje aktuelne (linearne) funkcije cijene, a predloženi su i načini njene modifikacije uz što manje izmjene iste. Predložena je i promjena perioda aktivacije uređaja (onih sa kliznim vremenom aktivacije kao što su: mašina za veš, mašina za suđe itd.) iz vremena više u vrijeme niže tarife, a sve u cilju što boljih performansi algoritma za optimizaciju i simuliranja realne situacije u praksi. Dobijeni rezultati predstavljaju značajan oslonac za primjenu optimizacionih algoritama u praksi, kao i motivaciju za rad na njihovom unapređivanju i prilagođavanju potrošačima, što bi moglo predstavljati značajan pomak u razvoju savremenih tokova tehnologije. Rezultati simulacija pokazuju da bi domaćinstva, poštujući određen raspored uključivanja pojedinih uređaja, primjenom predloženog algoritma ostvarila značajna smanjenja iznosa koji plaćaju za električnu energiju uz istovremeno smanjenje odnosa maksimalnog i srednjeg opterećenja mreže, čime se obezbjeđuje njena stabilnost.

1 Uvod

Pametna mreža [1] predstavlja mrežu budućnosti, odnosno električnu mrežu koja inteligentno integriše aktivnosti svih korisnika koji su na nju spojeni, proizvođača, potrošača i onih koji su i jedno i drugo, a sve u cilju sigurne isporuke električne energije visokog kvaliteta. Jednostavno prikazan princip funkcionisanja je sledeći: pametna mreža omogućava elektranama da komuniciraju sa podstanicama, podstanicama da komuniciraju sa domaćinstvima, a domaćinstvima da komuniciraju sa električnim uređajima. Ovako prikupljene informacije su na raspolaganju elektrodistribuciji koja ih koristi da donese zaključke o tome gdje, kada i kolika količina električne energije je potrebna, i na koji način se ona može sigurno i kvalitetno transponovati. Oslonac pametne mreže predstavljaju 'pametni' uređaji, napredni softver i dvosmjerna komunikacija. Sve ovo omogućava 'proticanje' podataka u oba smjera, i to od potrošača električne energije do snabdijevača električnom energijom i u suprotnom smjeru. Dio koji pametnu mrežu zapravo čini pametnom su senzori postavljeni duž prenosnih linija. Senzori služe za prikupljanje informacija, obezbjeđujući distributerima stalan nadzor cjelokupne distributivne mreže u cilju što brže i kvalitetnije reakcije na bilo kakve promjene u elektrodistributivnoj mreži. Oni predstavljaju ključ dostizanja maksimalnih mogućnosti i kapaciteta pametne mreže, jer su isti neophodni kako bi pametnoj mreži omogućili dobijanje podataka u realnom vremenu ('real – time information').

Algoritmi za optimizaciju potrošnje električne energije za cilj imaju kako smanjenje iznosa koji potrošači plaćaju za utrošenu električnu energiju tako i povećanje stabilnosti elektrodistributivne mreže. Sve ovo doprinosi porastu interesovanja za razvoj ovih algoritama kao i za mogućnost njihove primjene. U [2] je predložen algoritam za optimizaciju potražnje električne energije koji se zasniva na automatskom raspoređivanju potražnje, baziranom na osnovama teorije igara. Funkcija cijene utrošene električne energije koja se koristi u [2] je kvadratna i znatno se razlikuje od trenutno aktuelne funkcije cijene. Upravo zbog tih razlika smo u radu ispitali mogućnost korišćenja trenutno aktuelne funkcije cijene u algoritmu za optimizaciju predloženom u [2]. Optimizacioni algoritam koristi konveksnu optimizacionu funkciju. U [3] i u [4] je optimizacioni algoritam modifikovan korišćenjem linearne optimizacije, koja je adekvatna za aktuelnu funkciju cijene. Cilj rada je bio da se ukaže na potrebu za izmjenom aktuelne funkcije cijene i daju smjernice za njenu izmjenu, kako bi ona bila prihvatljiva potrošačima, ali i kako bi učinili mogućim i produktivnim primjenu optimizacionih algoritama, samim tim i podstakli potrošače na njihovo korišćenje. U ovom radu, uz uvođenje elemenata teorije igara, predlažemo modifikaciju cijene utrošene električne energije posmatrane u [3] i [4]. Modifikacije su predložene vodeći računa da se ne udaljimo od aktuelnog načina računanja cijene utrošene električne energije. Naime, ovdje će cijena zavisiti ne samo od doba dana, već i od odnosa potrošnje domaćinstva za koje se vrši optimizacija prema srednjoj potrošnji ostalih domaćinstava u smislu da će se povećavati cijena kada se pređe referentna vrijednost. Na ovaj način će se dobiti ravnomjerniji raspored uključivanja pojedinih uređaja i povećati stabilnost mreže. U cilju što boljih performansi algoritma za optimizaciju i simuliranja realne situacije u praksi, osim ove modifikacije, izvršena je i promjena perioda aktivacije uređaja (onih sa kliznim vremenom aktivacije kao što su: mašina za veš, mašina za suđe itd.) iz vremena više u vrijeme niže tarife.

2 Osnovni Pametne mreže

Prvi korak ka razvoju pametne mreže jeste razvoj infrastrukture sistema za automatsko mjerenje koji bi pomoću sistema za informacione tehnologije automatski očitavao brojila. 'Najvidljiviji' i najzastupljeniji dio pametne mreže čine pametna brojila. Ona su instalirana kod svakog potrošača i utiču na svakog od njih. Pametna brojila predstavljaju vezu između snabdijevača i potrošača električne energije. Potrošači od pametnih brojila očekuju detaljne i pravovremene informacije koje će ih uputiti u to kako da upravljaju potrošnjom električne energije u cilju smanjenja troškova. Sa druge strane distributivne kompanije će informacije dobijene od strane pametnih brojila iskoristiti za što bolje upravljanje snabdijevanjem električne energije, u zavisnosti od potražnje. Pomoću pametnih brojila potrošači u svakom trenutku imaju uvid kada, koliko i po kojoj cijeni koriste električnu energiju, što im omogućava da pomjeranjem potrošnje iz časova više u časove niže tarife značajno uštede. Pametna brojila omogućavaju snabdijevačima električne energije, ne samo da prate kolika je dnevna potražnja u određenom periodu dana, već i da upravljaju njome putem DSM (sistem za upravljanje potražnjom električne energije – engl. Demand Side Management) [5]. Većina DSM programa je razvijana za sistem u kojem se komunikacija vrši između snabdijevača i svakog krajnjeg potrošača. Uzevši u obzir prednosti pametne mreže, kao što je mogućnost interakcije svih potrošača, kao i potrošača i električne mreže, dobar DSM program bi trebao uzeti u obzir kako zahtijeve krajnjih korisnika, tako i njihov uticaj međusobno. Takvom realizacijom može se analizirati i kontrolisati problem PAR-a (odnos maksimalnog i srednjeg opterećenja mreže - engl. Peak to Average Ratio), koji zavisi od rasporeda ukupnog opterećenja mreže.

Pametni energetski sistem možemo predstaviti pomoću modela koji se sastoji od većeg broja domaćinstava i jednog izvora električne energije povezanog na električnu mrežu. Pretpostavka je da se u svakom pametnom brojilu nalazi automatski optimizator električne potrošnje, koji bi upravljao rasporedom potrošnje domaćinstava. Svako pametno brojilo povezano je na liniju napajanja koja dolazi iz izvora električne energije. Pametna brojila su povezana i međusobno, kao i sa samim izvorom električne energije putem LAN-a ili nekim drugim komunikacionim putem.

3 Teorija igara

Teorija igara predstavlja studiju konflikta i saradnje. Osnovni cilj teorije igara je određivanje optimalnog ponašanja učesnika u igri. Bavi se analizom strategija, pokušavajući da definiše matematičke i logičke akcije koje bi igrači trebali preduzeti kako bi sebi obezbijedili najbolji profit. Svaki od igrača se odlučuje za jednu od strategija koje ima na raspolaganju i svaki od njih bira strategiju koja će mu donijeti najbolji profit. Međutim profit svakog od učesnika igre neće zavisiti samo od sopstvene, već i od strategija svih ostalih igrača.

Osnovna podjela teorije igara je na nekooperativne i kooperativne. Kooperativne igre su one kod kojih se takmiče grupe igrača, dok kod nekooperativnih igara igrači donose odluke samostalno i svaka saradnja među igračima je dobrovoljna, ali ne i podrazumijevana. U svim igrama, ključna stvar je da odluke pojedinih igrača utiču na ostale igrače. Cilj teorije igara je odrediti ponašanje, djelovanje, akcije i odluke učesnika igre koje će im donijeti najbolji rezultat.

Korišćenje teorije igara u kontroli i upravljanju potrošnjom električne energije i te kako ima smisla. Interakcije i međusobni uticaj potrošača i izvora električne energije predstavljaju odličan osnov formiranja igre. Potrošači – učesnici igre, sa svojim strategijama – dnevnim rasporedom opterećenja čine osnovu igre optimizacije rasporeda potrošnje električne energije, koja za cilj ima smanjenje iznosa koji svaki potrošač pojedinačno plaća, ali i smanjenje PAR-a. U tom smislu se za ocjenu kvaliteta primjenjenog algoritma koristi Nešov ekvilibrijum [7] koji predstavlja koncept rješenja nekooperativnih igara, koje uključuju dva ili više igrača. Trenutni skup izabranih strategija i odgovarajućih dobitaka predstavlja Nešov ekvilibrijum ukoliko je svaki igrač izabrao strategiju, i nijedan igrač ne može da profitira promjenom svoje strategije, pod pretpostavkom da ostali igrači ne promjene svoje strategije. Konkretno, dva igrača su u Nešovom ekvilibrijumu ako je svaki od njih donio najbolju moguću odluku, uzevši u obzir odluku protivnika. Slično, više igrača je u Nešovom ekvilibrijumu ako je svaki od njih donio najbolju moguću odluku uzevši u obzir odluke svih ostalih igrača. Postizanje Nešovog ekvilibrijuma u našoj analizi značilo bi onemogućavanje prijavljivanja lažnog rasporeda potrošnje nekog domaćinstva, jer bi iznos koji bi to domaćinstvo trebalo da plati prijavom lažnog rasporeda potrošnje električne energije bio znatno veći. Uzimajući sve navedeno u obzir sasvim je očekivano da je poželjno da svaki DSM garantuje postizanje Nešovog ekvilibrijuma.

4 Uticaj funkcije cijene na DSM

Način definisanja funkcije cijene ima veliki uticaj na performanse algoritma za optimizaciju. Od toga da li je funkcija potrošnje kvadratna ili linearna, kao i da li cijena koju pojedinačni potrošač plaća zavisi samo od njegove ili i od potrošnje drugih potrošača, zavisi iznos koji će potrošači plaćati, raspored njihove potrošnje, ali i odnos maksimalnog i srednjeg dnevnog opterećenja i mogućnost postizanja Nešovog ekvilibrijuma. Svako domaćinstvo $n \in N$ posjeduje određen broj uređaja $a \in A_n$ gdje je A_n skup uređaja domaćinstva n, dok N predstavlja ukupan broj domaćinstava. Za svaki od tih uređaja definiše se vektor rasporeda potrošnje električne energije

$$\mathrm{x}_{n,a} = \left[x_{n,a}^1, \ldots, x_{n,a}^H\right]$$

gdje je $x_{n,a}^h$ potrošnja uređaja a, domaćinstva n u času h. Posmatraju se 24 časa. Ukupna potrošnja n-tog domaćinstva u času h je

$$l_n^h = \sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h$$

Ukupna potrošnja svih domaćinstava u času h je

$$L_h = \sum_{n \in N} l_n^h$$

Dok se PAR računa po sledećoj formuli:

$$PAR = \frac{L_{peak}}{L_{avg}} \tag{1}$$

Gdje su:

$$L_{peak} = max\left(L_h\right)$$

za $h \in H$ i $L_{avg} = \frac{1}{H} \sum\limits_{h \in H} L_h$.

U svakom pametnom brojilu nalazi se optimizator čija je uloga određivanje rasporeda potrošnje svih uređaja jednog domaćinstva u svakom času, tj. raspored članova vektora $\mathrm{x}_{n,a}$, a sve u cilju minimizacije iznosa koji se plaća za utrošenu električnu energiju, a posredno i PAR-a. Optimizacija se vrši uzimajući u obzir zaštitu privatnosti potrošača, što je jedna od najbitnijih prednosti dobrih DSM-a i pametne mreže, i pod uslovima koje definišu sama domaćinstva. Privatnost potrošača se čuva tako što svaki potrošač objavljuje informacije o promjeni ukupne potrošnje električne energije u nekom času, a ne informacije o potrošnji pojedinačnih uređaja. X_n predstavlja skup tih uslova. Ovaj skup kojeg definiše svako domaćinstvo $n \in N$ predstavlja skup validnih rasporeda potrošnje n-tog domaćinstva, dok x_n predstavlja vektor rasporeda potrošnje svih uređaja domaćinstva n:

$$X_n = \left\{ \mathrm{x}_n | \begin{array}{c} \sum\limits_{h=\alpha_{n,a}}^{\beta_{n,a}} x_{n,a}^h = E_{n,a}, \\ x_{n,a}^h = 0, \forall h \in H \backslash H_{n,a}, \\ \gamma_{n,a}^{min} \leq x_{n,a}^h \leq \gamma_{n,a}^{max}, \forall h \in H_{n,a} \end{array} \right\} \tag{2}$$

Svako domaćinstvo za svaki uređaj definiše period dana u kojem je poželjno da uređaj radi, sa $\alpha_{n,a}$ je označen početni, a sa $\beta_{n,a}$ krajnji čas toga perioda. $E_{n,a}$ je ukupna dnevna potrošnja električne energije uređaja a, domaćinstva n. Ona mora biti smještena u dozvoljenom periodu, a jednaka nuli u periodu van njega. Potrošnja uređaja u času h mora biti veća od minimalne $\gamma_{n,a}^{min}$, a manja od maksimalne $\gamma_{n,a}^{max}$ potrošnje uređaja dok je isti u stanju pripravnosti (standby režim). Sada se optimizacija svodi na minimizaciju cijene

$$\underset{x_n \in X_n, \forall n \in N}{\text{minimize}} \sum_{h=1}^{H} C_h \left(\sum_{n \in N} \sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h \right) \tag{3}$$

gdje je C_h funkcija cijene, uz zadovoljenje uslova definisanih u (2). Optimizacioni problem (3) ćemo rješavati pomoću IPM metoda (algoritam za rješavanje linearnih i nelinearnih-konveksnih problema optimizacije - Interior Point Method) [6]. Pod pretpostavkom da sva ostala domaćinstva podese svoj raspored potrošnje prema domaćinstvu n, i sa datim vektorom rasporeda potrošnje svih ostalih domaćinstava izuzev n-tog, lokalni optimizacioni problem svodi se na:

$$\underset{x_n \in X_n}{\text{maximize}}\, P_n \left(x_n : x_{-n} \right) \tag{4}$$

Elementi igre stiču se uvođenjem dvije pretpostavke. Ukoliko sa b_n označimo ukupan iznos koji snabdijevači električne energije dnevno naplate domaćinstvu, prva pretpostavka je:

$$\sum_{n\in N} b_n \geq \sum_{h=1}^{H} C_h \left(\sum_{n\in N} l_n^h\right) \tag{5}$$

Lijeva strana označava ukupnu dnevnu naplatu domaćinstvima, a desna ukupnu dnevnu cijenu. Ukoliko je odnos naplate i cijene jednak jedinici (*k=1*), budžet sistema je izbalansiran, dok odnos veći od jedinice (*k>1*) indicira na profit kompanije – snabdijevača. Druga pretpostavka je:

$$\frac{b_n}{b_m} = \frac{\sum_{h=1}^{H} l_n^h}{\sum_{h=1}^{H} l_m^h},\ \forall n, m \in N \tag{6}$$

Možemo zaključiti da je iznos koji se naplati domaćinstvima upravo srazmjeran njihovoj potrošnji. Efikasni model naplate mora uzeti u obzir obje pretpostavke na osnovu kojih slijedi:

$$b_n = \frac{\sum_{h=1}^{H} l_n^h}{\sum_{m\in N}\sum_{h=1}^{H} l_m^h}(\sum_{m\in N} b_m) == \frac{k\sum_{h=1}^{H} l_n^h}{\sum_{m\in N}\sum_{h=1}^{H} l_m^h}\left(\sum_{h=1}^{H} C_h\left(\sum_{m\in N} l_m^h\right)\right) =$$

$$= {}_n\sum_{h=1}^{H} C_h\left(\sum_{m\in N}\sum_{a\in A_m} x_{m,a}^h\right) \tag{7}$$

Ukoliko iznos cijene koju domaćinstvo n plaća zavisi od dnevnog rasporeda potrošnje svih ostalih domaćinstava, to vodi definisanju igre u kojoj domaćinstva predstavljaju igrače, dok njihovi rasporedi potrošnje predstavljaju strategije igrača. Sada se lokalna optimizacija (4) svodi na:

$$\underset{x_n\in X_n}{\text{minimize}} \sum_{h=1}^{H} C_h\left(\sum_{a\in A_n} x_{n,a}^h + \sum_{m\in N\setminus\{n\}} l_m^h\right) \tag{8}$$

što predstavlja efikasan model naplate električne energije. U [2] je korišćena kvadratna funkcija cijene:

$$C_h(x) = a * x^2, za\ \ a = const \tag{9}$$

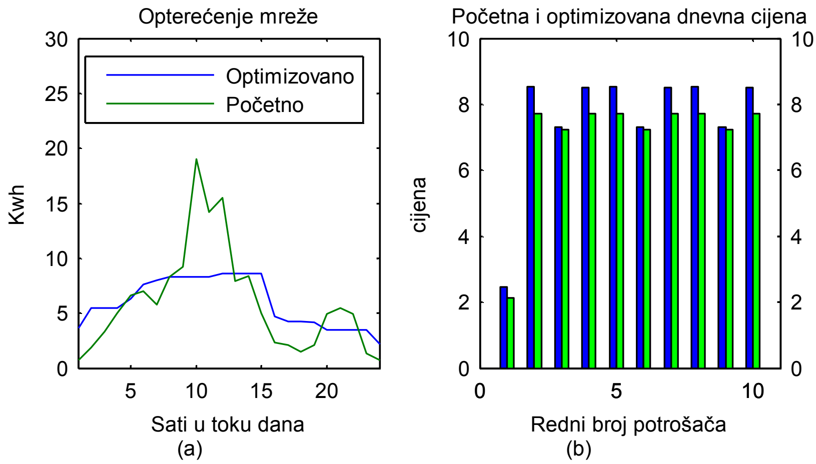
Kada je u pitanju ovakav način optimizacije on se rješava pomoću IPM metoda. U [2] je dokazano da se sa ovakvom realizacijom funkcije cijene postiže Nešov ekvilibrijum. Iz (8), troškovi svakog domaćinstva zavise od sopstvenog, ali i rasporeda potrošnje svih ostalih domaćinstava. Uveden je elemenat igre. Svaki optimizator rješava lokalni optimizacioni problem (8) koristeći IPM metod [6]. Optimizacija potrošnje električne energije (tj. IPM metod) vrši se za svako domaćinstvo. Za realizaciju IPM metoda u MATLAB-u postoje ugrađene funkcije od kojih koristimo *fmincon* ili *linprog*, u zavisnosti od načina definisanja funkcije cijene. *fmincon* funkciju koristimo ukoliko je funkcija koja se optimizuje kvadratna, a *linprog* ukoliko je ona linearna. Na početku optimizacije vrši se inicijalizacija vektora l_n za sva domaćinstva, tj. vektora čiji su elementi vrijednosti potrošnje električne energije po času u toku jednog dana. Svaki korisnik definiše i uslove optimizacije za sve uređaje, tj skup X_n. Nakon toga pojedinačna domaćinstva naizmjenično vrše lokalnu optimizaciju. Nakon završetka lokane optimizacije n-tog domaćinstva, provjerava se da li je optimizacijom izmijenjen raspored njegove potrošnje x_n. Ukoliko jeste, na osnovu novih vrijednosti, dobijenih optimizacijom, ažurira se vektor l_n, i obavještavaju ostala domaćinstva o izmjeni. Razmjena informacija među korisnicima, kao što je slanje poruke o promjeni vektora l_n, se vrši putem LAN-a ili nekim drugim komunikacionim interfejsom. Lokalna optimizacija se ponavlja sve dok nijedno domaćinstvo ne objavi promjenu u rasporedu potrošnje x_n, odnosno l_n. Na ovaj način, objavljivajući informacije o promjeni ukupne potrošnje električne energije po času, a ne potrošnje svakog uređaja u svakom času, kao ni vremenima njihove aktivacije, korisnici ne otkrivaju detalje o svojoj potrošnji. Time se štiti njihova privatnost, što je jedan od glavnih preduslova uspješne optimizacije. U [2] je vršena slučajna inicijalizacija vektora l_n, dok smo u našoj realizaciji smatrali da se i na početku optimizacije ta informacija može razmijeniti među korisnicima i time ubrzati konvergencija algoritma.

Dokazano je da algoritam u [2] konvergira Nešovom ekvilibrijumu igre. Trenutno aktuelan način računanja cijene u većini zemalja je linearan. Kada bi se navedeni algoritam direktno primjenio uz trenutno aktuelan način računanja cijene električne energije, usljed njegove linearnosti, cijene koju plaćaju pojedinačna domaćinstva bi se računale potpuno nezavisno, a ne bi bilo ni elementa igre, pa se ne bi moglo ni govoriti ni o postizanju Nešovog ekvilibrijuma. Da bi se proučilo do kakvih bi se rezultata došlo direktnom primjenom linearne funkcije cijene, koja je trenutno aktuelna u većini zemalja, pored primjene algoritma uz IPM za linearnu optimizaciju (koristeći funkciju *linprog*), analiziraće se i rezutati dobijeni primjenom istog algoritma uz kvadratnu funkciju cijene utrošene električne energije, ali bez pretpostavki (5) i (6). Dakle, cijena koju pojedinačno domaćinstvo plaća neće zavisiti od rasporeda potrošnje ostalih domaćinstava. Osim toga analiziraćemo i primjenu linearne funkcije cijene, ali uz modifikaciju načina promjene koeficijenta potrošnje koji se koristi u linearnoj funkciji. Ovaj način realizacije ukida linearnost te ćemo stoga za realizaciju modifikovanih linearnih funkcija cijene koristiti *fmincon* funkciju.

5 Analiza uticaja načina definisanja funkcije cijene na rezultate optimizacije

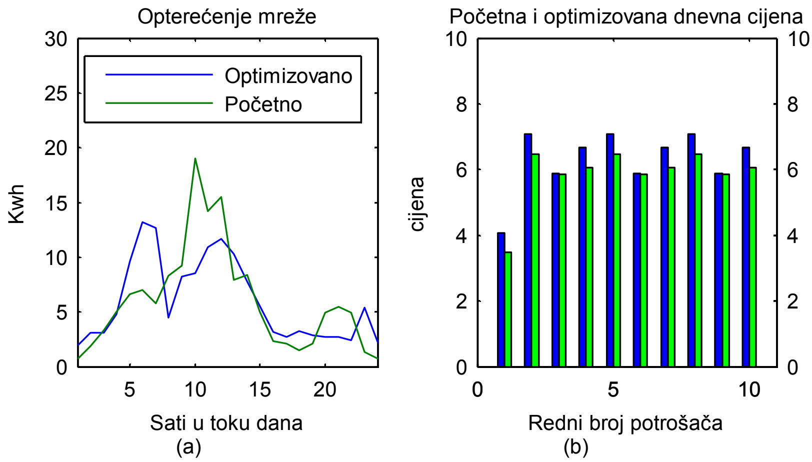
U svim simulacijama je analiziran uzorak od 10 domaćinstava. Pretpostavlja se da svako domaćinstvo ima uređaje sa vremenski fiksiranim vremenom aktivacije (ukupno 13, za 10 uzetih domaćinstava u simulacijama: frižider, sijalica i td.) i uređaje sa vremenom aktivacije koje se može pomjerati u toku 24h (ukupno 40, za 10 uzetih domaćinstava u simulacijama: mašina za veš, mašina za suđe itd.). Optimizator ima uticaj samo na uređaje čije se vrijeme aktivacije može pomjerati, jer nam je i cilj da odredimo optimalno vrijeme rada takvih uređaja u periodu njihovog dozvoljenog rada koji je definisan skupom X, kao i njihovu optimalnu potrošnju u tome periodu. Optimizator nema uticaja na uređaje kojima je potrebno da rade 24h. U simulacijama u kojima se analizira linearna funkcija je uzeto u obzir da domaćinstva koriste dvotarifna brojila, kao i da cijena koju plaćaju zavisi od perioda dana, tj. više ili niže tarife. Prvo ćemo prikazati rezultate optimizacionog algoritma koristeći kvadratnu funkciju cijene utrošene električne energije realizovanu kao u [2].

Na slici 1. prikazan je rezultat optimizacije kada je funkcija cijene (7) realizovana kao kvadratna funkcija. Ovdje se pod kvadratnom cost funkcijom nalazi suma rasporeda potrošnje pojedinačnog kao i svih ostalih domaćinstava. Uzevši ovo u obzir cijena koju plaća jedno domaćinstvo zavisi ne samo od njegove potrošnje, već i od potrošnje svih ostalih domaćinstava, tj. u zavisnosti od rasporeda potrošnje ostalih domaćinstava određuje se optimalan raspored potrošnje pojedinačnog domaćinstva. Ono što je karakteristično za ovaj način definisanja funkcije cijene jeste da je uveden elemenat igre. Kada pogledamo rezultate, shvatićemo da je ovakav način definisanja funkcije pažljivo biran u cilju što boljih rezultata optimizacije. Ukupna optimizovana dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava (zeleni barovi) je manja od početne (plavi barovi). PAR je smanjen za 53.85%.



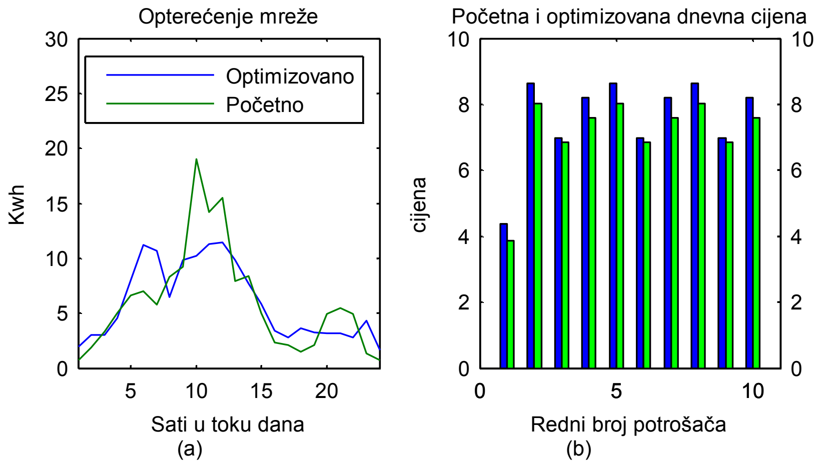
Sl. 1.(a) Opterećenje mreže prije i nakon optimizacije u toku 24h. (b) Početna (plavi barovi) i optimizovana (zeleni barovi) dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava koristeći kvadratnu funkciju cijene.

Sledeći su rezultati optimizacionog algoritma koristeći linearnu funkciju cijene, čiji je oblik: $C_h\left(x_n\right) = a{*}x_n$, gdje je a koeficijent koji iznosi 0.5 centi/kwh za višu (VT), tj. 0.2 centa/kwh za nižu tarifu (NT). Koeficijent potrošnje zavisi od perioda dana. U periodu od 2h – 7h je aktivna naplata niže, a u preostalom periodu, više tarife. Ovako definisana funkcija cijene je ekvivalentna računanju cijene električne energije u Crnoj Gori.



Sl. 2.(a) Opterećenje mreže prije i nakon optimizacije u toku 24h. (b) Početna (plavi barovi) i optimizovana (zeleni barovi) dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava koristeći linearnu funkciju cijene.

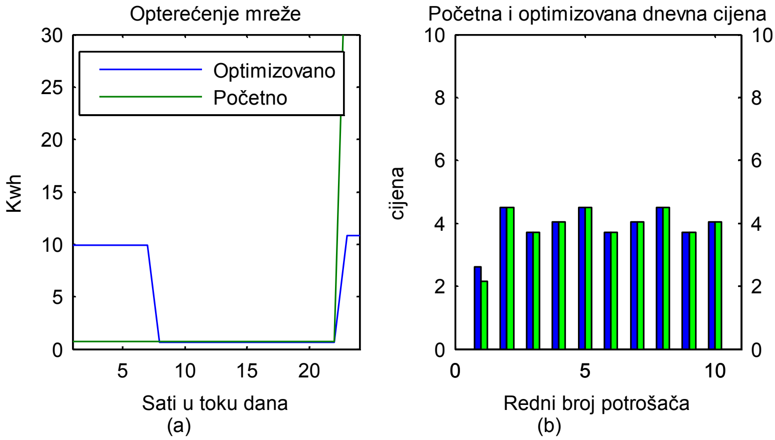
Na slici 2 prikazan je rezultat optimizacije ukupnog opterećenja mreže u toku 24h (plave linije), kao i njegova početna vrijednosti (zelene linije). Ukupno opterećenje mreže je u časovima više tarife smanjeno u odnosu na početnu vrijednost. Došlo je do peglanja pikova u časovima više tarife, ali i do očekivane pojave pikova u časovima niže tarife. Naime, osim postojećeg pika u časovima više tarife koji se smanjio, pojavio se i pik u časovima niže tarife, što je i očekivano jer je primjenom aktuelne linearne funkcije cijene predviđeno da potrošači upravo u tim časovima, časovima NT, uključuju uređaje sa vremenom aktivacije koje se može pomjerati u toku 24h. PAR se smanjio za 30.7%. Optimizovana dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava (zeleni barovi) je manja od početne (plavi barovi).



Sl. 3. (a) Opterećenje mreže prije i nakon optimizacije u toku 24h. (b) Početna (plavi barovi) i optimizovana (zeleni barovi) dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene.

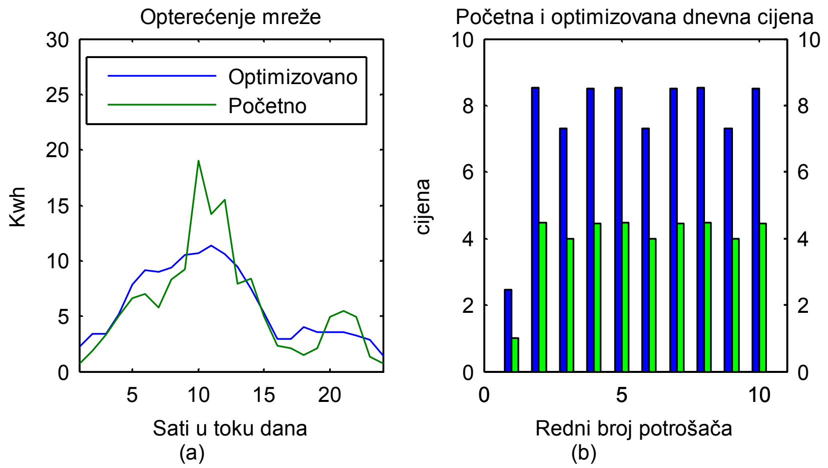
Na slici 3 prikazani su rezultati optimizacionog algoritma koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene. Modifikacija se odnosi na to da se koeficijent potrošnje a mijenja ne samo u zavisnosti od perioda dana, tj. više i niže tarife, već i od srednje vrijednosti opterećenja u toku 24h. Pomenuta modifikacija je uvedena u cilju spriječavanja pojave pikova u časovima niže tarife. Kada je potrošnja domaćinstva u času h manja od prosječne količine utrošene energije svih domaćinstava u toku 24h, koeficijent a iznosi 0.4 centa/kwh, dok je u suprotnom njegova vrijednost 0.65 centa/kwh. Kao što možemo zaključiti cijena koju potrošač plaća zavisi od potrošnje svih domaćinstava. Ovaj način realizacije ukida linearnost, daje konveksnu funkciju i ona se u MATLAB-u realizuje *fmincon* funkcijom, što predstavlja još jednu razliku u odnosu na prethodno realizovanu linearnu funkciju cijene. Na slici ćemo uočiti da imamo ublaženu pojavu pika u časovima niže tarife, što je i bio cilj modifikacije linearne funkcije cijene. Ukupno opterećenje mreže je u časovima više tarife smanjeno u odnosu na početnu vrijednost. Optimizovana dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava (zeleni barovi) je i ovdje manja od početne (plavi barovi). PAR se smanjio za 40%.

Još jedna modifikacija linearne funkcije, a u cilju dobijanja što boljih rezultata optimizacije, odnosi se na promjenu perioda aktivacije uređaja iz perioda više u period niže tarife uz već postojeće uslove da se koeficijent potrošnje a mijenja u zavisnosti od perioda dana, tj. više i niže tarife, kao i od srednje vrijednosti opterećenja u toku 24h.



Sl. 4.(a) Opterećenje mreže prije i nakon optimizacije u toku 24h. (b) Početna (plavi barovi) i optimizovana (zeleni barovi) dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava koristeći modifikovanu linearnu funkciju cijene sa prilagodjenim periodom aktivacije

Povećanjem perioda u kojem je uređajima dozvoljeno da rade dobijamo mnogo bolje rezultate optimizacionog metoda. Oblik funkcije cijene ostaje isti $C_h(x_n) = a{*}x_n$. Svaki od uređaja čiji se period aktivacije može pomjerati u toku 24h je postavljen tako da može da radi u časovima niže tarife. I za implementaciju ovoga optimizacionog metoda u *MATLAB-u* koristimo *fmincon* funkciju, jer i ovaj način realizacije ukida linearnost. PAR se smanjio za 72%.



Sl. 5. (a) Opterećenje mreže prije i nakon optimizacije u toku 24h. (b) Početna (plavi barovi) i optimizovana (zeleni barovi) dnevna cijena pojedinačnih domaćinstava koristeći modifikovanu kvadratnu funkciju cijene.

Na slici 5 su prikazani rezultati optimizacije u slučaju korišćenja kvadratne funkcije cijene, ali koja zavisi samo od rasporeda lokalne potrošnje pojedinačnog domaćinstva. Cijene pojedinačnih domaćinstava se računaju nezavisno po sledećoj formuli:

$$\underset{x_n \in X_n}{\text{minimize}} \sum_{h=1}^{H} \left(C_h \left(\sum_{a \in A_n} x_{n,a}^h \right) + C_h \left(\sum_{n \in N\{n\}} l_m^h \right) \right) \tag{10}$$

Gdje je: $C_h\left(x_n\right) = a{*}x^2$

Na slici se vidi da je optimizovana cijena pojedinačnih domaćinstava (zeleni barovi) gotovo za 50% manja od početne (plavi barovi). PAR je nakon optimizacije manji za 46.15% što ukazuje da bi stabilnost mreže bila povećana, dok bi sami potrošači bili podstaknuti na upotrebu predloženog metoda.

Kada je optimizaciona funkcija konveksna (9), koristi i gradijent i Hesijan funkcije koju optimizuje. Možemo primjetiti da se pod kvadratnom funkcijom cijene nalazi raspored potrošnje pojedinačnog domaćinstva. Način računanja, kao i sami gradijent i Hesijan veoma utiču na performanse algoritma, stoga se mora pažljivo odabrati način njihove realizacije. Mogu se proslijediti funkciji *fmincon* na više načina. Ukoliko se gradijent i Hesijan funkcije koja se optimizuje mogu izračunati, oni se moraju realizovati u okviru realizacije funkcije cijene i biti izlazni argumenti te funkcije, što je i učinjeno u simulacijama. Međutim, ako ih ne obezbijedi korisnik, *fmincon* funkcija ima ugrađeno više načina njihovog računanja. Rezultati su pokazali da algoritam radi kako brže, tako i tačnije uz upotrebu Hesijana kojeg realizujemo u okviru funkcije optimizacije.

Analizirajući pet primjera funkcije cijene zaključujemo da direktna primjena trenutno aktuelne funkcije, sa koeficijentom potrošnje koji se mijenja u zavisnosti od perioda dana, ne bi dala optimalne rezultate. Dovela bi do automatskog uključivanja uređaja u vrijeme kada je cijena električne energije niža, što sada većina domaćinstava sama čini. S druge strane, ne bi optimalno iskoristila veliki dio perioda u kojem je niža tarifa, pa bi moglo doći do povećanja opterećenja mreže na početku niže tarife. Stoga smo modifikovali i aktuelnu funkciju cijene i kao rezultat smo dobili veće smanjenje PAR-a, pikovi u časovima niže tarife su bolje ispeglani, uz smanjenje cijene koju potrošači plaćaju nakon optimizacije, tj. cijena koju potrošači plaćaju je smanjena u odnosu na početnu. Povećanjem perioda u kojem je uređajima dozvoljeno da rade, što je takođe realna i aktuelna situacija, dobili smo u smislu povećanja stabilnosti mreže najbolje rezultate optimizacionog metoda. Naime, inicijalni uslovi potrošnje određuju uključivanje uređaja u časovima niže tarife, što je najbliže aktuelnom načinu aktivacije uređaja potrošača.

6 Zaključak

Uzevši u obzir rezultate svih simulacija možemo zaključiti da bi predloženi algoritam za optimizaciju i te kako našao svoju primjenu. Naime, ovakav sistem za upravljanje potrošnjom električne energije rezultirao bi smanjenjem iznosa koji potrošači plaćaju kao i smanjenjem PAR-a, odnosno većom stabilnošću mreže nego što je to trenutno slučaj. Osim svih prednosti koje im pruža pametna mreža kao takva, mogućnost praćenja i kontrole sopstvene potrošnje, ovakav sistem bi upotpunio mogućnosti potrošača da uz maksimalno iskorišćenje kapaciteta elektroenergetske mreže smanje iznos koji plaćaju za utrošenu električnu energiju. Usled svega ovoga potrošači bi bili podstaknuti da učestvuju i daju doprinos ovakvom sistemu koji bi definitivno povećao kvalitet električne mreže. Kao što smo mogli zaključiti iz simulacija, način definisanja funkcije cijene ima presudnu ulogu na performanse ovakvog sistema upravljanja, stoga se njoj mora posvetiti posebna pažnja.

7 Reference

[1] F. Berman, G. Fox and A. J. G. Hey, *Grid Computing: Making the Global Infrastructure a Reality*, 2003: Wiley.

[2] A. Mohsenian-Rad, V. Wong, J. Jatskevich, R. Schober, and A. Leon-Garcia, "Autonomous demand-side management based on game theoretic energy consumption scheduling for the future smart grid," *Smart Grid, IEEE Transactions on*, vol. 1, no. 3, pp. 320 –331, dec. 2010.

[3] Tamara Bojičić, Vesna Popović-Bugarin, "Uticaj kriterijuma minimizacije na upravljanje potrošnjom električne energije", *XIX naučno-stručni skup INFORMACIONE TEHNOLOGIJE sadašnjost i budućnost*, Žabljak, Februar 2014.

[4] Tamara Bojičić, Vesna Popović-Bugarin, "Modifikacije kriterijuma minimizacije u upravljanju potrošnjom električne energije", *58. konferencija za elektroniku, telekomunikacije, računarstvo, automatiku i nuklearnu tehniku ETRAN 2014*, Vrnjačka Banja, Srbija, 2-5 Jun 2014

[5] C. W. Gellings and J. H. Chamberlin *Demand Side Management: Concepts and Methods*, 1993: PennWell Books

[6] H. Hindi. A tutorial on convex optimization. In *American Control Conference*, Boston, USA, June 2004

[7] A. J. Wood and B. F. Wollenberg, *Power Generation, Operation and Control.* Wiley-Interscience, 1996.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна и универзитетска библиотека
Републике Српске, Бања Лука

51(082)

MATHEMATICAL Conference of the Republic of Srpska (4 ; 2014 ; Trebinje)
Proceedings. Volume II / Fourth Mathematical Conference of the Republic of Srpska, Trebinje, 06-07 June 2014 ; [glavni urednik Milenko Pikula]. - 1. izd. - Trebinje : Fakultet za proizvodnju i menadžment, 2015 (Trebinje : Grafokomerc). - 410 str. : ilustr. ; 25 cm

Na poleđini nasl. str.: Četvrta matematička konferencija Republike Srpske. - Tiraž 300. - Bibliografija uz svaki rad. - Abstracts.

ISBN 978-99976-600-4-6

COBISS.RS-ID 5048856